На правах рукописи

Мошкин Николай Павлович

Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с применением методов расщепления

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор, г.н.с. ИВТ СО РАН, г. Новосибирск, Черных Геннадий Георгиевич
Официальные оппоненты:	Белолипецкий Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом ИВМ СО РАН, г. Красноярск
	Воеводин Анатолий Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, г.н.с. ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск
	Рычков Александр Дмитриевич, доктор технических наук, профессор, с.н.с. ИВТ СО РАН, г. Новосибирск
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва

Защита состоится «20» ноября в 10 часов на заседании диссертационного совета Д003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИВТ СО РАН.

Автореферат разослан «____» _____ 2013 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук А.С. Лебедев

Общая характеристика работы

Актуальность работы.
Исследование динамики вязких несжимаемых жидкостей представляет интерес в связи с изучением ряда геофизических явлений и решением практических задач, связанных с обтеканием тел и протеканием жидкостей в областях со сложной геометрией. Как правило, лабораторные и натурные экспериментальные исследования дорогостоящи и их успешное применение возможно лишь в простейших ситуациях. Важная роль в изучении течений вязких несжимаемых жидкостей принадлежит численному моделированию. В связи с вышеизложенным задача построения эффективных численных моделей и проведении на их основе изучения течений вязких несжимаемых жидкостей представляется актуальной. Создание численной модели подразумевает математическую постановку задачи, разработку, обоснование и тестирование эффективных численных алгоритмов и их реализацию в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

Методы расщепления являются достаточно универсальным средством построения экономичных численных алгоритмов решения многомерных задач гидродинамики. Разработка и применение методов расщепления связаны с пионерскими работами Писмэна, Рэкфорда и Дугласа (1955), Н.Н. Яненко (1959). Практически невозможно упомянуть имена всех исследователей, внесших неоценимый вклад в развитие и углубление методов расщепления. Отметим лишь Н.Н. Яненко, С.К. Годунова, Е.Г. Дьяконова, Г.И. Марчука, А.А. Самарского, О.М. Белоцерковского. В настоящее время активно используются целые классы экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости с применением методов расщепления. Проекционный метод решения уравнений Навье – Стокса в примитивных переменных широко употребляется в настоящее время. Среди многих имен исследователей, вложивших свой вклад в развитие проекционных методов, отметим лишь несколько, стоящих у первоистоков метода: F.H. Harlow, A.J. Chorin, R. Temam, О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, А.И. Толстых. Другими подходами, получившими широкое распространение, являются методы слабой сжимаемости (Н.Н. Яненко, Б.Г. Кузнецов, 1966) и искусственной сжимаемости (A.J. Chorin, 1968).

Методы расщепления широко применяются при моделировании многих физических процессов. Неявная модификация метода расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям позволяет получать решение системы разностных уравнений скалярными прогонками. Однако применение методов расщепления и их программная реализация трудоемки, существенно зависят от класса рассматриваемых задач и требуют разработки алгоритмов и оригинальных программных комплексов с привлечением совре-

менных компьютерных технологий в каждом конкретном случае.

В диссертации рассмотрено применение методов расщепления к четырем классам задач. Для каждого класса разработаны и численно-экспериментально обоснованы эффективные вычислительные алгоритмы. С использованием созданных на основе этих алгоритмов программных реализаций проведены комплексные исследования рассматриваемых классов задач с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Первый класс задач - моделирование обтекания самодвижущихся тел вязкой несжимаемой жидкостью. Проблема обтекания самодвижущегося тела имеет естественное происхождение (самодвижение демонстрируют живые существа, суда и самолеты). Самодвижение означает, что тело перемещается без воздействия внешней силы, только из-за взаимодействия между его границей и окружающей жидкостью. Хотя проблема обтекания самодвижущихся тел наиболее часто встречается в природе и имеет важное практическое значение, число работ, рассматривающих этот процесс, весьма ограничено и описание гидродинамики течений за самодвижущимися телами недостаточно полно. Поэтому численные, аналитические и экспериментальные исследования самодвижения объектов в жидкости являются актуальными (даже если эти движения не могут быть реализованы на практике). В диссертации рассмотрены задачи о самодвижении пары вращающихся круглых цилиндров и о самодвижении тора с поверхностью, вращающейся вокруг его центральной линии.

Второй класс - численное моделирование турбулентных следов за буксируемыми телами в стратифицированной жидкости. Такие течения играют существенную роль в задачах океанологии, геофизики и экологии. Численное моделирование на основе иерархии современных полуэмпирических моделей турбулентности позволяют рассмотреть следующие актуальные неисследованные вопросы:

- сопоставление полуэмпирических моделей турбулентности с точки зрения адекватного описания характеристик течения;
- различие следов и генерируемых ими внутренних волн за самодвижущимися и буксируемыми телами;
- влияние малого суммарного избыточного импульса на величины основных параметров следа;
- закономерности распространения пассивной примеси в следе за буксируемым телом.

Третий класс задач - разработка численных алгоритмов решения уравнений Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости в переменных, предложенных С.Н. Аристовым и В.В. Пухначевым (см. Доклады АН, 2004, Т.394). В случае вращательно-симметричного течения новая форма уравнений образует слабо связную систему двух параболических уравнений второго порядка

(для которых ставится первая начально-краевая задача) и одного линейного эллиптического уравнения четвертого порядка, для которого ставится задача типа Неймана. Актуальность построения численного алгоритма для новой формы уравнений Навье – Стокса обусловлена следующими обстоятельствами: анализ численных результатов позволит понять природу новых переменных и связать их с ранее используемыми; новая форма уравнений является полезной для детального исследования структуры вращательно-симметричных и плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости; новая форма уравнений, возможно, является более содержательной по сравнению с другими традиционными представлениями уравнений Навье – Стокса.

Четвертый класс - численное моделировании течений в разветвляющихся трубах и каналах под действием заданных перепадов давления. Вызванные перепадами давления течения через ветвящиеся каналы широко представлены в инженерных конструкциях, таких как системы трубопроводов, системы вентиляции и присутствуют в человеческом организме (течение крови в венах и артериях). Динамика подобных течений сложна и слабо изучена. Нетривиальная структура течений включает рециркуляционые зоны и возвратные потоки. Если область течения полностью ограничена непроницаемой границей, то не возникает неясности в задании граничных условий для уравнений Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости - это условия прилипания. Однако, когда имеются участки границы, через которые жидкость протекает (втекает или вытекает в область), нет единого мнения о предпочтительности вида граничных условий с математической или физической точек зрения. Течение может определяться как по заданным расходам, так и по известным перепадам давления или полного напора. Во многих практических задачах течение в области должно быть определено по заданным перепадам давления между участками втекания и вытекания. Применению численных методов и созданию численных алгоритмов для решения задач протекания с заданным давлением на участках границы посвящено весьма ограниченное число публикаций. В связи с этим разработка, верификация алгоритмов и комплексов программ для таких задач является актуальной.

Цель диссертационной работы состоит: в разработке основанных на методах расщепления новых численных моделей, позволяющих изучать течения вязких несжимаемых жидкостей, связанные с самодвижением тел, с динамикой турбулентного следа за буксируемым телом в устойчиво стратифицированной среде, с протеканием жидкости через ограниченную область при известных перепадах давления, а также вращательно-симметричных течений, описываемых новой формой уравнений Навье – Стокса (предложенной С.Н. Аристовым и В.В. Пухначевым); в проведении комплексных исследований рассматриваемых проблем с применением разработанных численных моделей и вычислительного эксперимента.

Научная новизна изложенных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

В первом классе задач:

- с применением методов расщепления разработаны численный алгоритм и комплекс программ для решения уравнений Навье – Стокса в бицилиндрической и тороидальной системах координат;
- в задаче об обтекании двух вращающихся круговых цилиндров равномерным потоком детально описана зависимость коэффициентов сопротивления, подъемной силы и структуры течения от числа Рейнольдса, угловой скорости вращения цилиндров и зазора между цилиндрами;
- впервые численно решена задача о самодвижении двух вращающихся цилиндров при конечном числе Рейнольдса;
- в задаче об обтекании тора, вращающегося вокруг его центральной линии, равномерным потоком детально описана зависимость коэффициента сопротивления и структуры течения при изменении числа Рейнольдса, угловой скорости вращения и аспектного отношения; установлены угловые скорости вращения поверхности тора, при которых набегающий поток перестает протекать через отверстие тора;
- впервые численно решена задача о самодвижении тора с поверхностью, вращающейся вокруг его центральной линии, при конечном числе Рейнольдса; показана возможность самодвижения в разных направлениях (в направлении вращения внутренней поверхности тора и в противоположном направлении);
- установлена зависимость скорости самодвижения от аспектного отношения; показано, что при фиксированном аспектном отношении размерная поступательная скорость возрастает при возрастании числа Рейнольдса и достигает 60% от линейной скорости вращения поверхности.

Во втором классе задач:

- построены усовершенствованные численные модели турбулентного следа за буксируемым телом в устойчиво стратифицированной среде; проведено подробное тестирование и сравнение численных моделей турбулентного следа на известных экспериментальных данных и результатах расчетов других авторов; детально описана динамика турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде в сопоставлении с динамикой безымпульсного турбулентного следа; впервые выполнено численное моделирование анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде;
- построенные численные модели турбулентного следа за буксируемым телом успешно применены для изучения закономерностей генерации и распространения внутренних волн; показано, что турбулентный след за буксируемым телом генерирует волны существенно большей амплитуды в сравнении с безымпульсным следом;

- построена численная модель турбулентного следа с малым суммарным избыточным импульсом в линейно стратифицированной среде; показано, что на рассматриваемом интервале значений времени (до 10 периодов плавучести) малый избыточный импульс оказывает существенное влияние на дефект осредненной продольной компоненты скорости и незначительное влияние на энергию турбулентности и генерируемые внутренние волны;
- приведены результаты численного моделирования и рассмотрены основные особенности динамики пассивного скаляра в турбулентных следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде; построена упрощенная диффузионная модель переноса пассивного скаляра в дальних турбулентных следах, позволяющая на порядок сократить время расчета.

В третьем классе задач:

- построена численная реализация и разработан комплекс программ, позволяющий решать уравнения Навье – Стокса в новой формулировке С.Н. Аристова и В.В. Пухначева для вращательно-симметричных течений;
- показано, что новая форма уравнений Навье – Стокса может успешно применяться для изучения динамики сложных течений (в частности, в расчетах исследован гистерезис в течении Тейлора – Куэтта).

В четвертом классе задач:

- на основе метода конечных объемов разработан алгоритм численного решения задач протекания вязкой несжимаемой жидкости, в которых давление (или полный напор) задано на участках границы области течения;
- с применением разработанного комплекса программ построены диаграммы режимов течения в плоском Т-образном канале; проведено детальное описание структуры шести режимов течения в зависимости от заданных перепадов давления между ответвлениями Т-образного канала;
- впервые численно решена модельная задача о возникновении течения из состояния покоя под действием внезапно приложенных перепадов давления между участками протекания Т-образного канала; показано, что за время, необходимое для достижения стационарного режима, течение может менять направления; представлено детальное описание формирования и развития вихревых зон.

Практическая и теоретическая значимость результатов исследований, вошедших в диссертационную работу, определяется возможностью использования созданных автором алгоритмов и комплексов программ для исследования широкого класса задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.

Разработанные численные модели обтекания потоком вязкой несжимаемой жидкости самодвижущихся тел могут быть использованы для планирования лабораторных экспериментов, обработки уже известных экспериментальных данных, построения новых более полных численных моделей.

Разработанные численные модели турбулентных следов могут быть использованы для численного моделирования динамики дальних следов и генерируемых ими внутренних волн за буксируемыми телами и других свободных сдвиговых турбулентных течений в линейно стратифицированной среде; для обработки результатов известных лабораторных экспериментов и планирования новых; при построении новых численных моделей.

Предложенная технология численного решения уравнений Навье – Стокса в формулировке С.Н. Аристова и В.В. Пухначева может использоваться для подробных теоретических и численных исследований двумерных плоскопараллельных и вращательно-симметричных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Представленные алгоритмы решения уравнений Навье – Стокса с граничными условиями для давления позволяют эффективно исследовать течения в сложных разветвляющихся системах каналов в случаях, когда известны только перепады давления между отдельными ответвлениями.

Достоверность результатов обеспечивается использованием следующих принципов математического моделирования: детальным тестированием, контролем сходимости решений на последовательности сеток; сопоставлением расчетных данных, полученных с применением существенно различающихся численных алгоритмов и математических моделей; сопоставлением численных данных с имеющимися результатами лабораторных экспериментов, теоретических и численных расчетов других авторов.

