

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи



Есипов Денис Викторович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ИНИЦИАЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ТРЕЩИН ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА**

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий Сибирского отделения РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Черный Сергей Григорьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Садовский Владимир Михайлович

доктор физико-математических наук,
Шер Евгений Николаевич

Ведущая организация: Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится 1 февраля 2012 года в 11:30 на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук при Институте вычислительных технологий Сибирского отделения РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики Государственной публичной научно-технической библиотеки Сибирского отделения РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, д. 6.

Автореферат разослан 29 декабря 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор



Чубаров Л. Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследований. Технологии разработки и добычи полезных ископаемых включены в перечень критических технологий Российской Федерации¹. Среди них — технологии интенсификации добычи углеводородов, главной из которых является гидравлический разрыв продуктового пласта². Он производится при помощи закачивания под высоким давлением в перфорированную скважину жидкости гидроразрыва, которая в области перфорации инициирует зародышевую трещину. Затем жидкость, надавливая на берега зародышевой трещины, заставляет ее распространяться вглубь массива породы. Для поддержания трещины в открытом состоянии через определенное время от начала подачи в жидкость гидроразрыва добавляются твердые частицы. После утечки жидкости в породу берега трещины ложатся на упаковку из попавших в трещину частиц. Образуется высокопроницаемый канал для фильтрации углеводородов из пласта в скважину, что увеличивает выкачиваемый объем углеводородов из скважины.

Проницаемость закрепленной трещины существенно зависит от ее положения, формы и распределения вдоль нее твердых частиц. Поэтому моделирование процесса гидроразрыва пласта, позволяющее определять давление жидкости, необходимое для инициации трещины, размер, положение и ширину образовавшейся трещины — является актуальной задачей поскольку позволяет проектировать и создавать трещины, максимизирующие добычу углеводородов.

Несмотря на то, что моделирование гидроразрыва ведется более 60-ти лет, остается ряд недостаточно изученных вопросов. Не выяснено влияние на кривизну траектории трещины в окрестности скважины всей совокупности ключевых параметров гидроразрыва: угла перфорации по отношению к направлениям действия главных напряжений, реологии жидкости гидроразрыва, скорости ее закачки и других факторов. В связи с этим актуальна как в научном, так и в практическом плане разработка более полных моделей, в которых одновременно решались бы по крайней мере три сопряженные задачи, в которых: отыскивалось течение неньютоновской жидкости в трещине, рассчитывалась упругая деформация породы и определялась возможность распространения трещины с выбором направления.

При численной реализации модели гидроразрыва актуально наличие совершенных методик решения каждой из выше перечисленных задач. Особенно следует выделить метод расчета напряженно-деформированного

¹ Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации: Указ Президента Рос. Федерации от 7 июля 2011 г. № 899 // Собр. законодательства Рос. Федерации. — 2011. — № 28. — Ст. 4168.

² Ибрагимов Л. Х., Мищенко И. Т., Челюнец Д. К., Интенсификация добычи нефти — М.: Наука, 2000. — 414 с.

состояния породы ввиду того, что рассматриваемая задача упругости является внешней с частично вырожденной границей, которая в свою очередь изменяется с течением времени. Также актуальна задача совершенствования методики совместного решения указанных подзадач, образующих связанную задачу моделирования распространения трещины гидроразрыва.

Цель исследования — создание численных моделей процессов инициации трещины гидроразрыва пласта и ее распространения, а также исследование особенностей и закономерностей этих процессов.

Объектом исследований выступают инициация трещины гидроразрыва, течение жидкости в ней, напряженно-деформированное состояние в ее окрестности и распространение трещины.

Предметом исследований являются закономерности возникновения и особенности поведения трещины при разрыве пласта в зависимости от геофизических условий.

В качестве **метода исследования** используются методы математического моделирования, включающие в себя: математическую формулировку задачи, построение эффективного численного алгоритма решения, программную реализацию алгоритма, проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Основные задачи, решенные в ходе достижения поставленной цели.

1. Предложена и обоснована новая двумерная постановка связанной задачи моделирования процесса гидроразрыва, в которой одновременно определяются:
 - напряженно-деформированное состояние породы,
 - течение и утечка неньютоновской жидкости в трещине,
 - скорость и направление распространения трещины.
2. Предложена трехмерная постановка задачи моделирования инициации трещины из перфорированной как необсаженной, так и обсаженной скважины.
3. На основе метода граничных элементов предложен модифицированный метод определения напряженно-деформированного состояния породы около скважины и трещины.
4. Создан метод решения системы объединенных нелинейных подсистем уравнений, возникающих при решении связанных задач.
5. Разработано программное обеспечение для численного моделирования инициации и нестационарного распространения трещин.
6. Проведены исследования процессов распространения трещин гидроразрыва при реальных геофизических условиях и различных условиях закачки неньютоновской жидкости и ее реологии.
7. Проведены исследования инициации трещины из перфорированной как необсаженной, так и обсаженной скважины гидроразрыва при реальных геофизических условиях.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие четвертому пункту паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

1. Новый математический метод моделирования инициации трещин и новый метод распространения трещин гидроразрыва, объединяющий подмодели: напряженно-деформированного состояния породы около скважины и трещины, течения и утечки неньютоновской жидкости в трещине и скорости и направления распространения трещины.

Пункт 3: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

2. Численные методы решения внешней задачи упругости с частично вырожденной границей, разработанный на основе метода граничных элементов и численный метод совместного решения задач течения неньютоновской жидкости, упругости и хрупкого разрушения.

