На правах рукописи

Людвин Дмитрий Юрьевич

РАЗРАБОТКА ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ СИНТЕЗА, АНАЛИЗА И ДИАГНОСТИКИ НЕКОТОРЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, Шарый Сергей Петрович
Официальные оппоненты:	Лакеев Анатолий Валентинович, доктор физико-математических наук, ИДСТУ СО РАН, г. Иркутск, ведущий научный сотрудник
	Пролубников Александр Вячеславович, кандидат физико-математических наук, ИМИТ ОмГУ, г. Омск доцент кафедры программного обеспечения и защиты информации
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Алтайский государственный университет», г. Барнаул

Защита состоится «20» февраля 2015 г. в 11.30 на заседании диссертационного совета ДМ003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук http://www.ict.nsc.ru/ru/Structure/disCouncil/lyudvin2014

Автореферат разослан «____» декабря 2014 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Лебедев А.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последние десятилетия математическое моделирование явлений окружающего мира неизбежно сталкивается с неопределённостями, вызванными неполнотой или неполной определённостью информации, неточностями исходных данных, погрешностями приближённых вычислений и т. п. При этом во многих прикладных задачах для описания факторов неопределённости используется интервальный подход. В основу интервального описания положена достаточно простая идея, заключающаяся в представлении величины двумя оценками – оценкой снизу и оценкой сверху. Интервальное представление факторов неопределённости является наименее ограничительным, поскольку позволяет исследовать модели, когда относительно рассматриваемых величин ничего не известно, кроме их свойства принимать значения из заданных ограниченных множеств. Поэтому в настоящее время возрастает интерес к интервальному анализу — математической дисциплине, изучающей задачи с интервальными неопределённостями и неоднозначностями в данных и методы их решения. Основные результаты математических исследований в данной области получены в работах отечественных учёных Б.С. Добронца, С.И. Жилина, А.В. Лакеева, С.П. Шарого, Ю.И. Шокина и др., а также зарубежных авторов таких, как Г. Алефельд, Э. Каухер, Р.Б. Кирфотт, В. Крейнович, Г. Майер, Р. Мур, А.Ноймайер, И. Рон, З. Румп, Э. Хансен и др.

Интервальные методы нашли широкое применение в самых различных областях исследований, в том числе для проектирования и диагностики современных механизмов и машин. Математические модели механизмов часто описываются системами линейных или нелинейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых зависят от одного или нескольких параметров, которые могут принимать значения из заданных интервалов. Преимущества интервальных методов решения такого рода систем уравнений по сравнению с классическими «точечными» в инженерных приложениях вполне очевидны. Во-первых, интервальный анализ позволяет автоматически учитывать погрешности в задании исходных данных и погрешности, вызванные машинными округлениями. Во-вторых, любая математическая модель механизма неточна и описывает реальный объект приближённо, а интервальный анализ может использоваться как средство учёта неопределённости параметров и структуры модели механизма.

Как правило, множество решений системы интервальных уравнений имеет достаточно сложную структуру, и точное описание этого множества является весьма трудоёмкой задачей. По этой причине для практических целей удобнее находить некоторое его приближение или оценку с помощью более простых множеств. В данной работе мы будем рассматривать оценки в виде интервальных векторов. Геометрически интервальные векторы представляют собой брусы или прямоугольные параллелепипеды с гранями, параллельными осям координат. В современном интервальном анализе наиболее популярными способами оценивания являются внешнее интервальное оценивание, когда ищется брус, объемлющий множество решений, и внутреннее интервальное оценивание, когда ищется брус, содержащийся во множестве решений.

На сегодняшний день разработано немало методов внешнего оценивания множеств решений систем интервальных уравнений. Однако значительно меньшее число работ посвящено проблеме нахождения внутренних оценок этих множеств. Недостаточное внимание уделяется задаче оценивания множеств решений систем нелинейных уравнений с интервально заданными параметрами. Кроме того, большинство разработанных методов оценивания применимы только к интервальным системам, зависимость коэффициентов которых от параметров имеет некоторый специальный вид.