Тема диссертационной работы является составной частью плановых исследований Института вычислительных технологий СО РАН: программа СО РАН “Математическое моделирование и вычислительные технологии в задачах гидродинамики, физики плазмы, микроэлектроники и экологии” (2.2.2, № 01.99.0010291); тема РАН “Математическое моделирование и вычислительные технологии в задачах гидродинамики, физики плазмы, микроэлектроники и экологии” (№ госрегистрации 01.2.00.313335); тема РАН “Информационно-вычислительные технологии в задачах поддержки принятия решений”, (№ госрегистрации 0120.0408295, 01.200707874). Представленные в диссертации исследования поддержаны РФФИ (коды проектов 95-01-00910а, 98-01-00736а, 01-01-00783а, 04-01-00209а, 07-01-00363а, 10-01-00435а, 13-01-00246а) и грантом НШ 2314.2003.1 Президента РФ. Частично исследования проведены в университете Тайланда (“Suranaree University of Technology”, Nakhon Ratchasima), где диссертант работал по контракту в течении ряда лет.

Соответствие паспорту специальности 05.13.18. В исследованиях, вы-

полненных в рамках диссертации, присутствуют оригинальные научные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ. Эти области соответствуют трем пунктам паспорта специальности 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" по физико-математическим наукам: *п.3. – разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; п.4. – реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента; п.5. – комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.*

На защиту выносятся следующие основные результаты.

По первому классу задач на защиту выносятся:

- Алгоритмы численного решения уравнений Навье – Стокса в бицилиндрической и тороидальной системах координат, программная реализация алгоритмов (п.3, п.4).
- Результаты численного моделирования самодвижения двух вращающихся цилиндров в вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме. Установление зависимости коэффициентов сопротивления, подъемной силы и структуры течения от определяющих параметров (п.5).
- Результаты расчетов задачи о самодвижении тора с вращающейся поверхностью (вокруг его центральной линии) в вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме (п.3, п.4, п.5). Установление зависимости коэффициента сопротивления, структуры течения, скорости и направления самодвижения от скорости вращения поверхности тора и аспектного отношения (п.5).

По второму классу задач на защиту выносятся:

- Численные модели, комплексы программ и результаты численного моделирования турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде (п.3, п.4, п.5).
- Сопоставление характеристик турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн за буксируемым телом с соответствующими характеристиками для следа за самодвижущимся телом (п.4, п.5).
- Полученное на основе численного эксперимента с использованием разработанных программных продуктов подробное описание динамики турбулентного следа с малым суммарным избыточным импульсом в линейно стратифицированной среде (п.4, п.5).
- Описание динамики пассивного скаляра в турбулентных следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде, полученное с использованием разработанных программных продуктов (п.4, п.5).

По третьему классу задач на защиту выносятся:

- Алгоритм решения уравнений Навье – Стокса в новых переменных и его программная реализация для вращательно-симметричных течений вязкой несжимаемой жидкости (п.3, п.4).
- Анализ течения Тэйлора – Куэтта с использованием уравнений Навье – Стокса в новых переменных (п.5).

По четвертому классу задач на защиту выносятся:

- Обобщение метода конечных объемов на задачи о протекании несжимаемой жидкости, в которых давление (полный напор) задано на участках границы области течения; разработка комплекса программ (п.3, п.4).
- Диаграмма режимов течения в плоском Т-образном канале с заданными перепадами давления, построенная на основе численных расчетов (п.5).
- Численное решение задачи о возникновении течения из состояния покоя под действием внезапно приложенных перепадов давления в плоском Т-образном канале (п.5).

Представление работы. Основные результаты диссертации докладывались на ведущих отечественных и зарубежных конференциях. Приведем список некоторых: Troisieme Conference ECCOMAS sur la Mecaniqie des Fluides Numerique, Paris, 1996; The Int. Conf. on Computational Fluid Dynamics, Kyoto, Japan, 2000; Int. Symposium on Advance in Computational Heat Transfer, Australia, 2001; Int. Conf. "Fluxes and structures in fluids", Moscow, 2002; The Second M.I.T. Conf. on Computational Fluid and Solid Mechanics, Massachusetts Institute of Technology, USA, 2003; Int. Conf., Kolmogorov and Contemporary Mathematics, Moscow, 2003; ICHMT Symposium: CHT-04 Advances in Computational Heat Transfer, Norway, 2004; "Методы аэрофизических исследований", Новосибирск, 2004, 2007; 7-я и 9-я Всеросс. науч. конф. "Краевые задачи и математическое моделирование", Новокузнецк, 2004, 2008; The Fourth Int. Conf. on Computational Heat and Mass Transfer, 4th ICCHMT, Paris-Cachan, France, 2005; Межд. конф. "Потоки и структуры в жидкостях", Москва, ИПМех РАН, 2005; Int. Conf. on High Performance Scientific Computing, Hanoi, Vietnam, 2006; Third Int. Summer Scientific Workshop "High speed hydrodynamics and numerical simulation", Kemerovo, 2006; The 5th Int. Conf. on Computational Fluid Dynamics, Seoul, Korea, 2008; IX - Всеросс. съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 2006; The Fifth Int. Conf. on Dynamic Systems and Applications, Atlanta, USA, 2007; Int. Conf. Fluxes and Structures in Fluids, St.-Petersburg, 2007; Всеросс. конф. "Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва", посвященная 50-летию ИГиЛ СО РАН, 2007; 7 AIMS Int. Conf. on Dynamical Systems, Differential equations and Applications, Texas,

Arlington, USA, 2008; Межд. конф. “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики”, Воронеж, 2009, 2011; Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение, приуроченная к 90-летию академика Л. В. Овсянникова, Новосибирск, 2009; Межд. конф. “Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика”, посвященная 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко, Новосибирск, 2011; SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures (NW12), WA, Seattle, USA, 2012.

Результаты также обсуждались на семинарах ИВТ СО РАН, г. Новосибирск, “Информационно-вычислительные технологии” (рук. академик Ю.И. Шокин, профессор В.М. Ковеня); Институте Автоматизации Проектирования РАН, г. Москва, “Математическое моделирование задач механики сплошных сред” (рук. чл.-корр. РАН В.А. Гущин); ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, “Математическое моделирование в механике” (рук. академик В.М. Фомин, профессор А.В. Федоров); ИГиЛ СО РАН, г. Новосибирск, “Прикладная гидродинамика” (рук. чл.-корр. РАН В.В. Пухначев); ИВМ СО РАН, г. Красноярск, “Проблемы математического и численного моделирования”, (рук. чл.-корр. РАН В.В. Шайдуров); ИВТ СО РАН, г. Новосибирск, “Законы сохранения и инварианты для уравнений гидродинамического типа” (рук. д.ф.-м.н. С.Б. Медведев).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 63 печатных работах, из них 25 (25,1/17,3 печ. л.) статей в рецензируемых журналах, включенных в перечень рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций (в скобках в числители указан общий объем публикаций, в знаменателе – объем, принадлежащий лично автору диссертации). Список основных публикаций по теме диссертации приведен в конце автореферата.

Личный вклад автора. Личный вклад диссертанта заключается в обсуждении постановок задач, разработке и тестировании адекватных численных моделей, проведении расчетов и интерпретации численных экспериментов. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором (либо под его руководством). Представление результатов, выносимых на защиту, полученных в совместных исследованиях, согласованы с соавторами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения. Список литературы содержит 275 наименования. Общий объем диссертации составляет 333 страниц, включая 139 рисунков и 46 таблиц.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность тематики диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований; показана практическая значимость полученных результатов; представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассматриваются задачи о самодвижении тела в вязкой несжимаемой жидкости. Существенное влияние на изучение проблемы самодвижения оказали исследования, проводимые в ИГиЛ СО РАН и ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН. Позже исследования в этом направлении появились и за рубежом. Приведенный во **введении к первой главе** обзор теоретических, численных и экспериментальных исследований о самодвижении тел в вязкой несжимаемой жидкости показал недостаточную полноту изученности проблемы. В диссертации рассмотрено самодвижение двух вращающихся цилиндров и самодвижение тора с поверхностью, вращающейся вокруг его центральной линии. Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1–5].

В **п.1.1** приведена общая математическая формулировка задачи о движении твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости. Задача самодвижения состоит в нахождении решения уравнений Навье – Стокса

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = div(T(\vec{v},p)), \quad \mathrm{div}\vec{v} = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями и дополнительным ограничением $\vec{F} = \vec{M} = 0$. Величины $\vec{v}$, p и ρ обозначают вектор скорости, давление и плотность частицы жидкости, $T(\vec{v},p)$ есть тензор напряжений. Суммарная сила и момент со стороны жидкости на погруженное тело с границей Σ заданы соотношениями $\vec{F} = \int_\Sigma \vec{\tau}\, dS$, $\vec{M} = \int_\Sigma [\vec{r}\times\vec{\tau}]\, dS$, где $\vec{\tau} = T\cdot\vec{n}$ обозначает вектор напряжений, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к Σ, указывающий направление вне области, заполненной жидкостью.

В **п.1.2** приведено описание разработанного эффективного численного алгоритма, дано краткое описание комплекса программ и представлены результаты численного моделирования обтекания двух вращающихся круглых цилиндров. Проведено комплексное исследование режимов обтекания, соответствующих самодвижению.

Уравнения Навье – Стокса (1) записаны в цилиндрической биполярной системе координат и приведены к безразмерному виду с использованием диаметра цилиндра, D, как масштаба длины и скорости, U_∞, как масштаба скорости. Течение зависит от числа Рейнольдса Re, от безразмерного промежутка между двумя цилиндрами, g, и от параметров α_i, представляющих отношения вращательной скорости поверхностей цилиндров к скорости набегающего потока: $Re = U_\infty\, D/\nu$, $\alpha_i = D\omega_i/2U_\infty$, $i = 1,2$; $g = \dfrac{d-r_1-r_2}{D}$. Здесь ω_i

— постоянная угловая скорость вращения цилиндров, ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $d = d_1 + d_2$ — расстояние между центрами цилиндров. Обозначения и схема течения показаны на Рисунке 1.

Численный алгоритм, основанный на методе расщепления по физическим процессам, подробно описан в **п.1.2.3**. На первом этапе вычисляются предварительные значения вектора скорости без учета сил давления. На следующем этапе полученное несоленоидальное поле вектора скорости проектируется на пространство соленоидальных векторов.

Рассматривается течение при числах Рейнольдса $Re \leq 40$ (при этом гарантируется стационарный ламинарный поток). Граничные условия из бесконечности сносятся на границу достаточно большой области, которая ограничена координатными линиями цилиндрической биполярной системы координат. Для большого зазора между двумя поверхностями цилиндров взаимное влияние между цилиндрами исчезает, что приводит к разделению потока на течения вокруг одного цилиндра.

Тестирование представленного численного алгоритма и комплекса программ (**п.1.2.4**) выполнено путем сравнения обтекания однородным потоком двух вращающихся и неподвижных цилиндров в диапазоне параметров $0 \leq Re \leq 40$, $0 \leq \alpha_1 (= \alpha_2) \leq 2,5$ при большим зазоре между поверхностями цилиндров, $g = 14$, с экспериментальным и расчетными данными для течения вокруг одного цилиндра с теми же параметрами. Точность численных результатов проверена вычислениями на последовательности сеток. Сравнения по интегральным характеристикам и структуре течения показывают, что полученные численные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами для одиночного цилиндра (взятыми из других источников).

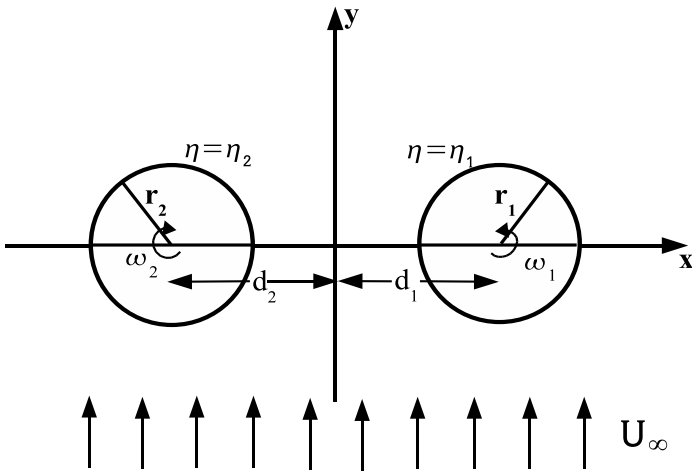

Рис. 1. Схема течения

Представленные в **п.1.2.5** численные расчеты проведены для течения вокруг двух круглых вращающихся цилиндров одинакового радиуса, помещенных поперек набегающего потока; зазор между цилиндрами $g = 1$. Расчеты представлены для $Re = 10; 20;\ 40$ и угловой скорости вращения $0,5 \leq \alpha \leq 2,5$. Левый цилиндр вращается по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью. Правый цилиндр вращается с той же самой постоянной угловой скоростью против часовой стрелки. В Таблице 1 приведены значения коэффициентов сопротивления и подъемной силы. Индексы 1 и 2 обозначают правый

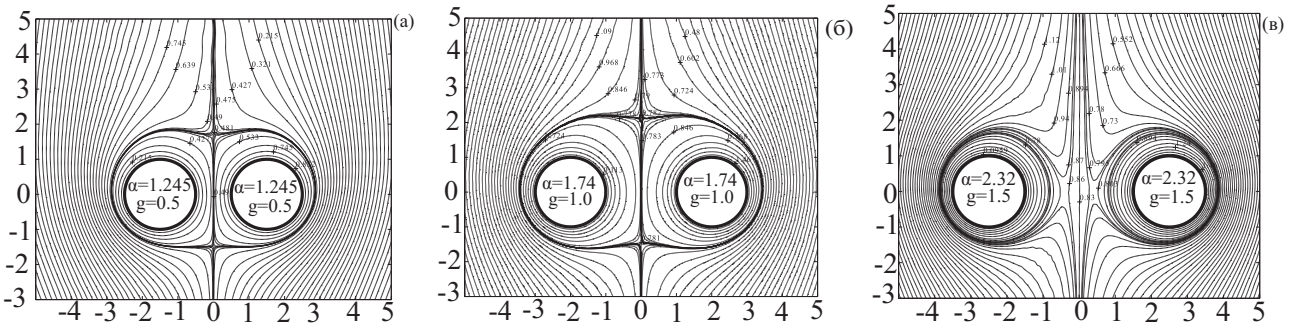

Рис. 2. Линии тока течения вокруг двух круглых цилиндров при $Re = 20$, $\alpha = \alpha_{crit}$ и (а) – $g = 0,5$; $\alpha_{crit} = 1,245$; (б) – $g = 1,0$; $\alpha_{crit} = 1,74$; (в) – $g = 1,5$; $\alpha_{crit} = 2,32$ (самодвижение).