Пункт 4: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

3. Программный комплекс CADDEM/2011, предназначенный для расчета напряженно-деформированного состояния произвольного упругого тела, созданный на основе предложенных методов и используемый для проведения вычислительных экспериментов в филиале ООО «Технологическая Компания Шлюмберже» в г. Новосибирске и в ОАО «Силовые машины» «ЛМЗ» в г. Санкт-Петербурге.

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

4. Результаты моделирования процессов инициации трещины в трехмерной постановке и распространения трещины гидроразрыва в двумерной постановке и анализа влияния геофизических условий, условий закачки неньютоновской жидкости и ее реологии на эти процессы.

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Научная новизна выносимых на защиту результатов заключается в следующем.

Впервые рассмотрена двумерная модель гидроразрыва одновременно учитывающая напряженно-деформированное состояние породы, течение и

утечку неьютоновской жидкости в трещине, скорость и направление распространения трещины. До последнего времени имелись работы, в которых рассматривались двумерные модели гидроразрыва с учетом только напряженно-деформированного состояния, скорости и направления распространения трещины^{3,4}. Также впервые рассмотрена трехмерная постановка задачи инициации при наличии обсадной колонны. До этого имелись только работы, в которых рассматривался процесс инициации трещины гидроразрыва без обсадной колонны^{5,6}, наличие которой является неотъемлемой частью технологического процесса гидроразрыва⁷.

Предложен новый численный метод совместного решения нелинейных систем уравнений возникающих при решении объединенных задач из новой модели гидроразрыва.

Создан программный комплекс на основе разработанных эффективных численных методов для решения внутренних и внешних задач упругости, в том числе и с вырожденной границей.

В рамках новой модели построены траектории распространения и раскрытия трещины гидроразрыва в зависимости от геофизических параметров и условий закачки жидкости и ее реологии. Указаны условия, при которых трещина гидроразрыва пережимается в окрестности скважины. В новой постановке рассчитаны давление жидкости, необходимое для инициации, а также положение и форма зародышевой трещины. Указано, что наличие обсадной колонны, как правило, увеличивает давление жидкости, необходимое для инициации.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается использованием в качестве основы моделирования фундаментальных законов механики твердого тела, механики жидкости, механики разрушения и выбором теоретически обоснованных численных методов, а также подтверждается хорошим согласованием результатов проведенных расчетов с известными аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других исследователей.

Практическая ценность результатов исследования заключается в возможности использования полученных результатов в ряде прикладных областей нефтегазовой промышленности и горного дела, а также для моделирования напряженно-деформированного состояния тел, деталей и кон-

³Зубков В. В., Кошелев В. Ф., Линьков А. М. Численное моделирование иницирования и роста трещин гидроразрыва // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2007. — № 1. — С. 45–63.

⁴Мартынюк П. А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2008. — № 6. — С. 19–29.

⁵Hossain M. M., Rahman M. K., Rahman S. S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // J. Petroleum Sci. and Eng. — 2000. — Vol. 27, Iss. 3–4 — P. 129–149.

⁶Yuan Y., Abousleiman Y., Weng X., Roegiers J.-C. Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole // Paper SPE — 1995. — No. 29601.

⁷Howard G. C., Fast C. R. Hydraulic fracturing. — Dallas: SPE — 1970. — 261 p.

струкций (программный комплекс САДВЕМ/2011, зарегистрированный в Роспатенте 27 мая 2011 г., рег. № 2011614189). Результаты диссертационной работы используются в исследованиях в филиале ООО «Технологическая Компания Шлюмберже» в г. Новосибирске и в ОАО «Силовые машины» «ЛМЗ» в г. Санкт-Петербурге, что подтверждают приложенные в конце диссертации акты об использовании научных результатов в практической деятельности.

Основные положения и результаты диссертации **докладывались и обсуждались** на объединенном научном семинаре ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» под руководством академика РАН Шокина Ю. И. и профессора Ковени В. М., на научном семинаре в ИГД СО РАН, а также на семи всероссийских и международных конференциях: Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» посвященная памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения (Москва, июнь 2009); Всероссийская конференция, приуроченная к 80-летию академика С. К. Годунова «Математика в приложениях» (Новосибирск, июль 2009); Казахстанско – Российская международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование научно-технологических и экологических проблем в нефтегазодобывающей промышленности» (Алма-Ата, сент. 2010); XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, (Красноярск, окт. 2010); X Всероссийская конференция «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, нояб. 2010); Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» посвященная 90-летию Н. Н. Яненко (Новосибирск, июнь 2011); Международная конференция «Математические и информационные технологии, МИТ-2011» (IX конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке технике и образовании»; Врнячка-Баня – Будва, сент. 2011).

Основные результаты диссертации **опубликованы** в 15 печатных работах [1–15], в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций в печатных листах, в знаменателе — объем принадлежащий лично автору) 3 статьи в периодических изданиях рекомендованных ВАК [1–3] для представления основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора или кандидата наук (5.0/2.7), 1 статья в периодическом рецензируемом издании [4] (0.5/0.5), 1 — в сборнике научных статей [5] (1.1/0.8), 2 — в трудах международных конференций [6–7] (1.6/0.8), 1 свидетельство государственной регистрации программ для ЭВМ (в Роспатенте), 7 публикаций в тезисах международных и всероссийских конференций [9–15] (0.5/0.2).