Целью данной работы является разработка интервальных методов оценивания множеств решений систем алгебраических уравнений с интервально заданными параметрами и применение их для анализа, синтеза и диагностики механических конструкций некоторых типов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1) разработать и реализовать методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями на основе адаптивного дробления параметров с использованием формального и «центрового» подходов;

2) разработать модификацию «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений интервальных линейных систем со связями, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным;

3) разработать процедуры внешнего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений на основе интервальных методов распространения ограничений, многомерного интервального метода Ньютона, методов дробления решений;

4) разработать методы внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений, а также способы построения регулярного покрытия этого множества брусами;

5) провести апробацию разработанных методов на тестовых примерах и при решении конкретных практических задач анализа и диагностики механических конструкций.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие трём пунктам (1, 3, 7) паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам:

- методы внутреннего оценивания множества решений интервальной линейной системы со связями, элементы матрицы и компоненты вектора правых частей которых зависят от параметров;
- модификация «центрового» подхода для внутреннего оценивания множества решений интервальной линейной системы со связями, коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным;
- способы построения регулярного покрытия брусами множества решений интервальной линейной системы со связями в целях наилучшего исчерпывания этого множества;
- процедура внешнего оценивания множества решений системы полиномиальных уравнений, коэффициенты которых зависят от параметров;
- методы внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений и способы построения регулярного покрытия этого множества брусами;
- результаты применения разработанных методов и алгоритмов для решения тестовых примеров и конкретных практических задач анализа и диагностики механических конструкций.

Научная новизна. В данной диссертационной работе предлагается использовать адаптивное дробление параметров интервальной линейной системы уравнений со связями и методы внутреннего оценивания множества ее решений на основе двух подходов – формального и «центрового». Разработана модификация «центрового» подхода для интервальных линейных систем со связями, правые части уравнений которых не являются интервальными.

В работе показано, как интервальные методы решения точечных систем нелинейных уравнений (многомерный интервальный метод Ньютона, методы удовлетворения ограничений) можно адаптировать к системам интервальных полиномиальных уравнений. Разработана процедура внешнего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений.

Для вычисления интервальных наклонов и проверки существования решений системы на заданном брусе разработаны методы оценивания множеств значений интервальных полиномов и их интервальных корней.

Разработаны методы построения внутренних оценок множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений и регулярного покрытия этих множеств брусами.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в том, что предложенные алгоритмы оценивания систем интервальных уравнений могут использоваться для решения задач моделирования, анализа и диагностики механических конструкций, о чем свидетельствуют результаты вычислительных экспериментов, представленные в диссертационной работе.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается использованием строгих математических методов при разработке алгоритмов, подтверждается сопоставлением результатов модельных исследований с теоретическими результатами, а также сравнением результатов тестовых экспериментов, полученных на основе разных методов.

Представление работы. Основные положения и отдельные результаты исследования докладывались и обсуждались на

- XII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2011),
- Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (г. Новосибирск, 2011),
- XIII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2012),
- XV Международном симпозиуме GAMM - IMACS по научным вычислениям, компьютерным арифметикам и доказательным численным методам – SCAN'2012 (г. Новосибирск, 2012),
- XIV Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Томск, 2013).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 5 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литераьуры. Полный объем диссертации **169** страниц текста с **28** рисунками и **6** таблицами. Список литературы содержит **115** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассмотрены две задачи моделирования и анализа механических конструкций: параметрический синтез рычажных механизмов и вычисление многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки. Приведён обзор существующих подходов и методов решения рассматриваемых задач, изложены их математические постановки, в которых особое внимание уделяется наличию интервальных неопределённостей в исходных данных.

Задача синтеза плоского рычажного механизма состоит в определении его геометрических параметров с целью обеспечения заданного движения определённого звена (звеньев) и обеспечения требуемой траектории движения определённой точки (точек), принадлежащей какому-либо звену (звеньям) механизма. Любой рычажный механизм может быть представлен в виде механической цепи последовательно соединённых диад и входных (выходных) рычагов (по числу степеней подвижности механизма). Диада является преобразующим устройством с двумя входами (внешние кинематические пары 1 и 2) и одним выходом (внутренняя кинематическая пара 3). На входы «подаются» перемещения или скорости с одними параметрами, а на выходе они «снимаются» с преобразованными параметрами. Для каждой диады справедливо следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} + J \cdot \begin{pmatrix} x'_3 \\ y'_3 \end{pmatrix},$$