и левый цилиндры, соответственно. Силы со стороны жидкости распределены таким образом, что подъемная сила в направлении оси x на объединенное тело, состоящее их двух цилиндров, равна нулю: $C_{L_1} + C_{L_2} \equiv 0$. Третья колонка Таблицы 1 показывает, что коэффициент сопротивления уменьшается с увеличением α. Для $\alpha_{crit} \approx 1,65$ ($Re = 10$), $\alpha_{crit} \approx 1,74$ ($Re = 20$) и $\alpha_{crit} \approx 1,755$ ($Re = 40$) сила сопротивления становится нулевой. Этот случай соответствует самодвижению цилиндров как комбинированного тела. Рисунок 2 показывает структуру линий тока для $Re = 20, \alpha = \alpha_{crit}$ (самодвижение) и для $g = 0,5; 1,0$ и $1,5$.

Таблица 1. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы для течения вокруг двух вращающихся цилиндров при $Re = 10, 20$ и 40; зазор $g = 1$

α	Re	C_D	C_{D_p}	C_{D_f}	$C_{L_{1,2}}$	$C_{L_{p_{1,2}}}$	$C_{L_{f_{1,2}}}$
	10	1,942	1,219	0,723	$\pm 2,181$	$\pm 1,623$	$\pm 0,558$
0,5	20	1,485	0,919	0,566	$\pm 1,721$	$\pm 1,382$	$\pm 0,339$
	40	1,129	0,727	0,402	$\pm 1,457$	$\pm 1,245$	$\pm 0,212$
	10	0,247	0,440	-0,193	$\pm 3,544$	$\pm 2,811$	$\pm 0,733$
1,5	20	0,260	0,151	0,109	$\pm 3,645$	$\pm 3,065$	$\pm 0,580$
	40	0,222	0,035	0,187	$\pm 3,482$	$\pm 3,078$	$\pm 0,404$
1,65	10	0,004	0,335	-0,331	$\pm 3,633$	$\pm 2,894$	$\pm 0,739$
1,74	20	-0,001	-0,004	0,003	$\pm 3,958$	$\pm 3,345$	$\pm 0,613$
1,755	40	0,000	-0,141	0,141	$\pm 3,971$	$\pm 3,520$	$\pm 0,451$
	10	-1,199	-0,076	-1,123	$\pm 3,415$	$\pm 2,767$	$\pm 0,648$
2,5	20	-0,685	-0,330	-0,355	$\pm 4,214$	$\pm 3,608$	$\pm 0,606$
	40	-0,502	-0,504	0,002	$\pm 4,988$	$\pm 4,461$	$\pm 0,527$

В **п.1.3** первой главы рассматривается задача обтекания тора, вращающегося вокруг его центральной линии. В **п.1.3.1** приведен обзор работ по обтеканию тора. Течение вокруг тороидального тела, помещенного нормально к направлению набегающего потока, привлекательно в связи с тем, что при малом аспектном отношении тор является плохо обтекаемым телом (подобным сфере), а при большом аспектном отношении локально соответствует

течению вокруг круглого бесконечного цилиндра (аспектное отношение определяется как отношение расстояния от центра образующей окружности до оси вращения к радиусу образующей окружности (см. Рисунок 3)).

Обзор работ демонстрирует, что основные исследования проведены в приближении Стокса. Аналитические и численные решения задачи о течении Стокса около вращающегося тора показывают, что вращающийся тор может передвигаться поступательно. В **п.1.3.2 и п.1.3.3** представлена математическая постановка и подробно описан алгоритм решения задачи. Используется тороидальная система координат. Алгоритм основан на адаптации метода расщепления по физическим процессам. Рассматривается только осесимметричное обтекание.

В **п.1.3.4** приведены результаты тестирования. В первую очередь, характеристики обтекания стационарного тора сравниваются с результатами расчетов G.J. Sheard *и др.* (J. Fluid Mech., 2005, vol. 492). В Таблице 2 собраны вычисленные параметры и их сравнение с результатами G.J. Sheard *и др.*. Сравнения, в основном, проводились по коэффициенту сопротивления. Результаты тестовых расчетов на последовательности сеток показали, что скорость сходимости (вычисленная для C_D при $Re = 20$, $Ar = 20$) равнялась 2,024, что соответствует предсказанной теоретически. На втором этапе ха-

Таблица 2. Сравнение коэффициента сопротивления с данными G.J. Sheard *и др.* (2005)

Re	Ar	наст.			Sheard†(2005)		
		C_D	C_{D_p}	C_{D_f}	C_D	C_{D_p}	C_{D_f}
20	2	1,741	1,080	0,661	1,721	0,988	0,733
	3	1,866	1,111	0,755	1,866	1,087	0,779
	5	2,029	1,211	0,818	1,971	1,128	0,843
	10	2,065	1,233	0,832	2,082	1,221	0,861
	20	2,120	1,269	0,851	2,120	1,238	0,872
40	2	1,324	0,860	0,464	1,302	0,831	0,471
	3	1,400	0,899	0,501	1,407	0,907	0,500
	5	1,458	0,941	0,517	1,465	0,936	0,529
	10	1,557	1,014	0,543	1,564	1,006	0,558
	20	1,579	1,031	0,548	1,581	1,023	0,558

†Данные получены оцифровыванием графиков

рактеристики течения вокруг тора, вращающегося около его средней линии (при большом аспектном отношении $Ar = 20$), сравниваются с течением жидкости вокруг одного вращающегося круглого цилиндра и с течением вокруг пары вращающихся цилиндров с большим зазором между их центрами.

В **п.1.4.5** обсуждаются особенности течения вокруг тора, вращающегося вокруг его средней линии. Рассмотрен диапазон чисел Рейнольдса $Re = 20; 30; 40$ и скоростей вращения $-5,5 \leq \alpha \leq 2,5$ для аспектных отношений $1,4 \leq Ar \leq 5$. Тор помещен в однородный поток, движущийся со скоростью U_∞ как показано на Рисунке 3. Положительное направление угловой

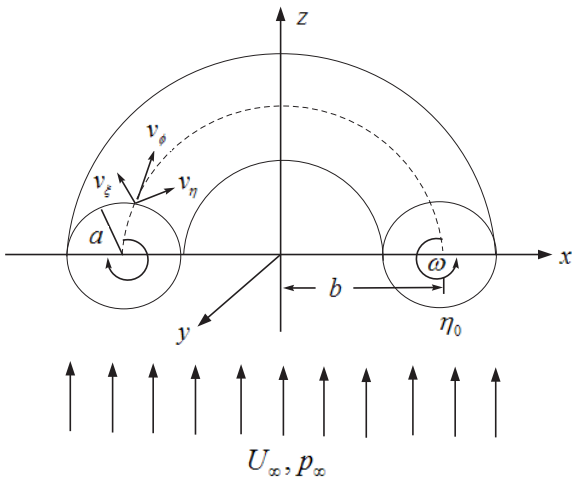

Рис. 3. Схема течения

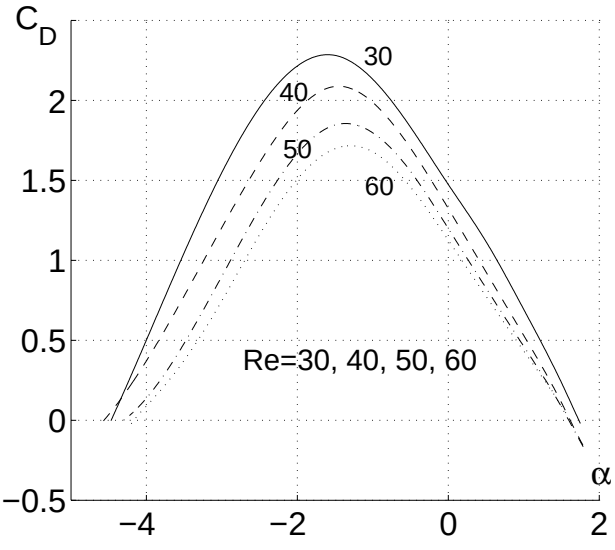

Рис. 4. Зависимость C_D от α для $Ar = 2$, $Re = 30;\ 40;\ 50;\ 60$

скорости вращающегося тора таково, что вращающаяся поверхность ускоряет однородный поток на внешней поверхности кольца из-за условия прилипания. На внутренней поверхности кольца положительная скорость вращения направлена против направления набегающего потока. Рисунок 4 демонстрирует зависимость полного коэффициента сопротивления C_D от скорости вращения α для фиксированного аспектного отношения $Ar = 2$ и четырех чисел Рейнольдса $Re = 30; 40; 50$ и 60. Графики $C_D = C_D(\alpha)$ имеют колоколообразную форму. Максимальные значения C_D наблюдаются в интервале $-1,8 < \alpha < -1,2$. Значение экстремума уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Когда положительная скорость вращения (α^+) увеличивается от 0 до 2,0, полный коэффициент сопротивления C_D убывает практически линейно. Интересно отметить, что величина C_D демонстрирует немонотонное поведение при возрастании модуля отрицательной скорости вращения $(\mid \alpha^- \mid)$. Коэффициент сопротивления C_D обращается в нуль для двух скоростей вращения поверхности. Таблица 3 суммирует результаты расчетов режима самодвижения и показывает α^-_{crit} и α^+_{crit} (скорости вращения, которые соответствуют самодвижению тора) для нескольких аспектных отношений и чисел Рейнольдса. Абсолютная величина $|\alpha^-_{crit}|$ возрастает с увеличивающимся аспектным отношении при фиксированном числе Рейнольдса. При фиксированном аспектном отношением $|\alpha^-_{crit}|$ убывает с увеличением числа Рейнольдса.

Рисунок 5 показывает структуру течения и направления вектора скорости для случая $Ar = 2$; $Re = 40$ и для последовательности скоростей вращения $\alpha \in [-4,57; 1,61]$. Ввиду осевой симметрии структуры течения

представлены в одном из поперечных сечений тора.