Личный вклад. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах [1–10,12–15] автор участвовал в формулировках постановок за-

дач, создал и реализовал в виде комплекса программ численный метод для моделирования напряженно-деформированного состояния породы, провел расчеты и анализ их результатов. Также в совместных работах [2,7,9,10,12,14,15] автор участвовал в создании численного метода совместного решения задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитируемой литературы и приложения. Диссертация изложена на 142 страницах машинописного текста, включая 70 иллюстраций и 2 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 114 наименований.

Содержание диссертации

Во **Введении** кратко описана технология проведения процесса гидравлического разрыва продуктового пласта. Показано, что процесс гидроразрыва состоит из двух основных этапов: инициации зародышевой трещины гидроразрыва и последующего распространения трещины в глубь массива породы. Далее во введении обоснована актуальность выбранной темы исследований, сформулированы цели и задачи исследований, приведены основные результаты и положения выносимые на защиту. Также приведены сведения о научной новизне, практической значимости, апробации результатов и основных публикациях. Затем кратко изложено содержание диссертации по главам.

В **Главе 1** приведен наиболее полный из существующих в настоящее время обзор моделей гидроразрыва пласта (в разделах 1.1–1.4) и инициации трещины гидроразрыва пласта (в разделе 1.5). Все модели гидроразрыва разделены на четыре группы в зависимости от размерности решаемых уравнений: одномерные, двумерные, псевдотрехмерные, трехмерные. В разделе 1.1 описаны как ставшие уже классическими одномерные KGD, PKN и радиальная модели, так и их современные усовершенствования. Основными путями их усовершенствования являются учет фильтрационных утечек жидкости гидроразрыва через стенки трещины в породу и учет переноса и осаждения твердых частиц в трещине. Однако все одномерные модели обладают двумя существенными недостатками: трещина рассматривается как плоский разрез и распространяется только в продольном направлении.

Дальнейшее совершенствование моделей гидроразрыва сосредоточено на устранении этих недостатков. Рассмотрение искривления траектории трещины в горизонтальной плоскости привело к созданию двумерных моделей гидроразрыва, описанных в разделе 1.2, а рассмотрение наряду с продольным вертикального распространения трещины привело к созданию псевдотрехмерных моделей, описанных в разделе 1.3. Отмечено, что учет искривления траектории трещины от момента ее инициации до выхо-

да на магистральное направление распространения поперек действия наименьших напряжений залегания очень важен с практической точки зрения⁸. Показано, что полноценные двумерные и псевдотрехмерные модели обладают большой сложностью ввиду того, что в них требуется одновременный учет как минимум трех явлений: напряженно-деформированного состояния породы, течения и утечки жидкости в трещине и распространения трещины. Поэтому до последнего времени рассматривались только их упрощенные варианты.

В обзоре также отмечены и полностью трехмерные модели (в разделе 1.4), не получившие пока широкого применения ввиду своей высокой вычислительной трудоемкости.

В разделе 1.5 показано, что ввиду сложности исходной геометрической конфигурации моделирование процесса инициации трещины может быть произведено только в трехмерной постановке. За последние два десятилетия за рубежом появился ряд работ по этой тематике. Однако основное внимание в них уделяется определению давления жидкости необходимого для инициации зародышевой трещины и частично ее месторасположению. В этой связи остаются слабо исследованными вопросы о месторасположении и направлении первоначального развития зародышевой трещины. Здесь же отмечена важность учета стальной обсадной колонны, так как ее наличие является неотъемлемой частью технологического процесса.

Глава 2 посвящена разработке модифицированного метода определения напряженно-деформированного состояния породы, успешно примененному в диссертационной работе как в задаче распространения трещины гидроразрыва в двумерной постановке, так и в задаче инициации трещины в трехмерной постановке. Отмечено, что в каждой из этих задач рассматривается внешняя задача упругости. В дополнении к этому в задаче распространения трещины граница является частично вырожденной (т.е. часть границы представляется берегами разреза) и меняется с течением времени.

Наиболее распространенными методами решения задач упругости являются методы конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ). В разделе 2.1 приведен обзор перечисленных методов и показано, что для решения внешних задач целесообразно применять МГЭ, который автоматически удовлетворяет граничному условию на бесконечности и в котором не требуется аппроксимация объема вплоть до удаленной границы, как в МКР или МКЭ. Также для МГЭ значительно упрощается проблема перестройки расчетной сетки при пошаговом росте трещины.

В разделе 2.2 показано, что классический МГЭ в задачах с вырожденной границей не применим ввиду того, что интегральное уравнение для смещений, на решении которого основан метод, вырождается. Затем при-

⁸Behrmann L. A., Elbel J. L. Effect of perforations on fracture initiation // J. Petr. Tech. — 1991. — Vol. 43. — P. 608–615.

водится обзор МГЭ специально сконструированных для решения задач упругости с частично вырожденной границей: МГЭ основанные на теории функций комплексного переменного (ТФКП), многозонный МГЭ, метод разрывных смещений и фиктивных нагрузок и дуальный МГЭ (ДМГЭ). МГЭ на основе ТФКП не обобщаются на трехмерный случай, многозонный МГЭ на каждом шаге по времени требует сложной процедуры перестройки фиктивной границы, метод разрывных смещений и фиктивных нагрузок является не прямым МГЭ и при его применении затруднен расчет коэффициентов интенсивности напряжений. Таким образом, наиболее подходящим для задачи распространения трещины является ДМГЭ, свободный от перечисленных выше недостатков.