где x'_i, y'_i — проекции скоростей i-ой точки диады,
$I = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_3 & i_4 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_3 & j_4 \end{pmatrix}$ — матрицы передаточных функций диады от точки 2 к точке 1 и от точки 3 к точке 1. Элементы данных матриц удовлетворяют следующим соотношениям:

$$i_2 = \frac{i_1 \cdot (1 - i_1)}{i_3}, \qquad i_4 = 1 - i_1. \tag{1}$$

$$j_1 = i_4, \quad j_2 = -i_2, \quad j_3 = -i_3, \quad j_4 = i_1. \tag{2}$$

Общая передаточная функция механизма может быть выражена через передаточные функции всех диад, входящих в его состав. Элементы матриц передаточных функций зависят от положения входного звена и заранее неизвестны. Однако, исходя из условий роботоспособности механизма, можно задать интервалы их возможных значений. Передаточная функция механизма описывается системой линейных относительно скоростей точек уравнений. Данная система одновременно является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно координат точек, в которых располагаются шарниры.

Выбор начальных условий интегрирования ОДУ осуществляется методом глобальной оптимизации специальным образом построенной целевой функции. При проведении такого глобального поиска нужно задать возможные интервалы изменения начальных условий для решения ОДУ. Оценку интервалов для начальных условий можно осуществить путём решения интервальной системы линейных уравнений, о которой говорилось выше, но при этом следует учитывать, что на интервальные элементы матрицы системы наложены связи в виде соотношений (1) и (2), которые имеют место для элементов матриц передаточных функций. Таким образом, математическая модель, на основании которой можно оценить интервалы изменения начальных условий, описывается интервальной системой линейных алгебраических уравнений со связями.

Далее в первой главе сформулирована постановка задачи анализа многомерных перемещений торцов лопаток силовой установки. Эта задача состоит в вычислении на основе градуировочных характеристик координатных составляющих перемещений, соответствующих определённым значениям цифровых кодов. Семейства градуировочных характеристик $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, измерительных каналов определяются на основе экспериментальных данных. Пусть в результате N измерений получена таблица $T = \{c_{ij}, x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj} \mid j = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, n\}$ значений цифровых кодов c_{ij} для эталонных значений $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ координатных составляющих перемещений. На основе данной таблицы производится аппроксимация градуировочной характеристики f_i методом интервальной полиномиальной регрессии в классе интервальных полиномов

$$\boldsymbol{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{K_n} a_{(i)k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

свободные члены которых $\boldsymbol{a}_{(i)00\ldots0} = [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] + a_{(i)00\ldots0}$. Из-за погрешностей измерения значения цифровых кодов задаются интервалами.

Следовательно, задача вычисления перемещений торцов лопатки силовой установки сводится к задаче оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений

$$\boldsymbol{F}(X) = \boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{F}(X) = (\boldsymbol{f}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{f}_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \boldsymbol{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^\top$ — вектор интервальных полиномов, $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_i) \in \mathbb{IR}^n$ — интервалы значений цифровых кодов.

Вторая глава посвящена задачам оценивания множеств решений интервальных систем линейных уравнений (ИСЛАУ) $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с интервальной $n \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ и интервальным n-вектором $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_i)$. В начале главы кратко изложены основы интервального анализа. Проведён обзор существующих методов нахождения внешних и внутренних оценок множеств решений ИСЛАУ. Особое внимание уделяется интервальным линейным системам со связями, элементы матриц и компоненты векторов правых частей которых зависят от параметров, принимающих значения из заданных интервалов. Такие системы будем записывать в виде

$$A(p)\,x = b(p), \qquad p = (p_1, \dots, p_k)^\top \in \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k)^\top. \tag{3}$$

Множеством решений системы (3) будем называть множество

$$\Xi_{\boldsymbol{p}} \;=\; \bigl\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, p \in \boldsymbol{p})(\, A(p)x = b(p)\,)\bigr\},$$

образованное всевозможными решениями точечных систем $A(p)x = b(p)$ с $p \in \boldsymbol{p}$. Множество решений интервальной линейной системы со связями имеет более сложную форму, чем множество решений ИСЛАУ без связей. Оно не является политопом, его границами могут быть криволинейные поверхности.