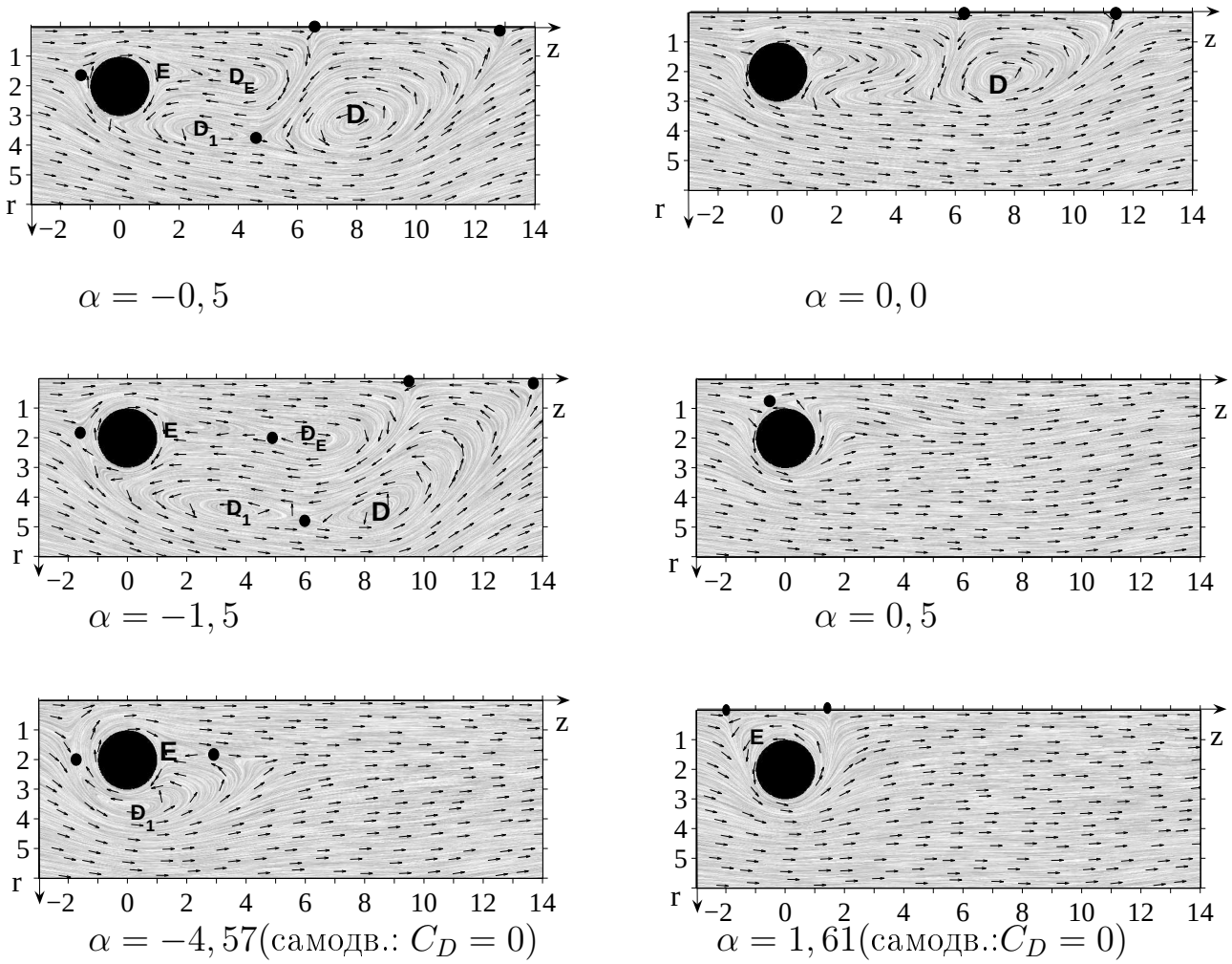

Рис. 5. Линии тока течения вокруг вращающегося тора при $Re = 40$ и $Ar = 2$

Зависимость обезразмеренной скорости поступательного самодвижения $U_\infty/a\omega = \dfrac{1}{\alpha_{crit}(Re, Ar)}$ от аспектного отношения Ar для трех чисел Рейнольдса показана на Рисунке 6. Скорость поступательного движения убывает с возрастанием Ar. Для фиксированного аспектного отношения поступательная скорость увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Сплошные линии показывают поступательную скорость первого типа, а пунктирные линии демонстрируют поступательную скорость, соответствующую отрицательному

Таблица 3. Значения $\alpha^{\pm}_{crit}$ для $Re = 30;\ 40;\ 50$, $Ar = 2; 3$ и 5

Re	30			40			50		
Ar	2	3	5	2	3	5	2	3	5
α^{-}_{crit}	-4,47	-5,46	-5,60	-4,57	-5,14	-5,35	-4,3	-5,05	-5,25
α^{+}_{crit}	1,66	2,07	2,43	1,61	2,00	2,37	1,60	2,02	2,42

вращению. Например, в случае $Ar = 2$ поступательная скорость самодвижения тора составляет приблизительно 60% от положительной скорости вращающейся поверхности. В случае отрицательного вращения поступательная скорость самодвижения тора составляет только 20% от скорости поверхности тора.

Во второй главе изучается динамика турбулентного следа за буксируемым телом в стратифицированной среде. Результаты второй главы опубликованы в работах [6–21].

Во **Введении** ко второй главе приведен обзор работ по изучению турбулентных следов в стратифицированных жидкостях. Судя по известным публикациям, исследования таких течений проводились в ИГиЛ СО РАН, ИВМиМГ СО РАН (ВЦ СО АН СССР), ИТПМ им. С.А.Христиановича СО РАН, ИТФ им. С.С. Кутателадзе СО РАН, ИВТ СО РАН, ИПМех им. А.Ю.Ишлинского РАН, ВЦ РАН, Институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Институте автоматизации проектирования РАН, Тихоокеанском океанологическом институте ДВО РАН, Институте прикладной физики РАН, Московском физико – техническом институте и других отечественных организациях, а также за рубежом (Великобритания, США, Франция, Белоруссия, Украина, Казахстан).

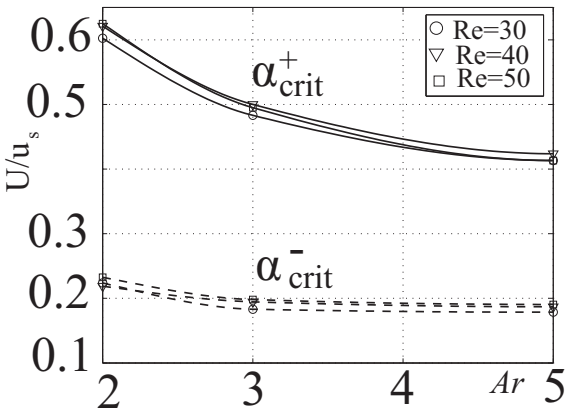

Рис. 6. Обезразмеренная поступательная скорость вращающегося тора в зависимости от аспектного отношения

Анализ известных работ позволил выделить ряд малоизученных вопросов в области численного моделирования турбулентных следов за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Отмечена недостаточная полнота численных моделей динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. В частности, отсутствует подробный анализ применимости алгебраических моделей турбулентных напряжений и потоков, а также более общей модели, включающей в себя дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. Отсутствует анализ автомодельного вырождения следов за буксируемыми телами в пассивно стратифицированной среде. Недостаточно полным является сопоставление параметров турбулентных следов и генерируемых ими внутренних волн за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде. Отсутствует анализ анизотропного вырождения турбулентности в дальнем турбулентном следе за буксируемым телом

вращения в линейно стратифицированной среде. Представляет интерес численное моделирование турбулентного следа с малым суммарным избыточным импульсом в линейно стратифицированной среде. Практически неизученной является динамика пассивного скаляра в турбулентных следах за самодвижущимся и буксируемым телами в линейно стратифицированной среде.

Раздел **п.2.2** посвящен построению усовершенствованных численных моделей турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде и изложению результатов численного моделирования. Ма-

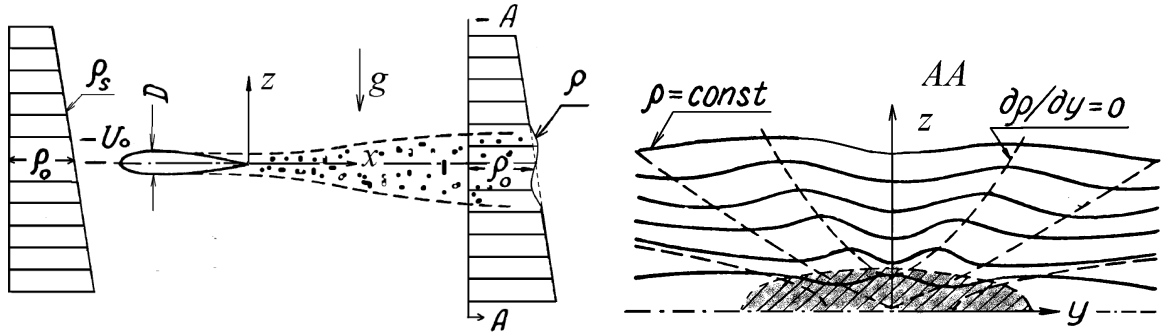

Рис. 7. Схема течения и основные обозначения

тематическая постановка задачи о динамике дальнего турбулентного следа основана на трехмерной параболизованной системе осредненных уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска

$$U_0\frac{\partial U_d}{\partial x}+V\frac{\partial U_d}{\partial y}+W\frac{\partial U_d}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left\langle u'v'\right\rangle+\frac{\partial}{\partial z}\left\langle u'w'\right\rangle, \tag{2}$$

$$U_0\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left\langle p_1\right\rangle}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle v'^2\right\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\left\langle v'w'\right\rangle, \tag{3}$$

$$U_0\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\left\langle p_1\right\rangle}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle v'w'\right\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\left\langle w'^2\right\rangle-g\frac{\left\langle\rho_1\right\rangle}{\rho_0}, \tag{4}$$

$$U_0\frac{\partial\left\langle\rho_1\right\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\left\langle\rho_1\right\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\left\langle\rho_1\right\rangle}{\partial z}+W\frac{d\rho_s}{dz}=-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle v'\rho'\right\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\left\langle w'\rho'\right\rangle, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial U_d}{\partial x}. \tag{6}$$

В уравнениях (2) – (6) величина $U_d=U_0-U$ — дефект осредненной продольной компоненты скорости; U,V,W — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x,y,z соответственно; $\langle p_1\rangle$ — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(z)$; U_0 — скорость набегающего невозмущенного потока; g — ускорение силы тяжести, $\langle\rho_1\rangle$ — осредненный дефект плотности: $\rho_1=\rho-\rho_s$, $\rho_s=\rho_s(z)=\rho_0(1-az), a=const>0$ — плотность невозмущенной жидкости; штрихом обозначены пульсационные компоненты, символ $\langle\ \rangle$ — осреднение. В уравнениях (2) – (5) отброшены в предположении малости члены с молекулярной вязкостью и

диффузией; отброшены также производные в осевом направлении x в правых частях. Схема течения и основные обозначения показаны на Рисунке 7. Система уравнений (2) – (6) незамкнута. Рассмотрены пять полуэмпирических моделей турбулентности, каждая из которых вместе с осредненными уравнениями движения и скорости диссипации образует замкнутую модель течения. В Модели 1 величины компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_i' u_j' \rangle$ (кроме $\langle u_2' u_3' \rangle = \langle v' w' \rangle$) аппроксимируются "изотропными" алгебраическими соотношениями; величины турбулентных потоков $\langle u_i' \rho' \rangle$ и дисперсии флуктуаций плотности $\langle \rho'^2 \rangle$ — с применением локально–равновесного приближения (Rodi W., 1987). Основное отличие Модели 2 от Модели 1 заключается в использовании для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений (вместо "изотропных" соотношений) упрощенного локально-равновесного приближения. В Модели 3 (в отличие от Модели 1) используются упрощенные представления коэффициентов турбулентной вязкости. В остальном Модель 3 аналогична Модели 1. В моделях 1-3 значения энергии турбулентности определяются путем решения уравнения баланса энергии турбулентности. В Модели 4 величины $\langle u_i'^2 \rangle$ $(i = 1, 2, 3)$ вычисляются путем решения соответствующих дифференциальных уравнений переноса с упрощенными представлениями коэффициентов турбулентной вязкости. Наконец, Модель 5 включает в себя дифференциальное уравнение переноса тройной корреляции $\langle w'^3 \rangle$. Детальный анализ применимости Моделей 1 – 4 (и близкой к Модели 5) к численному моделированию динамики безымпульсного турбулентного следа осуществлен в работах О.Ф. Воропаевой, Б.Б.Илюшина, Г.Г. Черных. Однако турбулентные следы за буксируемыми телами даже в однородной жидкости существенно отличаются от следов за самодвижущимися телами. Поэтому вопрос о применимости Моделей 1 — 5 к расчету турбулентных следов за буксируемыми телами в линейно стратифицированной среде может быть решен после проведения детальных численных экспериментов.

В **п.2.3** подробно представлен алгоритм численного решения. Маршевая переменная x (в осевом направлении) в уравнениях играет роль времени. На расстоянии $x = x_0$ от тела задаются начальные условия, согласующиеся с экспериментальными данными об эволюции турбулентного следа в однородной жидкости. Для Моделей 4 и 5 дополнительно задавались начальные условия для нормальных рейнольдсовых напряжений. В Модели 5 задавались также величины $\langle w'^3 \rangle$. Нулевые краевые условия, соответствующие $r = y^2 + z^2 \to \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника. Из соображений симметрии решение отыскивается лишь в первом квадранте плоскости (y, z). На осях симметрии задавались соответствующие условия симметрии. Переменные задачи обезразмериваются с применением масштаба длины D — диаметра тела и масштаба U_0 — скорости невозмущенного потока. При этом в обезразмеренных уравнениях вместо g появится

величина $4\pi^2/F_d^2$, где F_d — плотностное число Фруда, определяемое равенством $F_d = \frac{U_0 T}{D}$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}$, $a = -\left(\frac{1}{\rho_0}\right)\frac{d\rho_s}{dz}$. Для удобства интерпретации результатов расчетов используется время t, связанное с расстоянием от тела соотношением: $t = \frac{x}{U_0}$, $t^* = \frac{t}{T} = \frac{xD}{U_0 DT} = \frac{x^*}{F_d}$, где T — период Вяйсяля — Брента, определенный выше.