В разделе 2.3 описывается ДМГЭ и предлагается его упрощенная и экономичная модификация. Вся граница задачи упругости разбивается на три части $\partial V = S = S^* + S^+ + S^-$, где S^* — граница полости, S^+ — верхний берег разреза и S^- — нижний берег разреза. Для компонент разрыва смещений $\Delta u_i(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}^+) - u_i(\mathbf{x}^-)$, в предположении разнонаправленности нагрузки на берегах трещины $\Sigma t_i(\mathbf{x}) = t_i(\mathbf{x}^+) + t_i(\mathbf{x}^-) = 0$ (координаты точек \mathbf{x}^+ и \mathbf{x}^- совпадают, но они принадлежат разным берегам разреза $\mathbf{x}^+ \in S^+$ и $\mathbf{x}^- \in S^-$), интегральное уравнение для смещений на S^* имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{x}^*)u_j(\mathbf{x}^*) &= \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \\ &- \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})\Delta u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^* \in S^*, \end{aligned} \quad (1)$$

где U_{ij} и T_{ij} — решение задачи Кельвина о действии сосредоточенной нагрузки, а $C_{ij}(\mathbf{x})$ — коэффициент характеризуемый расположением точки \mathbf{x} на границе S . Интегральное уравнение для смещений на S^+ имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{x}^+)u_j(\mathbf{x}^+) &= \int_{S^*} U_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} T_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \\ &- \int_{S^-} T_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{x})\Delta u_j(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^+ \in S^+, \end{aligned} \quad (2)$$

Дополнительное интегральное уравнение для напряжений на участке вырожденной границы, которое получается из фундаментального интегрального соотношения для напряжений, имеет вид:

$$\begin{aligned} t_j(\mathbf{x}^-) &= \int_{S^*} L_{kj}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x})t_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{S^*} M_{kj}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x})u_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \\ &- \int_{S^-} M_{kj}(\mathbf{x}^-, \mathbf{x})\Delta u_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^- \in S^-. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $L_{kj}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x}')D_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ и $M_{kj}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x}')S_{kij}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, а функции D_{kij} и S_{kij} получается из U_{ij} и T_{ij} дифференцированием по x_k .

В разделе 2.3 показано, что уравнения (1) и (3) образуют замкнутую систему интегральных уравнений относительно Δu_i на S^- и u_i на S^* . Ввиду того, что для двумерной модели гидроразрыва требуется только ширина трещины, определяемая Δu_i , то предложено использовать в расчетах только два уравнения (1) и (3), откуда можно найти компоненты разрыва смещений на разрыве Δu_i . Отличительной особенностью такой является сокращение объема потребных вычислений, ввиду сокращения количества решаемых интегральных уравнений. Показано, что в случае необходимости по найденным значениям Δu_i на S^- и u_i на S^* можно найти и u_i на S^\pm при помощи (2).

Для распространения трещины согласно теории хрупкого разрушения требуется вычислить значения коэффициентов интенсивности напряжений (КИНов) в кончике трещины. В разделе 2.4 приводится обзор способов вычисления КИНов. Все эти способы разделены на три группы: интерполяция по значениям разрывов смещений на трещине в окрестности кончика, интерполяция по значениям напряжений внутри расчетной области в окрестности кончика и интегральные способы. Указано, что первая группа зачастую дает большую погрешность при вычислении значения второго КИНа, вторая группа требует точного воспроизведения сингулярного поведения величин напряжений в окрестности кончика, в третьей группе требуется специальная техника разделения значений КИНов. В разделе 2.5 описан интегральный подход основанный на вычислении J -интеграла по контуру охватывающему кончик трещины. Путем выделения симметричной и антисимметричной компонент смещений и напряжений на круговом контуре J -интеграл разбивается на две части, каждая из которых в свою очередь равна соответствующему КИНу деленному на коэффициент $E' = E/(1 - \nu^2)$.

Так как при моделировании инициации требуется учет влияния стальной обсадной колонны, то необходимо рассматривать задачу упругости как минимум для двух однородных материалов (порода и сталь) одновременно. В разделе 2.6 для этой задачи в отличии от задачи распространения трещины предложен многозонный МГЭ, позволяющий разрешить внешнюю задачу упругости для кусочно-однородных тел. Поясним идею его построения для двух тел ($\partial V_1 = S_1 + S_{12}$; $\partial V_2 = S_2 + S_{12}$), связанных через интерфейсную границу S_{12} . Метод заключается в применении к каждой из подобластей V_1 и V_2 метода граничных элементов. После аппроксимации интегральных уравнений получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_{12} \end{pmatrix} &= [\mathbf{T}_1 \ \mathbf{T}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{U}_2 \ \mathbf{U}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_{21} \end{pmatrix} &= [\mathbf{T}_2 \ \mathbf{T}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

В матрицах, обозначенных \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 , \mathbf{U}_{12} , сосредоточены интегралы по яд-

ру U_{ij} , в матрицах \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_{12} сосредоточены интегралы по ядру T_{ij} для соответствующих участков границы. Домножая слева системы (4) на матрицы, обратные к матрицам \mathbf{U} (матрицы \mathbf{U} по построению невырождены), получим для каждой из подзадач матрицы псевдожесткости \mathbf{K}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix} = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_{12}]^{-1} [\mathbf{T}_1 \ \mathbf{T}_{12}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{21} \end{pmatrix} = [\mathbf{U}_2 \ \mathbf{U}_{21}]^{-1} [\mathbf{T}_2 \ \mathbf{T}_{21}] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_{21} \end{pmatrix}.$$

Далее, используя методику аналогичную методике объединения матриц жесткости в МКЭ и учитывая условия полной сцепки на интерфейсной границе S_{12} , получим результирующую СЛАУ для объединенной задачи

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} + \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_{12} \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Такая методика позволяет решить задачу упругости для сколь угодно большого количества тел, а применение принципа виртуальной работы позволяет комбинировать предложенный метод с МКЭ.