На сегодняшний день разработано немало методов оценивания множества $\Xi_{\boldsymbol{p}}$, подавляющее большинство из которых предназначено для нахождения внешней оценки, т. е., по-возможности, наименьшего бруса, содержащего множество $\Xi_{\boldsymbol{p}}$. Задаче внутреннего оценивания, т. е. нахождения бруса, содержащегося во множестве решений $\Xi_{\boldsymbol{p}}$, посвящено небольшое число работ. Как правило, в них рассматриваются ИСЛАУ, связанность параметров которых имеет некоторый специальный вид. В диссертационной работе для внутреннего оценивания множества $\Xi_{\boldsymbol{p}}$ решений ИСЛАУ (3) разработаны и апробированы на тестовых примерах алгоритмы адаптивного дробления параметров с использованием двух подходов: формального и «центрового».

Под формальным решением ИСЛАУ понимается интервальный вектор, обращающий её в равенство после подстановки в систему и выполнения всех операций по правилам интервальной арифметики. Известно, что нахождение внутренней оценки множества решений ИСЛАУ сводится к нахождению формального решения специальной интервальной системы уравнений. Если правильный интервальный вектор $\boldsymbol{x}$ есть формальное решение уравнения

$$(\mathrm{dual}\boldsymbol{A})x \;=\; \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

то $\boldsymbol{x}$ является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$. Для нахождения формальных решений ИСЛАУ используется субдифференциальный метод Ньютона.

Если элементы матрицы системы зависят от параметров, принимающих значения из интервалов достаточно малой ширины, то формальное решение соответствующей интервальной системы без связей не будет сильно отличаться от внутренней оценки её множества решений с учетом имеющихся ограничений на параметры. Причем это отличие будет тем меньше, чем меньше ширина интервалов изменения параметров. Поэтому предлагается использовать дробление интервальных параметров ИСЛАУ со связями для внутреннего оценивания ее множества решений. Будем дробить интервальный параметр, имеющий наибольшую ширину, на подынтервалы, в объединении дающие дробимый интервал, причем полученные при этом системы-потомки будут соответствовать связям, накладываемым на исходную ИСЛАУ.

Для внутреннего оценивания множества $\varXi_{\boldsymbol{p}}$ решений ИСЛАУ (3) предлагается также применить известный «центровой подход», суть которого состоит в следующем. Сначала ищем некоторую точку $t \in \mathbb{R}^n$, принадлежащую множеству решений интервальной системы (3). Затем, используя координаты найденной точки, вычисляем брус $\boldsymbol{U} \;=\; (t + \rho\boldsymbol{e})$, $\boldsymbol{e} \;=\; ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^\top$ с центром в точке t, содержащийся во множестве решений. Размер ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ находим по формуле:

$$\rho \;=\; \min_{1\leq i\leq n}\max_{p\in\boldsymbol{p}} \varPhi_i(p),$$

где

$$\varPhi_i(p) = \frac{\mathrm{rad}\;\boldsymbol{b}_i - \left|\mathrm{mid}\;\boldsymbol{b}_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p)t_j\right|}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(p)|}.$$

Заметим, что для вычисления ρ необходимо решить для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ задачу условной максимизации функции $\varPhi_i(p)$ при условиях $p \in \boldsymbol{p}$. Для решения этой задачи используем метод проекции градиента. На каждой итерации находим точку

$$p^{(r+1)} := \mathrm{Pr}\,\left(p^{(r)} + \gamma^{(r)}\nabla\varPhi_i(p^{(r)})\right), \quad r = 0, 1, \dots,$$

где $\nabla\Phi_i(p^{(r)})$ — градиент целевой функции в точке $p^{(r)}$, $\gamma^{(r)} \in \mathbb{R}$ — длина шага на r-ой итерации, $\Pr\left(p^{(r)} + \gamma^{(r)}\nabla\Phi_i(p^{(r)})\right)$ — проекция точки $p^{(r)} + \gamma^{(r)}\nabla\Phi_i(p^{(r)})$ на множество допустимых значений, определяемое заданными ограничениями.

«Центровой подход» применим к ИСЛАУ, компоненты вектора $\boldsymbol{b}$ правых частей которой являются невырожденными интервалами. Однако при решении практических задач, в частности при синтезе рычажных механизмов, встречаются ИСЛАУ с неинтервальными правыми частями. Предлагается следующая модификация «центрового подхода» применительно к системам со связями, правая часть которых точечная. Найдём центровую точку $t \in \Xi_{\boldsymbol{p}}$, например, как решение точечной системы $A(\operatorname{mid}\,\boldsymbol{p})x = b$. Далее решим задачу условной максимизации функции

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{1\le i\le n} d_i(p),$$

где

$$d_i(p) = \frac{\left|b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j\right|}{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{5}$$

при условии $p \in \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k)$.