Алгоритм решения задачи сводится к последовательному интегрированию уравнений на каждом слое по x, играющем роль временного слоя. Последовательность вычислений носит условный характер. Во-первых, отыскиваются значения дефекта осевой компоненты скорости $U_{d\,i,j}^{n+1}$ в узлах основной сетки. Все остальные неизвестные берутся с предыдущего слоя n. Для определения компонент вектора скорости V, W (определяются в узлах сдвинутой сетки) и дефекта давления $\langle p_1 \rangle$ используются уравнения переноса этих величин и уравнение несжимаемости (6), которые интегрируются с применением явного метода расщепления по физическим процессам. Далее с применением неявного метода расщепления по пространственным переменным последовательно определяются сеточные функции $\langle \rho_1 \rangle_{i,j}^{n+1}$, $e_{i,j}^{n+1}$, $\varepsilon_{i,j}^{n+1}$ и др. Для конвективных членов применяется центрально-разностные аппроксимации. Вычисленные на очередном этапе алгоритма переменные участвуют в определении неизвестных на последующих этапах. Конечно-разностные уравнения решаются поочередно с использованием метода прогонки.

В **п.2.4** приведены результаты тестовых расчетов и сопоставления моделей. Результаты численных экспериментов на последовательности сеток сопоставлялись с экспериментальными данными Линя и Пао о вырождении турбулентного следа в однородной и линейно стратифицированной средах за самодвижущимся и буксируемым телами и известными результатами расчетов. Рассчитанные с применением Моделей 1 — 5 осевые значения энергии турбулентности и дефекта продольной компоненты вектора скорости для турбулентного следа за буксируемым и самодвижущимся телами достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными Линя и Пао и известными результатами численных экспериментов. Характерные горизонтальный и вертикальный размеры турбулентного следа за буксируемым телом в однородной и стратифицированной средах на Рисунке 8 сопоставляются с экспериментальными и расчетными данными. Разброс экспериментальных данных весьма велик. Согласие рассчитанных величин с экспериментальными данными можно считать удовлетворительным. Все модели дают удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными. Достаточно хорошее соответствие (для моделей 4,5) получено и для вырождения интенсивностей горизонтальной и вертикальной турбулентных флуктуаций поля скорости в безымпульсном следе (экспериментальные данные по следу за буксируемым телом отсутствуют). Математические модели турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде характеризуются так-

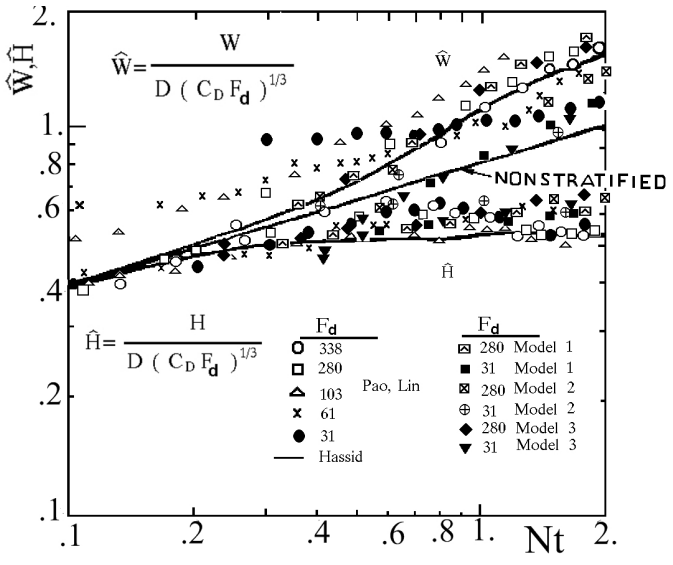

Рис. 8. Сопоставление характерных размеров (горизонтального $\widehat{W}$ и вертикального $\widehat{H}$) турбулентного следа за буксируемым телом в однородной и стратифицированной средах с экспериментальными данными и расчетами

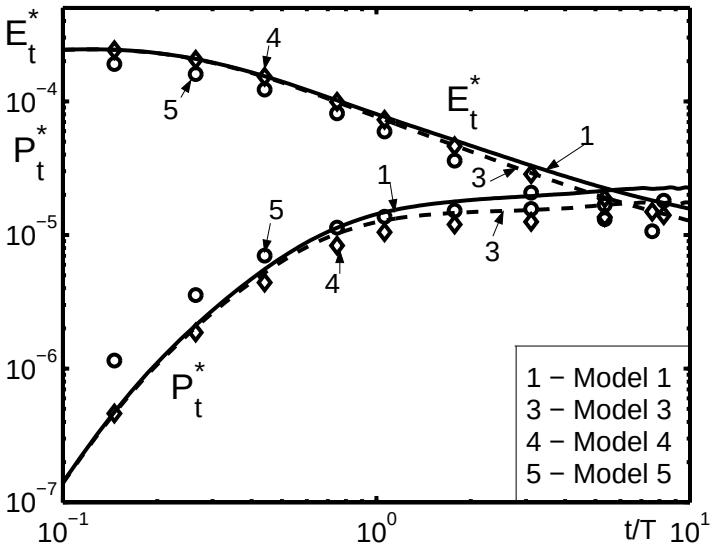

Рис. 9. Изменение во времени суммарных энергий турбулентности $E_t^*(t)$ и внутренних волн $P_t^*(t)$ для следа за буксируемым телом. $E_t^*(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^* dy^* dz^*$, $P_t^*(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{V^{*2} + W^{*2}}{2} + \frac{4\pi^2}{{F_d}^2} \frac{\langle \rho_1 \rangle^{*2}}{2} \right) dy^* dz^*$

же Рисунком 9, на котором представлены суммарные (по поперечному сечению следа) значения энергии турбулентности и внутренних волн Расчеты показали, что Модель 2 при больших значениях времени приводит к физически неправдоподобному поведению суммарной энергии турбулентности: при $t \geq 5T$ величина E_t^* перестает убывать. Поведение кривых на Рисунке 9 свидетельствует о достаточно слабой зависимости интегральных характеристик следа от применяемых моделей турбулентности.

В **п.2.4.2** изучается динамика дальнего турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной жидкости в сопоставлении с динамикой безимпульсного следа. В этом случае задача имеет автомодельное решение. Анализировалось изменение осевых значений дефекта продольной компоненты скорости, энергии турбулентности $e_0(x)$, характерной ширины следа $L_{1/2}$ в однородной жидкости в зависимости от расстояния от тела в безымпульсном следе и следе за буксируемым телом. Получены автомодельные распределения дефекта продольной компоненты скорости, энергии турбулентности, дефекта осредненной плотности и дисперсии флуктуаций плотности. Законы автомодельного вырождения в случае самодвижущегося и буксируемого тела отличаются весьма значительно, что согласуется с известными теоретическими представлениями и экспериментальными данными о динами-

ке турбулентных следов в однородной жидкости.

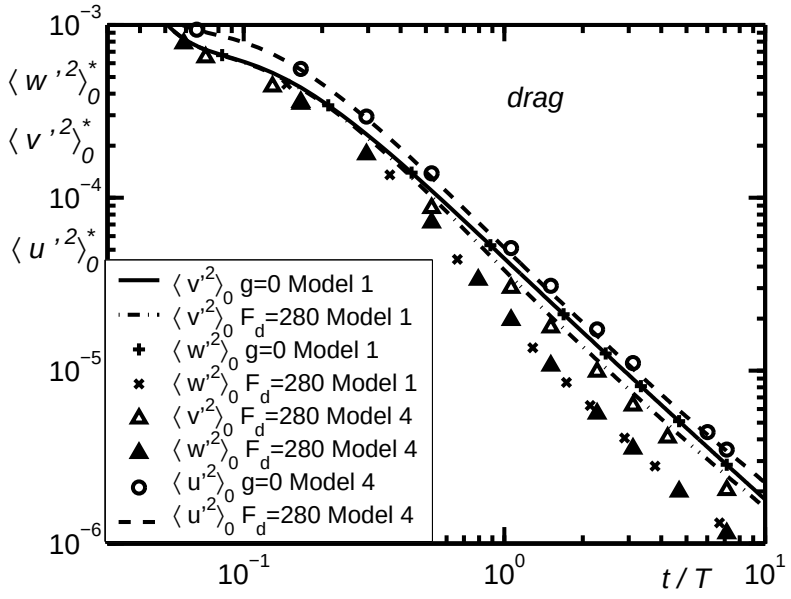

Рис. 10. Поведение осевых значений дисперсий турбулентных флуктуаций продольной и вертикальной компонент скорости для следа за буксируемым телом

В **п.2.4.3** представлены результаты расчетов динамики турбулентных следов в линейно стратифицированной среде. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом характеризуется существенно большими геометрическими размерами и более медленным убыванием энергии турбулентности в сравнении со следом за самодвижушимся телом. Последнее обусловлено тем, что в турбулентном следе за буксируемым телом имеется порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненной продольной компоненты скорости (в безымпульсном следе вклад порождения за счет градиентов осредненной продольной компоненты скорости несущественен). Известно (Lin & Pao, 1979), что течение в безымпульсном следе в линейно стратифицированной среде характеризуется анизотропным вырождением интенсивностей турбулентных флуктуаций продольной и вертикальной компонент скорости. В настоящих численных экспериментах анизотропия вырождения в следе за буксируемым телом иллюстрируется Рисунком 10.

В **п.2.5** представлены результаты численного моделирования динамики внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за буксируемым телом в устойчиво стратифицированной жидкости. Рассмотрены случаи линейного и нелинейного распределений плотности невозмущенной жидкости по глубине. Динамика генерируемых турбулентными следами внутренних волн иллюстрируется Рисунком 11, на котором представлено изменение во времени изолиний плотности $\widetilde{\rho}_0 - \langle\rho\rangle^* = \widetilde{\rho}_0 - \rho_s^*(z_c^*)$, $\widetilde{\rho}_0 = 1/(aD)$. Для примера рассмотрены два значения z_c. Полученные данные показывают, что внутренние волны, генерируемые следом за буксируемым телом, имеют существенно большую амплитуду, чем волны, генерируемые следом за самодвижущимся телом. Полученный результат допускает достаточно простое физическое объяснение. Эволюция осесимметричных турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимся телами в однородной жидкости отличается весьма существенно. Для автомодельного следа за буксируемым телом имеем:

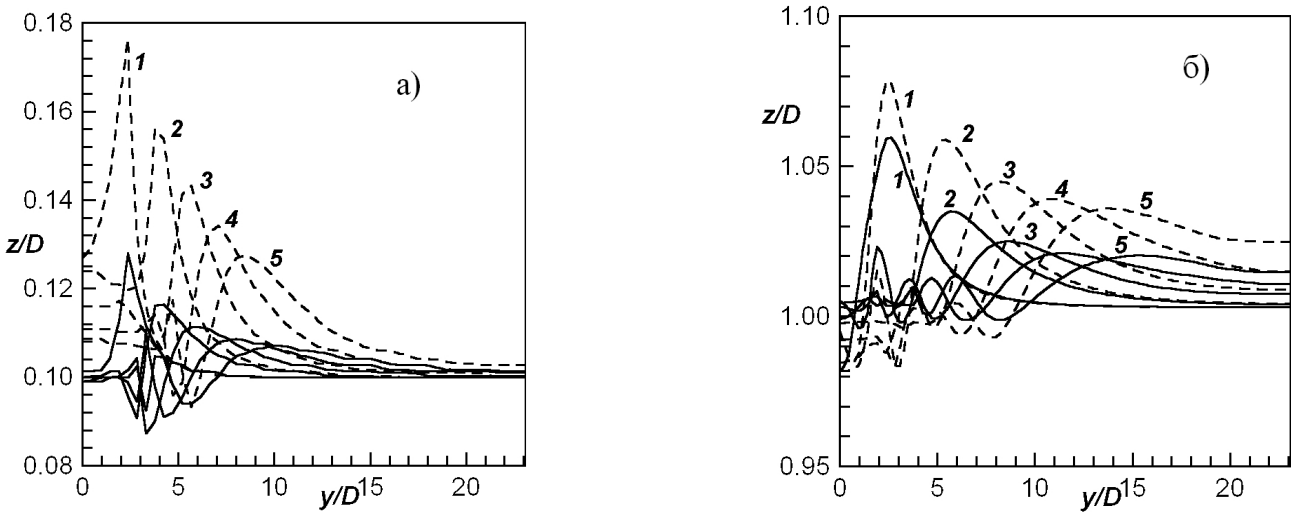

Рис. 11. Динамика во времени изолиний $\widetilde{\rho_0} - \langle\rho\rangle^* = \widetilde{\rho_0} - \rho_s^*(z_c^*)$ (линейная стратификация): *а)* $z_c^* = z_c/D = 0,1$; в) $z_c^* = z_c/D = 1$. Кривые $1-5$ соответствуют моментам времени $t/T = 1;2;3;4;5$; сплошные линии – самодвижущееся тело, штриховые – буксируемое тело

$e_0(x) = e(x,0,0) \sim x^{-4/3}$, $U_d(x,0,0) \sim x^{-2/3}$, $l(x) \sim x^{1/3}$ ($l(x)$ – характерный размер следа). Автомодельный след за самодвижущимся телом может быть охарактеризован законами вырождения: $e_0(x) \sim x^{-1.5}$, $U_d(x,0,0) \sim x^{-1.5}$, $l(x) \sim x^{1/4}$. Такое различие в поведении характеристик следов обусловлено их существенно разной структурой. В следе за буксируемым телом (как уже отмечалось выше) порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного течения играет важную роль; в безымпульсном следе уже на расстоянии около десяти диаметров реализуется практически бессдвиговый режим течения. В результате в стратифицированной жидкости турбулентность в следе за буксируемым телом приводит к перемешиванию большей массы жидкости. Воздействие силы тяжести вызывает при этом генерацию внутренних волн большей амплитуды.