Для построения зародышевой трещины согласно силовому критерию разрушения требуется определить тензор напряжений на границе задачи упругости. В разделе 2.7 показано, что для его вычисления на границе нельзя непосредственно воспользоваться фундаментальным интегральным соотношением для напряжений, так как при стремлении точки наблюдения к поверхности интегралы в правой части этого соотношения вырождаются. Поэтому в разделе 2.7 предложена непрямая методика определения тензора напряжений, которая заключается в применении в локальной связанной с поверхностью системе координат закона Гука к деформациям, определенным по найденным компонентам смещений.

Глава 3 посвящена построению двумерной модели гидроразрыва, которая концептуально аналогична модели KGD с допущением искривления траектории трещины в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 1. Согласно такой концепции задача объединяет три подзадачи: подзадачу упругости, подзадачу течения и утечки жидкости и подзадачу распространения трещины. В разделе 3.1 описывается ее математическая формулировка.

В пункте 3.1.1 сформулирована подзадача упругости. Напряженно-деформированное состояние изотропной однородной породы описывается уравнениями линейного упругого равновесия. На полости скважины S^* ставится граничное условие

$$t_i(\mathbf{x}) = -n_i(\mathbf{x})p(0) + \sigma_{ij}^\infty n_j, \quad \mathbf{x} \in S^*, \quad (6)$$

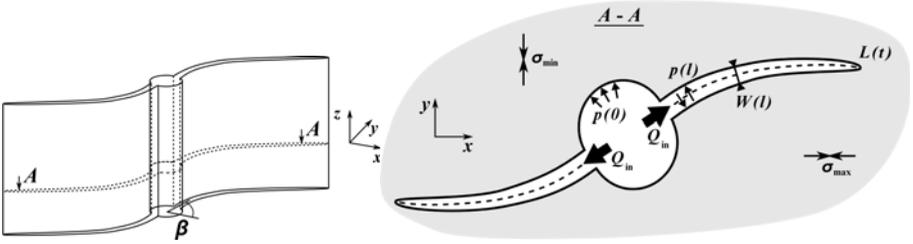


Рис. 1. Геометрическая концепция двумерной модели

где n_i – компоненты единичной нормали к поверхности. На трещиновой части границы S^\pm ставится граничное условие

$$t_i(\mathbf{x}) = -n_i(\mathbf{x})p(l) + \sigma_{ij}^\infty n_j, \quad \mathbf{x} \in S^\pm, \quad l \in [0, L(t)]. \quad (7)$$

Учет напряжений залегания в нетронутом массиве породы обеспечивается добавками с тензором σ_{ij}^∞ в (6) и (7). Решение такой задачи упругости даст изменение напряженно-деформированного состояния относительно уже сжатой напряженными σ_{ij}^∞ породы, т.е. реальные напряжения в породе равны $\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^\infty$.

В пункте 3.1.2 сформулирована подзадача течения жидкости гидроразрыва вдоль крыла трещины. Уравнение количества движения (следует из решения задачи о течении псевдопластической жидкости между двумя параллельными плоскостями единичной высоты, разнесенными на расстояние W) и уравнение неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \frac{\mu}{W^{2n+1}} Q^n, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial l} + 2 \frac{C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(l)}} = 0 \quad (8)$$

где Q – расход жидкости через сечение l единичной высоты, μ – мера консистенции и n – показатель степенной реологии. В уравнении неразрывности источникный член описывает утечку жидкости гидроразрыва в породу согласно закону Картера. Здесь $t_{exp}(l)$ – время прохождения крылом трещины точки l , а C_L – коэффициент, характеризующий проницаемость породы. К системе дифференциальных уравнений (8) добавляются граничные условия

$$Q(0, t) = Q_{in}, \quad W(L(t), t) = 0, \quad Q(L(t), t) = 0.$$

Здесь первое условие задает расход жидкости в крыло трещины, второе и третье условия означают, что жидкость заполняет трещину вплоть до ее кончика $L(t)$.

В подразделе 3.1.3 приведен критерий хрупкого разрушения задающий трещину нормального отрыва⁹. Считается, что трещина распространяет-

⁹Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

ся в том направлении и на такое расстояние, при которых выполняются условия

$$K_I = K_{Ic}, \quad K_{II} = 0. \quad (9)$$

Здесь K_{Ic} — коэффициент трещиностойкости породы.

В разделе 3.2 приведен метод пошагового распространения трещины гидроразрыва — на каждом шаге по времени выбирается такое приращение трещины, определяемое величиной и направлением приращения, при котором выполнен критерий (9). Формально критерий (9) дает систему из двух нелинейных уравнений относительно величин приращения и направления приращения, которую предложено решать при помощи метода Ньютона. Тогда каждое вычисление КИНов требует решения связанной через интерфейсную границу S^\pm задачи «гидродинамика – упругость».