Поясним содержательный смысл целевой функции на примере ИСЛАУ с интервальной $2 \times n$-матрицей, элементы которой зависят от параметров $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Если $t \in \Xi_{\boldsymbol{p}}$, то величины $d_i(p)$, $i = 1, 2$, определяемые соотношениями (5), равны расстояниям от точки t до пары плоскостей, описываемых уравнениями системы $\sum_{j=1}^n a_{ij}(p)\,t_j = b_i,\ i = 1, 2,\ p \in \boldsymbol{p}$. Рассмотрим две задачи условной максимизации функции

$$\Phi(p) \ = \ \frac{\sqrt{2}}{4}\left(|d_1(p) + d_2(p)| - |d_1(p) - d_2(p)|\right)$$

при двух вариантах условий:

1) $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(p)\,t_j \le 0,\ i = 1, 2,\ p \in \boldsymbol{p}$,

2) $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(p)\,t_j \ge 0,\ i = 1, 2,\ p \in \boldsymbol{p}$.

Заметим, что значение функции $\Phi(p)$ равно минимуму из расстояний $d_1(p)$ и $d_2(p)$, делённому на $\sqrt{2}$. В результате решения задач условной оптимизации получим два максимальных значения Φ_1 и Φ_2 целевой функции. В качестве размера ρ внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ возьмём минимальное из этих двух значений, т. е.

$$\rho \ = \ \min\left\{\Phi_1, \Phi_2\right\}.$$

В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения его наиболее «представительной» оценки) предлагается находить брусы $\boldsymbol{U}$ не для одной, а нескольких центровых точек. Полученные в результате работы алгоритма брусы хранятся в списке $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. Новые центры выбираются на гранях ранее построенных брусов так, что эти точки принадлежат множеству $\Xi_{\boldsymbol{p}}$, т. е. существует $p \in \boldsymbol{p}$, что $A(p)x = b$, и не принадлежат внутренности любого бруса из списка $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.

Разработанные алгоритмы внутреннего оценивания множеств решений ИСЛАУ со связями были реализованы и апробированы на тестовых примерах. Например, на рисунке 1 представлены результаты внутреннего оценивания множества решений интервальной системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\frac{p_1+p_2}{p_3} & p_2+p_4 \\ p_3+1 & p_3\cdot p_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

где $p_1 \in [1, 2]$, $p_2 \in [1, 1.5]$, $p_3 \in [2, 3]$, $p_4 \in [0.5, 1.5]$, $p_5 \in [0.5, 1.5]$ и $b = (-3, -3)^\top$. На этом рисунке изображены: a) множество решений ИСЛАУ без связей, b) множество решений ИСЛАУ со связями, c) внутренние оценки, полученные в результате работы алгоритма.

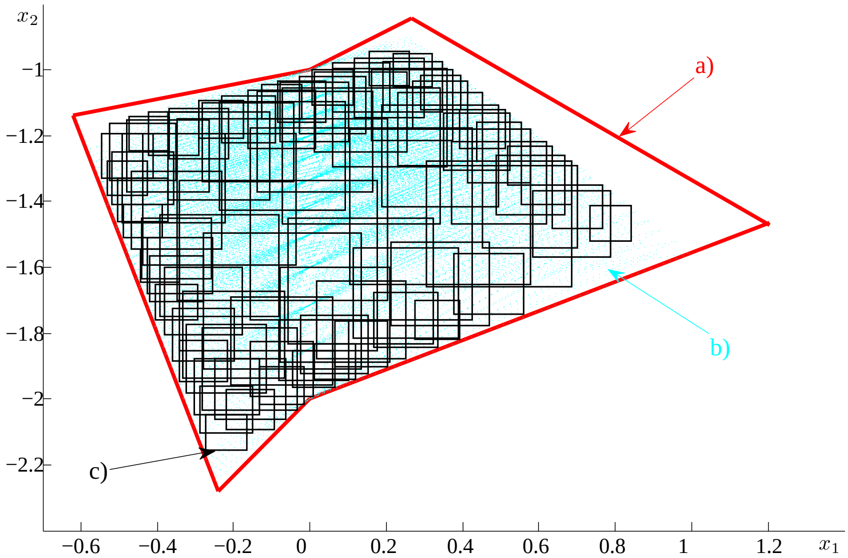

Рисунок 1 — Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ со связями.