В **п.2.6** диссертации изложены результаты численного моделирования турбулентного следа с малым суммарным избыточным импульсом в линейно стратифицированной среде. Для описания течения привлекается Модель 1 (с алгебраическими представлениями рейнольдсовых напряжений и потоков). В **п.2.6.1** приведена математическая постановка задачи. При моделировании безымпульсного следа начальные условия при $x = x_0$ задавались в виде функций, согласованных с данными лабораторных экспериментов Линя и Пао. В случае, когда тяга тела не равна его избыточному импульсу, возникает разбалансировка импульса. В численных экспериментах разбалансировка достигалась путем сдвига начальных данных для дефекта осредненной скорости безымпульсного следа на постоянную величину α, которая выбирается из условия, что суммарный избыточный импульс составляет до $\pm 10\%$ от величины импульса в следе за буксируемым телом.

В **п.2.6.2** показано,что малый ненулевой суммарный избыточный импульс сказывается в большей степени на поведении дефекта продольной компоненты скорости. Характеристики турбулентности слабо зависят от малого ненулевого суммарного избыточного импульса и близки к характеристикам безымпульсного турбулентного следа (для рассмотренного интервала значений $t/T \leq 10$). В **п.2.6.3** на основе проведенных расчетов показано, что внутренние волны, генерируемые следом с малым суммарным избыточным импульсом, незначительно отличаются от индуцируемых безымпульсным следом.

В **п.2.7** построена численная модель динамики пассивного скаляра в турбулентных следах за телами, движущимися в однородной и линейно стратифицированной средах. Постановка задачи и алгоритм решения излагаются в **п.2.7.1**. В дополнение к системе осредненных уравнений (в данном разделе использованы Модели 1 и 4) привлекаются уравнения переноса осредненной концентрации пассивного скаляра Θ и дисперсии флуктуаций концентрации пассивного скаляра $\langle\theta'^2\rangle$.

$$U_0\frac{\partial\Theta}{\partial x}+V\frac{\partial\Theta}{\partial y}+W\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}K_{\Theta y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_{\Theta z}\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

$$U_0\frac{\partial\langle\theta'^2\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle\theta'^2\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle\theta'^2\rangle}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}K_{1\Theta y}\frac{\partial\langle\theta'^2\rangle}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_{1\Theta z}\frac{\partial\langle\theta'^2\rangle}{\partial z}-$$

$$-2\langle v'\theta'\rangle\frac{\partial\Theta}{\partial y}-2\langle w'\theta'\rangle\frac{\partial\Theta}{\partial z}-N_\Theta.$$

Алгоритм решения задачи аналогичен приведенному в п.2.3. Маршевая переменная x в уравнениях играет роль времени. На расстоянии $x=x_0$ от тела задаются следующие начальные условия:

$$\Theta(x_0,y,z)=\Phi_4(r),\ \langle\theta'^2\rangle(x_0,y,z)=\Phi_5(r),\ r^2=y^2+z^2,\ 0<r<\infty.$$

Функции $\Phi_4(r),\Phi_5(r)$ — некоторые финитные колоколообразные функции. При $r^2=y^2+z^2\to\infty$ ставились условия невозмущенного потока: $\Theta=\langle\theta'^2\rangle=0,\quad x\geq x_0$. На осях симметрии ставились условия симметрии.

В **п.2.7.2** приводятся результаты расчетов динамики пассивного скаляра в турбулентных следах в однородной и линейно стратифицированной средах. Результаты расчетов в однородной жидкости демонстрируют автомодельное поведение характеристик пассивного скаляра на больших расстояниях от тела. Полученные в численных экспериментах законы автомодельного вырождения характеристик пассивной примеси для безымпульсного следа и следа за буксируемым телом различаются весьма существенно и согласуются с результатами асимптотического анализа других авторов. Результаты расчетов в линейно стратифицированной среде иллюстрируют воздействие силы тяжести. Осуществлено моделирование полей пассивного скаляра по плотностному числу Фруда. В **п.2.7.3** обоснована применимость упрощенной диффузи-

онной модели переноса характеристик пассивного скаляра в дальних турбулентных следах в линейно стратифицированной среде.

В **Третьей главе** разработаны и численно протестированы алгоритм и комплекс программ, позволяющие моделировать вращательно-симметричные течения с использованием новой формулировки (предложенной С.Н. Аристовым и В.В. Пухначевым – Доклады РАН, 2004, 49 (2)) уравнений Навье – Стокса. Результаты этой главы опубликованы в работах [22, 23].

Раздел **п.3.1** посвящен построению численной модели с использованием новой формы уравнений для закрученно-симметричных течений. Новая неизвестная функция Φ связана с давлением и используется для получения системы двух связных уравнений для функции тока и новой неизвестной функции. Эта система уравнений также связана с уравнением для азимутальной компоненты скорости. В цилиндрический системе координат (r, θ, z) новая форма уравнений Навье – Стокса имеет вид:

$$J_t - \frac{1}{r}\psi_z J_r + \frac{1}{r}\psi_r J_z = \nu E J, \quad \psi_t - \frac{1}{r}\psi_r \psi_z + \Phi_z = \nu E \psi,$$

$$E\Phi = \frac{1}{r^2}\left(J^2 + \psi_z^2\right) + \frac{2}{r}\psi_r E\psi, \qquad p = -\frac{1}{r^2}\psi_r^2 + \frac{1}{r}\Phi_r, \quad E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Здесь $J = rv$; функции тока ψ определена соотношениями $u = -\frac{1}{r}\psi_z, \quad w = \frac{1}{r}\psi_r$, где u, v и w радиальная, азимутальная и осевая компоненты вектора скорости; p – модифицированное давление а ν – коэффициент кинематической вязкости.

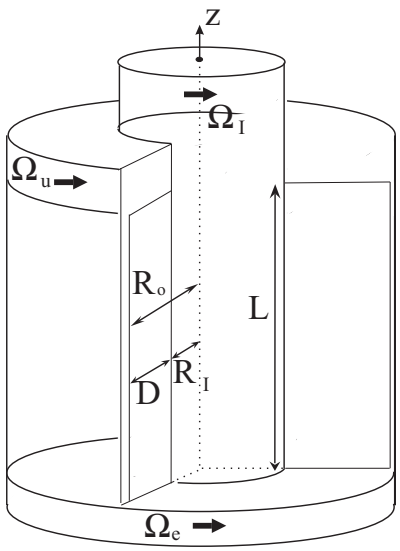

Рис. 12. Схема области течения

В **п.3.1.1** описаны разностная схема и алгоритм расчета течения Тэйлора – Куэтта, основанные на новой форме уравнений Навье – Стокса. Схема геометрии течения показана на Рисунке 12; R_i - радиус внутреннего цилиндра, R_o - радиус внешнего цилиндра, L - длина осевой линии (высота цилиндра), Ω_i – угловая скорость внутреннего цилиндра, Ω_e угловая скорость вращения нижней крышки и Ω_u – угловая скорость вращения верхней крышки. Если $\Omega_u = 0$ то верхняя крышка покоится. В случае вращения верхней крышки мы всегда предполагаем, что $\Omega_u = \Omega_e$. Безразмерные параметры определены следующим образом: $\mathrm{Re} = \dfrac{DR_i\Omega_i}{\nu}, \quad \Omega = \dfrac{\Omega_e}{\Omega_i}, \quad \Gamma = \dfrac{L}{D}, \quad \eta = \dfrac{R_o}{R_i}, \quad D = R_o - R_i$, где Re – число Рейнольдса на основе угловой скорости

внутреннего цилиндра.

Уравнения аппроксимируются с использованием схемы Кранка-Николсон. Искомые функции разнесены во времени, что позволяет эффективно отцепить уравнение для азимутальной компоненты скорости J от уравнений для вторичного потока в поперечном сечении. Существенным моментом предложенного алгоритма является то, что уравнения для функции тока ψ и новой неизвестной функции Φ рассматриваются как одна связная система. Такой подход основан на том, что имеется два граничных условия для ψ для системы уравнений относительно функций $\psi - \Phi$. Численное решение получающихся ленточных алгебраических систем находится с использованием стандартных подпрограммы DGBSV и DGBSVX из библиотеки LAPACK.

В **п.3.1.2** новый численный алгоритм применен к закрученно-симметричному течению Тэйлора – Куэтта между концентрическими вращающимися цилиндрами, когда верхняя и нижняя крышки могут вращаться независимо от внутреннего цилиндра, в то время как внешний цилиндр остается в покое. Экспериментальное и численное исследования этого особого случая течения Тэйлора – Куэтта проводилось в работах (T. Mullin и C. Blohm, Phys. Fluids., 13(1) 2001; Lopez *и др.*, J. Fluid Mech., 501, 2004). В одном из лабораторных экспериментов было выбрано значение аспектного отношения $\Gamma = 3,226$, которое определенно находится в области параметров, где ожидается течение с тремя вихрями. Рассмотрено значение $\eta = 2$, когда нижняя крышка и внутренний цилиндр вращаются как единое целое ($\Omega = 1$) в то время как верхняя крышка и внешний цилиндр покоятся. Феноменология этого потока хорошо описывается разработанным численным алгоритмом, включая гистерезис, который имеет место для определенных величин числа Рейнольдса. Разработанный в диссертации алгоритм применялся для вычисления "типичной" последовательности стационарных структур для значений параметров, соответствующих параметрам экспериментальной работы. После установления решения для определенного числа Рейнольдса (например, Re_0), выполнялось увеличение Re согласно формуле $\triangle Re = Re_0(1 - exp(-0,05(n-1)))$, где $n = 1, 2, \ldots n_f$ является временным шагом. Число n_f определяется значением числа Re, которое должно быть достигнуто. Далее, мы продолжаем временные шаги $n > n_f$ с последней величиной числа Рейнольдса до достижения стационарного режима. Таким образом, мы можем продолжать двигаться от одного числа Рейнольдса к другому, не нарушая непрерывности начальных условий. Стационарные состояния, полученные с применением разработанного алгоритма, показаны на Рисунке 13 в виде картины линий тока. Число Рейнольдса медленно увеличивается до значения $Re = 350$, для которого течение изменяется от структуры с тремя вихрями до течения с одним вихрем. Интересной особенностью, которая наблюдается в этой серии вычислений, являются гистерезис. Начиная с $Re = 350$ мы постепенно уменьшаем число Рей-

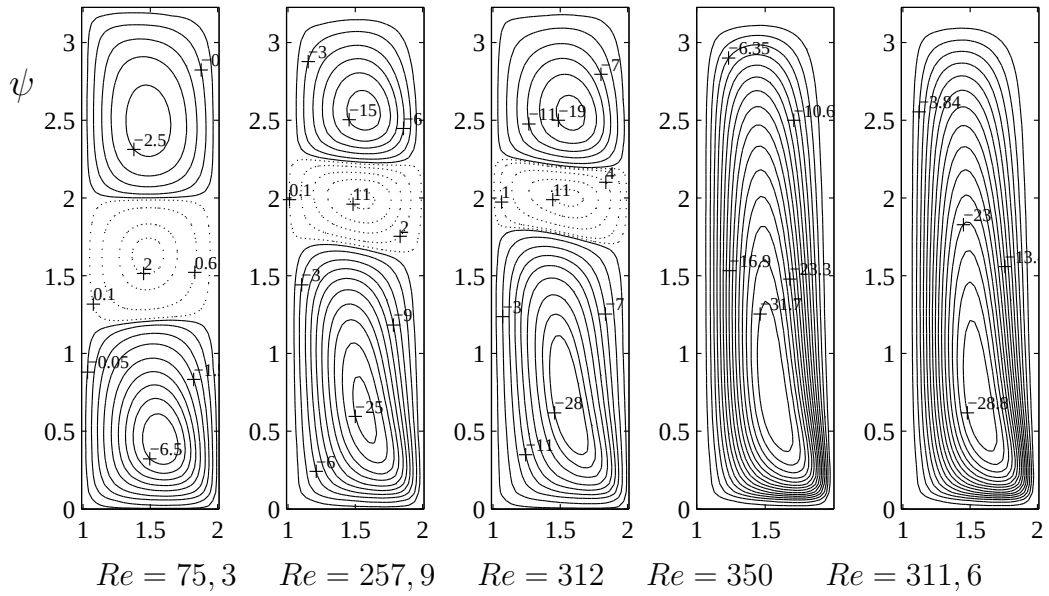

Рис. 13. Последовательность структур течения для различных чисел Re при $\Gamma = 3,226$, $\eta = 2$

нольдса согласно формуле $Re = 350 - 38,4(1 - exp(-0,05(n-1)))$, и находим, что решение с одним вихрем существует в области параметров, где ранее наблюдалось течение с тремя вихрями (см. третью и пятую фигуры на Рисунке. 13). Результаты проведенных численных экспериментов количественно хорошо согласуются с представленными в работе T. Mullin и C. Blohm, в которой результаты численных расчетов сопоставляются с данными экспериментов. Полученные результаты не зависят от применяемой сетки. Предложенный подход может успешно использоваться для подробного исследования других закрученно-симметричных течений вязкой несжимаемой жидкости.