В подзадаче упругости на S^\pm задаются значения давлений $p(l)$, следовательно в ходе решения такой задачи на S^\pm определяется ширина трещины $W(l)$. Формально результат решения можно представить в виде следующей зависимости $W(l) = W(p(l))$. В подзадаче гидродинамики на S^\pm задается ширина трещины W , следовательно в ходе решения такой задачи на S^\pm определяется давление $p(l)$. Формально результат решения можно представить в виде следующей зависимости $p(l) = p(W(l))$. Таким образом, на каждом шаге по времени связанная задача взаимодействия может быть представлена в виде следующего уравнения

$$p(W(p(l))) - p(l) = 0, \quad l \in [0, L(t)].$$

После аппроксимации интерфейсной границы это уравнение рассматривается в аппроксимационных точках x^1, \dots, x^N . Теперь зависимости W и p следует рассматривать как многомерные функционалы от давлений и ширины соответственно, задаваемых в точках x^1, \dots, x^N . Суммируя возведенные в квадрат уравнения нелинейной системы, получим функционал. Теперь решая задачу минимизации этого функционала относительно значений давления в точках x^1, \dots, x^N с известным значением минимума, равным нулю, найдем решение общей нелинейной связанной задачи «гидродинамика – упругость». Установлено, что наиболее эффективным методом решения такой задачи является метод оптимизации Левенберга – Марквардта.

В разделе 3.3 приведены результаты верификации построенной вычислительной методики на модели KGD, являющейся частным случаем предложенной модели — показано хорошее соответствие результатов.

В разделе 3.4 представлены результаты численного моделирования процесса гидроразрыва для реальных (т. е. типичных для нефтегазовой отрасли промышленности) геофизических параметров, условий закачки неньютоновской жидкости и ее реологии. Проведен анализ чувствительности решения к параметрам модели. В пункте 3.4.1 исследовано влияние угла перфорации. (слева на рис. 2) При больших и малых угла перфорации

траектория трещины выходит с перфорации гладко в других случаях траектория трещины в кончике претерпевает излом. Затем траектория всегда плавно выходит на направление поперек действия минимального сжимающего напряжения σ_{min} . Указано, что сильное отклонение перфорации от направления максимальных напряжений в естественном залегании породы, приводит к пережатию трещины гидроразрыва в окрестности скважины, как показано слева на рис. 3). В пункте 3.4.2 исследовано влияние длины перфорации. В пункте 3.4.3 исследовано влияние неравномерности напряжений в естественном залегании породы. Показано, что соотношение между главными напряжениями залегания $k = \sigma_{max}/\sigma_{min}$ значительно влияет на траекторию распространения трещины гидроразрыва (справа на рис. 2) и угол излома в кончике перфорации. В пункте 3.4.4 исследовано влияние трещиностойкости породы K_{Ic} . Оказалось, что реальные значения трещиностойкости K_{Ic} практически не влияют на решение модели. В пункте 3.4.5 исследовано влияние темпа закачки жидкости. Показано, что темп закачки жидкости в основном влияет на скорость распространения трещины вглубь нетронутого массива породы, как показано справа на рис. 3. При увеличении скорости закачки вдвое, скорость распространения растет примерно в $\sqrt{2}$ раз.

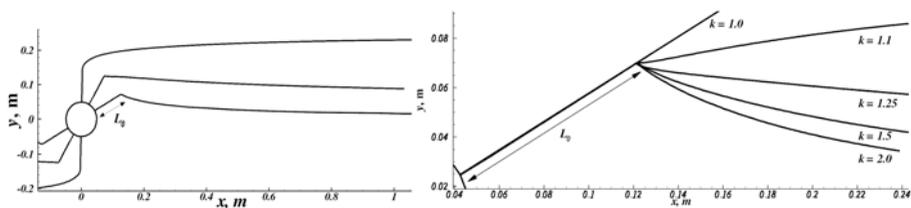


Рис. 2. Траектории распространения трещины гидроразрыва

В пункте 3.4.6 исследовано влияние реологии жидкости. Установлено, что увеличение μ спрямляет траекторию трещины (рис. 4).

Глава 4 посвящена трехмерной постановке задачи инициации для перфорированной как необсаженной, так и обсаженной скважины. Основной ее частью является расчет напряженно-деформированного состояния породы в окрестности обсадной колонны и перфорации. В разделе 4.1 приведена постановка задачи. Рассматривается вертикальная скважина с перфорацией ориентированной под углом β к максимальному горизонтальному напряжению в естественном залегании породы. В случае обсаженной скважины считается, что в скважинную полость плотно вставлена стальная труба. Внутренние поверхности нагружаются постоянным давлением, до тех пор пока на поверхности полости перфорированной скважины не образуются зоны разрушения — точки где выполнен критерий разрушения. В качестве критерия разрушения используется превышение растягивающими напряжениями критического напряжения на разрыв породы σ_c . Давле-