Третья глава посвящена внешнему и внутреннему оцениванию множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений. В начале главы изложены необходимые сведения об интервальных полиномах, предложены методы оценивания их множеств значений и интервальных корней. Под интервальным полиномом

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{K_1} \sum_{k_2=0}^{K_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{K_n} \boldsymbol{a}_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \tag{6}$$

понимается множество соответствующих вещественных полиномов, коэффициенты которых $a_{k_1k_2\ldots k_n}$ принадлежат интервалам $\boldsymbol{a}_{k_1k_2\ldots k_n}$.

Для нахождения внешней оценки множества значений интервального полинома (6) на брусе $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ с целью уменьшения эффекта зависимости и погрешностей вычислений предлагается записать полином в так называемой вложенной форме, что позволяет свести задачу оценивания его множества значений к последовательному оцениванию множеств значений интервальных полиномов одной переменной, являющихся коэффициентами исходного полинома. Внешнюю оценку множества значений полинома $\boldsymbol{f}(x)$ одной переменной находим как $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\ \underline{\boldsymbol{f}}^l(\boldsymbol{x}), \overline{\boldsymbol{f}}^u(\boldsymbol{x})\ ]$, где $\boldsymbol{f}^l(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}^u(\boldsymbol{x})$ — интервальные расширения на $\boldsymbol{x}$ некоторых специальных вещественных функций $f^l(x)$ и $f^u(x)$, ограничивающих полином $\boldsymbol{f}(x)$. Интервальные расширения вычисляются с использованием схемы Горнера.

Пусть существует число $\hat{x} \in \mathbb{R}$ такое, что $0 \in [\ f^l(\hat{x}), f^u(\hat{x})\ ]$. *Интервальный корень* полинома $\boldsymbol{f}(x)$ определим как наибольший интервал $\boldsymbol{r}$, содержащий $\hat{x}$, такой что для любой точки $x \in \boldsymbol{r}$ имеет место включение $0 \in [\ f^l(x), f^u(x)\ ]$.

Для поиска интервальных корней полинома $\boldsymbol{f}(x)$ разработан алгоритм на основе следующих утверждений. Пусть $r_1 < \ldots < r_k$ — различные корни полиномов $f^l(x)$ и $f^u(x)$ и $\boldsymbol{r}_1 = (-\infty, r_1], \ldots, \boldsymbol{r}_j = [r_{j-1}, r_j], \ldots, \boldsymbol{r}_{k+1} = [r_k, +\infty)$. Невырожденный интервал $\boldsymbol{r}_j$ является интервальным корнем полинома $\boldsymbol{f}(x)$, если $0 \in [\ f^l(s), f^u(s)\ ]$, где s принадлежит внутренности интервала $\boldsymbol{r}_j$. Вырожденный интервал $[r_j, r_j]$ является интервальным корнем полинома $\boldsymbol{f}(x)$, если $0 \notin [\ f^l(s'), f^u(s')\ ]$ и $0 \notin [\ f^l(s''), f^u(s'')\ ]$, где s' и s'' принадлежат внутренностям интервалов $\boldsymbol{r}_j = [r_{j-1}, r_j]$ и $\boldsymbol{r}_{j+1} = [r_j, r_{j+1}]$ соответственно.

Далее в главе 3 рассмотрены методы внешнего и внутреннего оценивания множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений. Пусть $P = (p_j) \in \mathbb{R}^{n(K_1+1)\cdots(K_n+1)}$ вектор коэффициентов полиномов $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и p_j может принимать любые значения из интервала $\boldsymbol{p}_j$. Рассматривая f_i как функции $\varphi_i(X, P)$, зависящие от переменной $X = (x_i)$ и параметра $P = (p_j)$, принимающего значения из бруса $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$, запишем систему интервальных полиномиальных уравнений в виде

$$\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0 \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P}) = 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_i(X, \boldsymbol{P})$ – интервальное расширение функции $\varphi_i(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{P}$.