В четвертой главе рассмотрены алгоритмы решения задач “протекания”, в которых давление или полный напор известны на участках границы области течения как часть краевых условий. Основные результаты четвертой главы опубликованы в работах [24–26]. Во **введении** к четвертой главе приведен обзор известных публикаций, рассматривающих задачи протекания.

В **п.4.2**, носящем обзорный характер, приведены математические постановки задачи. Особое внимание уделено корректному заданию граничных условий в задачах протекания. Корректные постановки задач протекания с заданным на части границы давлением (или полным напором) и касательной составляющей вектора скорости подробно рассмотрены в работах В. В. Рагулина, А.В. Кажихова и в монографии С.Н. Антонцева, А.В. Кажихова и В.Н. Монахова (1983). Обычно на твердых стенках выполняются условия прилипания.

В **п. 4.3** подробно обсуждаются детали численного алгоритма решения

задач протекания. Основу алгоритма составляют конечно-объемный проекционный метод решения уравнений Навье – Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Конечно-объемная дискретизация представлена для случая неортогональной четырехугольной сетки с использованием коллокационного расположения переменных. Каждое дискретное неизвестное связано с центром конечного объема. Метод конечных объемов требует, чтобы граничные потоки были известны или были выражены через известные заданные значения и значения во внутренних узлах. В случае, когда вектор скорости задан на твердой непроницаемой границе (условие прилипания), массовые и конвективные потоки всех величин нулевые. Диффузионные потоки в уравнениях импульсов аппроксимируются с использованием известных граничных величин и односторонних конечных разностей для градиентов. Особенности в вычислении массовых, конвективных и диффузионных потоков возникают, когда на части границы задано давление или полный напор. В диссертации разработаны алгоритмы реализации трех видов граничных условий, когда на участках протекания заданы: (а) вектор скорости; (б) касательная составляющая вектора скорости и давление; (в) касательная составляющая вектора скорости и полный напор. Возможно задание различных комбинаций краевых условий на различных участках протекания, т.е. где-то задан вектор скорости (а), где-то давление (б), а где-то полный напор (в). Если тангенциальная компонента вектора скорости и давление (полный напор) заданы на участках протекания, массовые и конвективные потоки через границу неизвестны и должны быть найдены в процессе решения. Уравнение неразрывности, $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, используется на участках границы, где давление известно из граничного условия.

В **п. 4.4** проведено тестирование алгоритма и комплекса программ. В качестве первого теста рассмотрена задача (имеющая аналитическое решение) о течении между параллельными пластинами под действием нестационарного перепада давления. Эта задача позволяет протестировать разработанный подход на предмет правильной передачи временной зависимости расхода от перепада давления. В качестве второго теста рассмотрено течение жидкости через ограниченную область, в котором все линии тока являются круговыми с общей осью симметрии. Стационарное течение возникает вследствие окружного градиента давления в области между двумя концентрическими цилиндрами радиусов r_1 и r_2. Аналитическое решение задачи приведено в тексте диссертации. С использованием точного решения сформулированы различные задачи протекания, которые используются в качестве тестовых для верификации численного алгоритма. Необходимо отметить, что распределение давления не является постоянным на участках протекания и что при численном решении используются уравнения Навье – Стокса в терминах декартовой системы координат и декартовых компонент вектора скорости. Хорошее совпадение численных результатов с точными решениями наблюдалось во всех

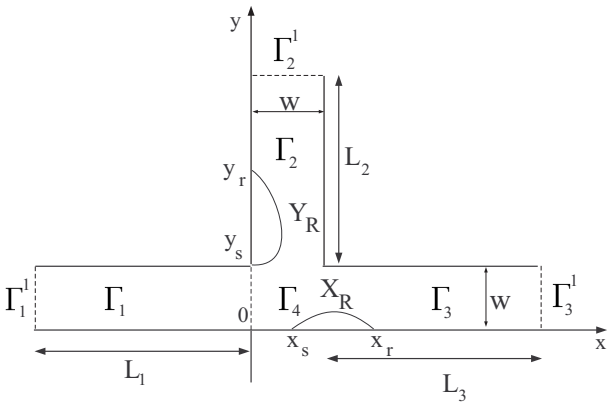

Рис. 14. Схема Т-образного канала, система координат

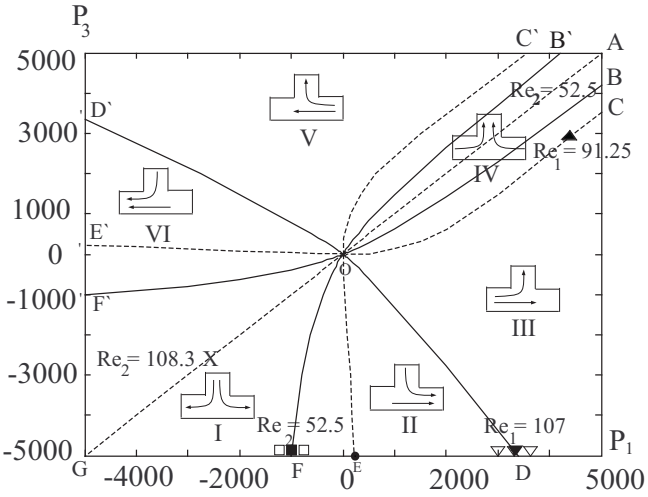

Рис. 15. Диаграмма режимов течения в Т-образном канале

Таблица 4. Значения X_R и Y_R для $Re = 248$ и $\beta_{21} = 0,44$

	Miranda	$h_1 = 1/20$	$h_1 = 1/30$	$h_1 = 1/40$
X_R	2,3324	2,3275	2,3851	2,3858
Y_R	3,8878	3,7636	3,8329	3,8330

рассмотренных вариантах. В качестве третьего теста рассмотрено течение в плоском Т-образном канале. Геометрия течения в Т-образном канале показана на Рисунке 14. Левое ответвление, верхнее ответвление, правое ответвление и область соединения обозначены как Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4. Все ответвления имеют одинаковую ширину w. Определим параметры $\beta_{ij} \equiv Q_i/Q_j$, где Q_i и Q_j обозначают расходы на единицу длины в поперечном направлении через ответвления Γ_i и Γ_j, через которые жидкость втекает или вытекает. Основная рециркуляционная зона в боковом канале начинается в точке $y = y_s$ и заканчивается в точке $y = y_r$. Определим нормализованную длину рециркуляционной зоны как $Y_R = (y_r - y_s)/w$. Длина вторичной рециркуляционной зоны определяется как $X_R = (x_r - x_s)/w$.

Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными (D. Liepsch и др., Jounal of Biomechanics, 15, 1982.) и с численными расчетами (A. I. P. Miranda и др., Int. J. Numer. Meth. Fluids, 57, 2008). Всюду в пределах главного канала предсказания Miranda и результаты рачетов находятся в хорошем согласии друг с другом и с экспериментальными данными Liepsch *и др.* Данные, приведенные в Таблице 4, показывают длины двух отрывных зон X_R and Y_R, полученные в результате численных расчетов на последовательности трех измельчающихся квадратных сеток с $h_1 = 1/20$, $h_2 = 1/30$, и $h_3 = 1/40$. Во второй колонке таблице показаны результаты Miranda, которые рассматриваются как эталонные.

В **п.4.5** четвертой главы разработанный и протестированный комплекс программ используется для построения диаграммы режимов течения в Т-об-

разном канале и для описания стартап (start up) течения в Т-образном канале, возникающего из состояния покоя под действием внезапно приложенных перепадов давления. В **п.4.5.1** рассмотрено стационарное течение обусловленное заданными давлениями p_1, p_2, p_3 на участках границы Γ_1^1, Γ_2^1, Γ_3^1. Схематическая диаграмма режимов течения в $p_1 \; - - \; p_3$ плоскости показана на Рисунке 15 (значение $p_2 = 0$, без ограничения общности). Благодаря симметрии ($L_1 = L_3$), было достаточно провести расчеты только в области, расположенной ниже линии $p_1 = p_3$. Каждый из 6 случаев начинался из состояния покоя. Сплошные линии показывают границы, отделяющие различные режимы течения. Пунктирные линии соответствуют равным расходам через два ответвления.

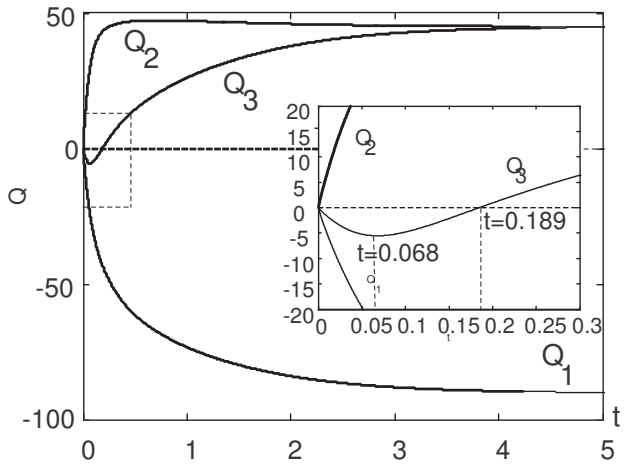

Рис. 16. Зависимость расходов от времени

В **п.4.5.2** рассмотрено развитие течения из состояния покоя до стационарного режима. Покоящаяся в Т-образном канале жидкость внезапно подвергнута постоянным перепадам давления между границами “протекания”. Распределение потока по ответвлениям Т-образного канала зависит от гидродинамических сопротивлений этих ответвлений, и даже в стационарном случае не может быть предсказано без решения задачи. Рисунок 16 показывает изменение объемных расходов $Q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ со временем после начала течения. Значения p_1 и p_3 показаны значком (▲) на Рисунке 15. Положительные значения $Q_i(t)$ соответствуют направлению потока, совпадающему с направлением вектора внешней нормали к сечению протекания Γ_i^1. Рисунок 17 демонстрирует последовательность мгновенных распределений линий тока вплоть до момента времени $t \approx 3,5$, соответствующего стационарному решению. На более ранней стадии после возникновения течения поток развивается как течение Режима IV вплоть до $t \approx 0,19$. При $t \approx 0,07$ расход Q_3 достигает локального экстремума и начинает уменьшаться по абсолютной величине. В момент времени $t \approx 0,19$ течение переключается на Режим III. Формирование и рост во времени вихревой зоны около левого угла ответвления канала Γ_2 можно наблюдать на Рисунках 17 в)-е). Вихрь возникает как небольшой угловой вихрь. Затем точка присоединения продвигается вдоль левой границы ответвления Γ_2 и в дальнейшем остается неподвижной для моментов времени $t \gtrsim 4,0$. Вторичная рециркуляционная зона (см. Рисунок 17 в)-е)) около нижней стенки ответвления Γ_3 становится меньше, когда больший объем жидкости вытекает

через ответвление Γ_3. Следует отметить, что объемный расход Q_2, достигает стационарного значения быстрее, чем расходы Q_1 и Q_3. Кроме того, расход Q_2 сначала достигает максимальной величины и затем незначительно уменьшается.