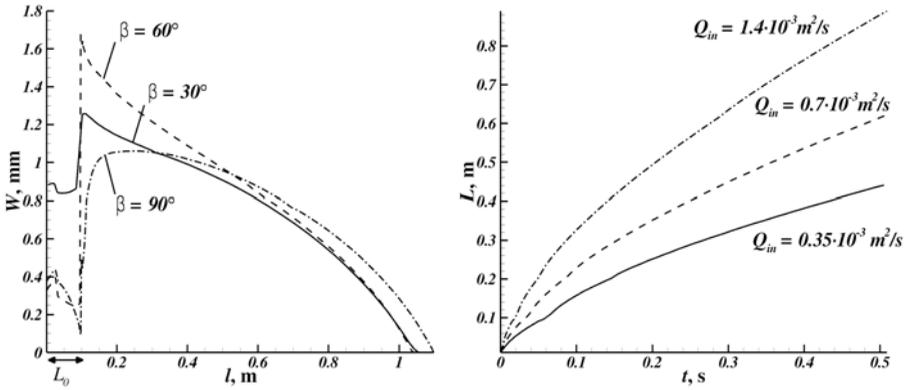


Рис. 3. Ширина трещины $W(l)$ слева и длина крыла трещины $L(t)$ справа

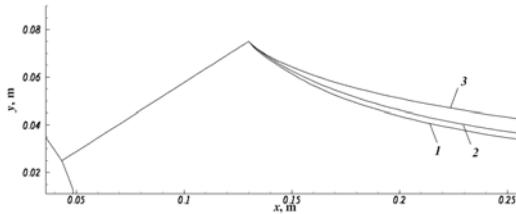


Рис. 4. Траектории распространения трещины гидроразрыва при разных значениях μ : 1 — $\mu = 0.06 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.8}$, 2 — $\mu = 0.6 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.8}$, 3 — $\mu = 6 \text{ Па}\cdot\text{с}^{0.8}$

ние жидкости, при котором образуются зоны разрушения, есть давление инициации гидроразрыва P_{init} .

Предложена следующая методика построения зародышевой трещины. Для ее построения выделяются зоны разрушения при давлении нагружения большем, чем давление инициации. Используя информацию о направлении действия растягивающих напряжений вдоль по зоне разрушения строится срединная линия, которая образует основание зародышевой трещины. Затем строя перпендикуляр к поверхности с зоной разрушения определяется фронт зародышевой трещины. Длина перпендикуляра в каждой точке основания трещины пропорциональна превышению растягивающими напряжениями критического σ_c .

В разделе 4.2 приведены результаты валидации построенной вычислительной методики путем моделирования двух экспериментов по инициации трещины гидроразрыва⁸. Рассчитаны зоны разрушения и построены по предложенной методике зародышевые трещины для указанного давления инициации (рис. 5). Расположение и направление зародышевых трещин

совпадает с трещинами получившимися в эксперименте.

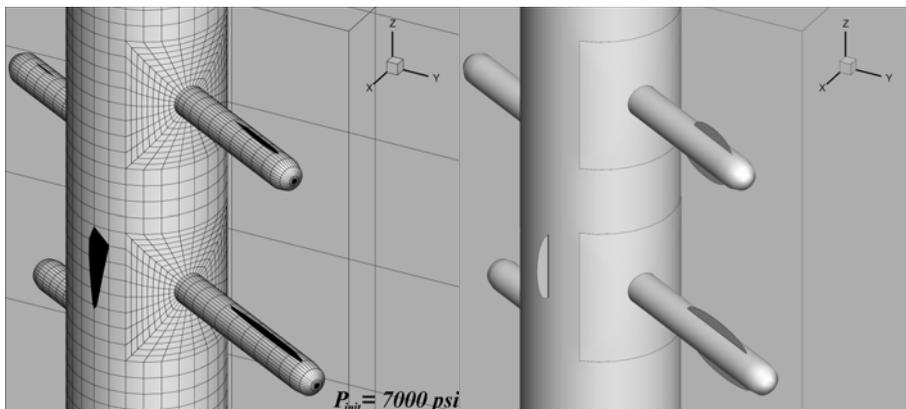


Рис. 5. Зоны разрушения слева и зародышевые трещины справа

В разделах 4.3 и 4.4 представлены результаты численного моделирования процесса инициации трещины гидроразрыва для реальных геофизических параметров. На рис. 6 показано влияние напряжений в естественном залегании породы на расположение зоны разрушения. Указано, что при большом изменении вертикального сжимающего напряжения сценарий инициации кардинально меняется. Определено давление инициации (рис. 7) и построены зоны разрушения как в случае необсаженной, так и в случае обсаженной скважины. Давление инициации минимально при направлении перфорации в направлении действия максимальных горизонтальных напряжений в естественном залегании породы и разрушение происходит на стыке скважины и перфорации. С увеличением угла перфорации β растет и давление инициации P_{init} . Показано, что в случае необсаженной скважины при $\beta > 55^\circ$ давление инициации становится постоянным P_{init} и разрушается уже сама полость скважины. Показано, что наличие обсадной колонны значительно увеличивает необходимое давление инициации P_{init} и что в случае обсаженной скважины зона разрушения всегда расположена на поверхности перфорации, а не на стыке скважины и перфорации. Случая когда разрушается полость скважины не возникает. Установлено, что длина перфорации начиная с некоторого значения не влияет на давление инициации P_{init} .

В **заключении** диссертационной работы сформулированы основные выводы и приведены выносимые на защиту результаты.

В **приложении А** выписаны интерполяционные формулы для различных типов граничных элементов.