Множество решений интервальной системы $\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$ определим как

$$\varXi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid (\exists P \in \boldsymbol{P})(\varPhi(X, P) = 0)\}. \tag{8}$$

Заметим, что множество (8) может иметь сложную конфигурацию, быть неограниченным, несвязным.

В диссертационной работе предложены способы применения интервальных методов решения систем нелинейных уравнений, таких как многомерный интервальный метод Ньютона, интервальные методы удовлетворения ограничений, к системам интервальных полиномиальных уравнений.

Для внешнего оценивания множества решений системы (7) на брусе $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{IR}^n$ определим интервальный итерационный метод Ньютона на основе наклонов следующим образом

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}^{(0)} := \boldsymbol{X}, \\ \boldsymbol{X}^{(k+1)} := \boldsymbol{X}^{(k)} \cap \mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Здесь

$X^{(k)}$ — середина бруса $\boldsymbol{X}^{(k)}$;

$\mathcal{N}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}) = X_0 +$ $\boldsymbol{Encl}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P})\right)$ — оператор Ньютона;

$\boldsymbol{Encl}\left(\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P}), -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P})\right)$ — внешняя оценка множества решений ИСЛАУ $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P})(X - X^{(k)}) = -\boldsymbol{\Phi}(X^{(k)}, \boldsymbol{P})$, получен-ная с помощью процедуры $Encl$;

$\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(X^{(k)}, \boldsymbol{X}^{(k)}, \boldsymbol{P})$ — интервальный многомерный наклон функции $\Phi(X, P)$ на брусе $\boldsymbol{X}^{(k)} \times \boldsymbol{P}$ относительно точки $X^{(k)}$.

Интервальный метод Ньютона работает эффективно лишь на брусах малых размеров. Кроме того, вычисленный на большом брусе $\boldsymbol{X}$ интервальный наклон $\boldsymbol{\Phi}^{\angle}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}, \tilde{X})$ часто оказывается особенной матрицей. Поэтому наряду с методом Ньютона предлагается использовать метод удовлетворения ограничений на основе анализа совместности по брусу. Используя вложенную форму представления интервального полинома и алгоритм внешнего оценивания множества его значений, представим i–е $(i = \overline{1, n})$ уравнение системы (7) в виде

$$\boldsymbol{q}_i(x_j) = 0, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{q}_i(x_j) = \sum_{k_j=0}^{K_j} \boldsymbol{q}_{k_j} x_j^{k_j}$ — интервальный полином степени K_j относительно переменной x_j. Вычислим интервальные корни $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ уравнения (9) и найдём их пересечения с j-ой компонентой $\boldsymbol{x}_j$ исходного бруса $\boldsymbol{X}$. Пусть

$$W_j = \bigcup_{s=1}^{m} (\boldsymbol{r}_s \cap \boldsymbol{x}_j)\,.$$

Брус $\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \square W_j, \boldsymbol{x}_{j-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, где $\square W_j$ — интервальная оболочка W_j, содержит множество решений системы $\boldsymbol{\Phi}(X, \boldsymbol{P}) = 0$ и в случае $\hat{\boldsymbol{X}} \subset \boldsymbol{X}$ является его более точной внешней оценкой.

Для повышения эффективности описанных выше методов будем дробить исходный брус на более мелкие подбрусы. Подбрусы, полученные при дроблении, будем хранить в рабочем списке $\mathcal{K}$, в который изначально записываем брус $\boldsymbol{X}$. На каждом шаге алгоритма будем подвергать дроблению брус $\boldsymbol{Z}$, который является первой записью в списке $\mathcal{K}$. Если максимальная ширина компонент бруса $\boldsymbol{Z}$ не меньше $\varepsilon > 0$, то дробим брус $\boldsymbol{Z}$ на два подбруса $\boldsymbol{Z}'$ и $\boldsymbol{Z}''$, разбивая его по компоненте, для которой максимальна величина

$$\operatorname{wid} \boldsymbol{z}_j \cdot \sum_{i=1}^{n} |\, \boldsymbol{\varphi}_{ij}^{\angle}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}, \operatorname{mid} \boldsymbol{Z}) \,|.$$

К каждому из брусов $\boldsymbol{Z}'$ и $\boldsymbol{Z}''$ применим процедуру усечения, основанную на интервальных методах Ньютона и удовлетворения ограничений. Перед тем как пытаться уменьшить размеры бруса с помощью этих достаточно трудоёмких методов имеет смысл выполнить проверку, содержит ли брус решения системы уравнений (7), и в случае несуществования решений на нем исключить его из рассмотрения. Полученные в результате процедуры усечения брусы помещаем в список $\mathcal{K}$. Удаляем первую запись из списка $\mathcal{K}$, после чего повторяем описанный выше процесс дробления.