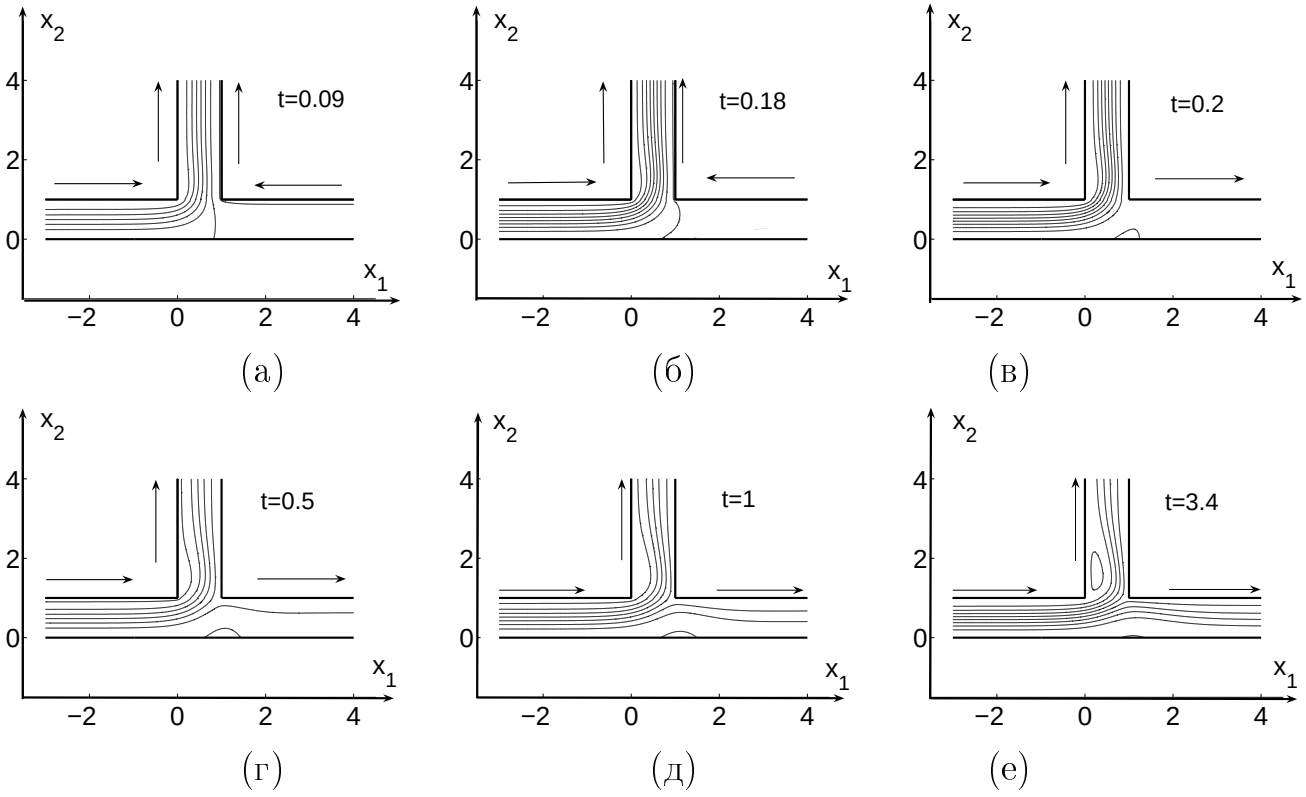

Рис. 17. Изменение во времени мгновенных распределений линий тока, $p_1 = 4500$; $p_3 = 3135$; $Re = 91,25$. (случай, обозначенный значком ▲ на Рисунке 15)

В Заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

С применением методов расщепления построены численные модели, позволившие исследовать течения вязких несжимаемых жидкостей, связанные с самодвижением тел, с динамикой турбулентного следа за буксируемым телом в устойчиво стратифицированной среде, с протеканием через ограниченную область при известных перепадах давления; а также вращательно-симметричных течений, описываемых новой формой уравнений Навье – Стокса.

Основные результаты сводятся к следующему.

1. Разработан комплекс программ численного решения уравнений Навье – Стокса в бицилиндрической и тороидальной системах координат; численно решена задача о самодвижении двух вращающихся цилиндров в вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме течения при умеренных числах Рейнольдса. Впервые численно решена задача о самодвижении тора с вращающейся поверхностью (вокруг его центральной оси) в вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном режиме течения при умеренных числах Рей-

нольдса; установлена зависимость скорости и направления самодвижения от скорости вращения поверхности тора, показана возможность самодвижения в двух противоположных направлениях.

2. Построены усовершенствованные численные модели динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Модели основаны на применении иерархии полуэмпирических моделей турбулентности, включающей в себя модель с дифференциальными уравнениями переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. Конечно-разностные аналоги получены с использованием методов расщепления по пространственным переменным и физическим процессам. Осуществлено тестирование и сопоставление полуэмпирических моделей турбулентности с точки зрения адекватного описания характеристик течения. Приведенные результаты численных экспериментов демонстрируют основные закономерности автомодельного вырождения турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде. Впервые осуществлено численное моделирование анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде.

Построенные численные модели турбулентного следа за буксируемым телом успешно применены для сопоставления характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в стратифицированной среде. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом генерирует внутренние волны существенно большей амплитуды.

Решена задача о динамике турбулентного следа с малым ненулевым суммарным избыточным импульсом в линейно стратифицированной среде. Показано, что турбулентный след с малым суммарным избыточным импульсом (порядка $\pm 10\%$ от величины избыточного импульса в следе за буксируемым телом) генерирует внутренние волны, незначительно отличающиеся от индуцируемых безымпульсным турбулентным следом. Как и в случае однородной жидкости, малый ненулевой избыточный импульс существенно влияет на вырождение дефекта осредненной продольной компоненты скорости.

Приведены результаты численного моделирования и рассмотрены основные особенности динамики пассивного скаляра в турбулентных следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде; построена упрощенная диффузионная модель переноса пассивного скаляра в дальних турбулентных следах, позволяющая на порядок сократить время расчета.

3. Разработан численный алгоритм для новой формулировки (предложенной С.Н. Аристовым и В.В. Пухначевым) уравнений Навье – Стокса для вращательно-симметричного течения; новая численная модель применена к течению Тэйлора – Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами, когда крышки также могут вращаться. На примере задачи о гистерезисе в течении

Тэйлора – Куэтта продемонстрирована эффективность построенной численной модели, основанной на формулировке С.Н. Аристова и В.В. Пухначева.

4. Разработаны численный алгоритм и его программная реализация для решения задач о протекании вязкой несжимаемой жидкости через ограниченную область, в которых давление и касательная составляющая скорости заданы на участках границы; построена диаграмма режимов течения в плоском Т-образном канале при заданных перепадах давления; проведено детальное описание структуры шести режимов течения в зависимости от заданных перепадов давления между ответвлениями Т-образного канала; численно решена задача о возникновении течения из состояния покоя под действием внезапно приложенных перепадов давления в плоском Т- образном канале; обнаружено, что в процессе эволюции течения из состояния покоя до стационарного режима возможна смена направлений потоков.

Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах из перечня ВАК

[1] Moshkin, N. P. On certain examples of numerical modeling of a steady flow past a self-propelled sphere / N. P. Moshkin // Russ. J. Theoret. and Appl. Mech. — 1992. — Vol. 1, no. 2. — P. 111–123.

[2] Moshkin, N. P. Self-propelled motion of a torus rotating about its centerline in a viscous incompressible fluid / N. P. Moshkin, Pairin Suwannasri // Phys. Fluids. — 2010. — Vol. 22. — P. 113602–1 – 113602–9.

[3] Moshkin, N. P. Numerical simulation of heat transfer and fluid flow over two rotating circular cylinders at low Reynolds number / N. P. Moshkin, J. Sompong // Heat Transfer - Asian Research. — 2010. — Vol. 39. — P. 246–261.

[4] Moshkin, N. P. Two regimes of self-propelled motion of a torus rotating about its centerline in a viscous incompressible fluid at intermediate Reynolds numbers / N. P. Moshkin, Pairin Suwannasri // Phys. Fluids. — 2012. — Vol. 24. — P. 053603–1 – 053603–11.

[5] Moshkin, N. P. Numerical study of flow and heat transfer from a torus placed in a uniform flow / N. P. Moshkin, J. Sompong, P. Suwannasri // Journal of Engineering Thermophysics. — 2013. — Vol. 22. — P. 122–133.

[6] Chernykh, G. G. Numerical simulation of turbulent wakes / G. G. Chernykh, N. N. Fedorova, N. P. Moshkin // Russian J. Theoret. and Appl. Mech. — 1992. — Vol. 2, no. 4. — P. 295–304.

[7] Воропаева, О. Ф. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде / О. Ф. Воропаева, Н. П. Мошкин, Г.Г. Черных // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 10. — С. 77–94.

[8] Воропаева, О. Ф. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде / О. Ф. Воропаева, Н. П. Мошкин, Г. Г. Черных // Доклады РАН. — 2003. — Т. 392, № 2. — С. 190–194.

[9] Chernykh, G. G. Internal waves generated by turbulent wakes behind towed and self-propelled bodies in a stably stratified medium / G. G. Chernykh, N. P. Moshkin, O. F. Voropaeva // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2004. — Vol. 19, no. 1. — P. 1–16.

[10] Мошкин, Н. П. О численном моделировании динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде / Н. П. Мошкин, А. В. Фомина, Г. Г. Черных // Вестник НГУ, Серия: матем., механика, информ. — 2004. — Т. 4, № 3/4. — С. 63–92.

[11] Chernykh, G. G. Passive scalar dynamics in turbulent wakes of bodies moving in a linearly stratified medium / G. G. Chernykh, A. V. Fomina, N. P. Moshkin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2005. — Vol. 20, no. 5. — P. 403—-423.

[12] Мошкин, Н. П. О влиянии малого суммарного избыточного импульса на динамику турбулентного следа в линейно стратифицированной среде / Н. П. Мошкин, Г. Г. Черных, А. В. Фомина // Математическое моделирование. — 2005. — Т. 17, № 1. — С. 19–33.

[13] Chernykh, G. G. Numerical models of turbulent wake dynamics behind a towed body in a linearly stratified medium / G. G. Chernykh, A. V. Fomina, N. P. Moshkin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2006. — Vol. 21, no. 5. — P. 395–424.

[14] Мошкин, Н. П. Численное моделирование динамики турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде / Н. П. Мошкин, А. В. Фомина, Г. Г. Черных // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 1. — С. 29–56.

[15] Numerical modeling of some free turbulent flows / G. G. Chernykh, A. G. Demenkov, A. V. Fomina et al. // Computational Science and High Performance Computing III: The 3rd Russian-German Advanced Research Workshop, Novosibirsk, Russia, July 23-27 2007. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — Vol. 101 of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. — P. 82–101.

[16] Chernykh, G. G. Dynamics of turbulent wake with small excess momentum in stratified media / G. G. Chernykh, N. P. Moshkin, A. V. Fomina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2009. — Vol. 14. — P. 1307–1323.

[17] Chernykh, G. G. Numerical simulation of dynamics of turbulent wakes behind towed bodies in linearly stratified media / G. G. Chernykh, A. V. Fomina, N. P. Moshkin // Journal of Engineering Thermophysics. — 2009. — Vol. 18, no. 4. — P. 279–305.

[18] Мошкин, Н. П. Метод расщепления в задаче численного моделирования турбулентного следа за буксируемым телом в стратифицированной жидкости / Н. П. Мошкин // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 4. — С. 81–92.

[19] Воропаева, О. Ф. Численное моделирование внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за самодвижущимся и буксируемым телами в устойчиво стратифицированной среде / О. Ф. Воропаева, Н. П. Мошкин, Г. Г. Черных // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. — 2009. — Т. 2, № 2. — С. 37–48.

[20] Мошкин, Н. П. Параллельные алгоритмы численного моделирования динамики турбулентного следа в линейной стратифицированной жидкости / Н. П. Мошкин // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 80–95.

[21] On numerical modeling of the dynamics of turbulent wake behind a towed body in linearly stratified medium / G. G. Chernykh, O. A. Druzhinin, A. V. Fomina, N. P. Moshkin // Journal of Engineering Thermophysics. — 2012. — Vol. 21, no. 1. — P. 78–89.

[22] Moshkin, N. P. Novel finite difference scheme for the numerical solution of two-dimensional incompressible Navier – Stokes equations / N. P. Moshkin, K. Poochinapan // Int. J. Numer. Anal. and Modeling. — 2010. — Vol. 7, no. 2. — P. 321–329.

[23] Moshkin, N. P. Numerical implementation of Aristov -– Pukhnachev's formulation for axisymmetric viscous incompressible flows / N. P. Moshkin, K. Poochinapan, C. I. Christov // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2010. — Vol. 62, Issue 10. — P. 1063–1080.

[24] Moshkin, N. P. On numerical solution of the incompressible Navier – Stokes equations with static or total pressure specified on boundaries / N. P. Moshkin, D. Yambangwai // Mathematical Problems in Engineering. — 2009. — Vol. 2009. — P. 1–27.

[25] Moshkin, N. P. Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel / N. P. Moshkin, D. Yambangwai // Int. J. Comp. Fluid Dyn. — 2009. — Vol. 23(3). — P. 259–270.

[26] Moshkin, N. P. Numerical simulation of pressure-driven startup laminar flows through a planar T-junction channel / N. P. Moshkin, D. Yambangwai // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2012. — Vol. 17, no. 3. — P. 1241–1250.