В **приложении Б** приведено описание программного комплекса CADBEM/2011 и описаны примеры решения как тестовых задач, так и

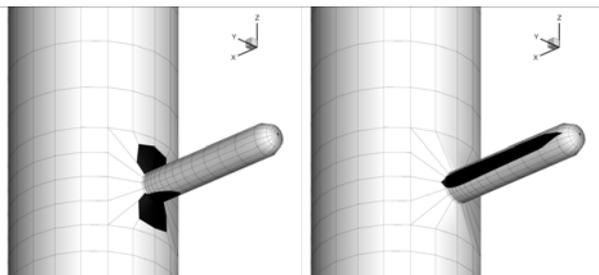


Рис. 6. Зоны разрушения при больших (слева) и малых (справа) вертикальных напряжениях в естественном залегании породы

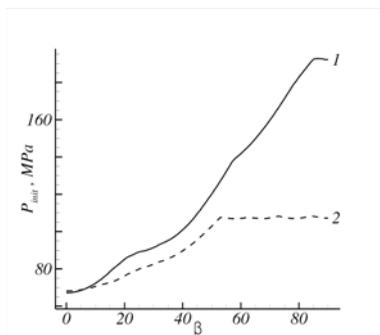


Рис. 7. Давление инициации в зависимости от угла перфорации β

сложной задачи упругости для изолированной лопасти рабочего колеса гидротурбины.

Список основных публикаций по теме диссертации

Публикации в периодических изданиях, рекомендованных ВАК

1. Банников Д. В., Есипов Д. В., Черный С. Г., Чирков Д. В. Оптимизационное проектирование ротора гидротурбины по критериям эффективность-прочность // Теплофизика и Аэромеханика. — 2010. — Т. 17, № 4. — С. 651–658.
2. Алексеенко О. П., Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лалин В. Н., Черный С. Г., Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11., вып. 3. — С. 36–59.
3. Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лалин В. Н., Черный С. Г., Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче иници-

ации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16., № 6. — С. 13–26.

Публикация в периодическом рецензируемом издании

4. Есипов Д. В. Моделирование процесса инициации гидроразрыва пласта методом граничных элементов // Вестник КазНУ сер. мат., мех., инф. — 2010. — № 3(66). — С. 270–277.

Публикация в сборнике научных статей

5. Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Метод граничных элементов и его приложение к задаче разрушения перфорированной скважины // Тем. Сб. науч. ст. «Краевые задачи и математическое моделирование». — Новокузнецк: Новокузнецкий филиал КемГУ, 2010. — Т. 1. — С. 159–168.

Публикации в трудах международных конференций

6. Есипов Д. В., Черный С. Г., Куранаков Д. С., Лапин В. Н. Моделирование многозонным методом граничных элементов процесса инициации трещины гидроразрыва пласта из перфорированной обсаженной скважины // Труды междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — № гос. рег. 0321101160, НТЦ «Информрегистр». — Новосибирск, 2011. — <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/40532/47467/EsipovDV.pdf>
7. Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Некоторые особенности численного моделирования гидроразрыва пласта // Труды междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Яненко. — № гос. рег. 0321101160, НТЦ «Информрегистр». — Новосибирск, 2011. — http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/40670/47352/LapinVN_big.pdf

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

8. Черный С. Г., Есипов Д. В., Лапин В. Н., Банников Д. В. Программа расчета напряженно-деформированного состояния произвольного упругого тела методом граничных элементов САДВЕМ/2011 / Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ. Рег. № 2011614189. Роспатент.

Публикации в тезисах всероссийских и международных конференций

9. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Алексеенко О. П., Медведев О. О. Численное моделирование процесса гидроразрыва пласта // Тез. докладов междунар. конф. «Современные

- проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти и к 90-летию А. А. Самарского. — М.: ВМК МГУ, 2009. — С. 381–382.
10. Lapin V. N., Cherny S. G., Chirkov D. V., Esipov D. V., Alekseenko O. P., Medvedev O. O. 2D numerical of hydraulic fracturing // Тез. докладов Всерос. конф. приуроченная к 80-летию акад. С. К. Годунова «Математика в приложениях». — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. — С. 304–305.
 11. Есипов Д. В. Моделирование многозонным методом граничных элементов процесса инициации гидроразрыва при наличии развитой трещины // Прогр. и тез. докл. XI Всерос. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. — Красноярск: ИВТ СО РАН, 2010. — С. 22–23.
 12. Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н., Банников Д. В., Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Авдюшенко А. Ю., Скороспелов В. А., Турук П. А. Численное решение сопряженных задач «гидродинамика — упругость» // Материалы XVII Междунар. конф. по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2011) — Алушта: МАИ-ПРИНТ, 2011. — С. 169–171.
 13. Есипов Д. В., Черный С. Г., Куранаков Д. С., Лапин В. Н. Моделирование многозонным методом граничных элементов процесса инициации трещины гидроразрыва пласта из перфорированной обсаженной скважины // Тез. докл. междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» посвященная 90-летию со дня рождения Н. Н. Яненко — Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2011. — С. 88–89.
 14. Черный С. Г., Лапин В. Н., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Некоторые особенности численного моделирования гидроразрыва пласта // Тез. докл. междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» посвященная 90-летию со дня рождения Н. Н. Яненко — Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2011. — С. 106–107.
 15. Лапин В. Н., Черный С. Г., Есипов Д. В., Куранаков Д. С. Математические модели и численные методы гидроразрыва пласта // Справ. конф. «Математические и информационные технологии, МИТ 2011» — Врнячка-Баня; Будва: Математическое общество Косово и Метохии, 2011. — С. 97.

Автореферат

Подписано в печать: 27.12.2011 Объем 1,25 п. л.

Формат бумаги 60×84 1/16, Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ЗАО РИЦ «Прайс-курьер»

г. Новосибирск, ул. Кутателадзе, 4г, оф. 310, тел. (383) 330-7202

Заказ №1346