Брусы, компоненты которых имеют ширину, меньшую ε, не подвергаются дальнейшему дроблению. Интервальная оболочка всех таких брусов, полученных в результате работы алгоритма, является внешней оценкой $\boldsymbol{V}$ множества решений системы интервальных уравнений (7).

Для внутреннего оценивания множества решений системы (7) на брусе $\boldsymbol{X}$ в диссертационной работе предлагается следующий метод. Пусть $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \boldsymbol{X}$, например, $X^* = \operatorname{mid} \boldsymbol{X}$. Для некоторого $k = 1, \ldots, n$ находим наибольший по длине отрезок $\boldsymbol{r}_k$ прямой, проходящей через точку X^* параллельно k-ой оси координат и принадлежащий множеству $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \cap \boldsymbol{X}$. Если ни одна из прямых, проходящих через точку X^* параллельно осям координат, не пересекает $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \cap \boldsymbol{X}$, то выбирается другая начальная точка X^*, например решение точечной системы $\Phi(X, \operatorname{mid} \boldsymbol{P}) = 0$ на брусе $\boldsymbol{X}$.

В качестве k-ой компоненты бруса $\boldsymbol{U}$ возьмём интервал $\boldsymbol{d} = [\underline{\boldsymbol{r}}_k + \varepsilon, \overline{\boldsymbol{r}}_k - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < 0.5 \cdot \operatorname{wid} \boldsymbol{d}$. Рассмотрим точки $A(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \underline{d}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$ и $B(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, \overline{d}, x_{k+1}^*, \ldots, x_n^*)$. Вычислим отрезки $\boldsymbol{d}_j^{(1)}$ и $\boldsymbol{d}_j^{(2)}$ прямых, проходящих соответственно через точки A и B параллельно j-ой ($j = \overline{1, n}$, $j \neq k$,) оси координат и принадлежащие множеству $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \cap \boldsymbol{X}$.

Компоненты $\boldsymbol{u}_j$ $(j = \overline{1,n},\ j \neq k)$ искомой внутренней оценки $\boldsymbol{U}$ находим следующим образом

$$\boldsymbol{u}_j = \left[\max\{\,\underline{\boldsymbol{d}}_j^{(1)}, \underline{\boldsymbol{d}}_j^{(2)}\,\},\ \min\{\,\overline{\boldsymbol{d}}_j^{(1)}, \overline{\boldsymbol{d}}_j^{(2)}\,\}\right].$$

В целях наилучшего исчерпывания множества решений системы (7) разработана процедура регулярного покрытия этого множества брусами. Интервал $\boldsymbol{d}$ разбиваем на T непересекающихся подынтервалов $\boldsymbol{d}^{(t)}$ одинаковой ширины таких, что $\boldsymbol{d} = \bigcup_{t=1}^{T} \boldsymbol{d}^{(t)}$. Для каждого интервала $\boldsymbol{d}^{(t)}$ вычисляем брус $\boldsymbol{U}^{(t)} \subseteq \Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \cap \boldsymbol{X}$, используя описанный выше алгоритм. Данную процедуру можно повторить. Возьмём в качестве начальной точки середину k-ой грани бруса $\boldsymbol{U}^{(1)}$ и найдем внутренние оценки множества решений на брусе $\left(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{k-1}, [\underline{\boldsymbol{x}}_k, \underline{\boldsymbol{u}}_k^{(1)}], \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n\right)^\top$. Аналогично в качестве начальной точки можно выбрать середины граней бруса $\boldsymbol{U}^{(T)}$. Процесс продолжаем до тех пор, пока пересечение прямой, проходящей через начальную точку параллельно оси Ox_k, с множеством $\Xi(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{P}) \cap \boldsymbol{X}$ не станет пустым или не будет представлять собой объединение интервалов, максимальная ширина которых меньше $\varepsilon > 0$.

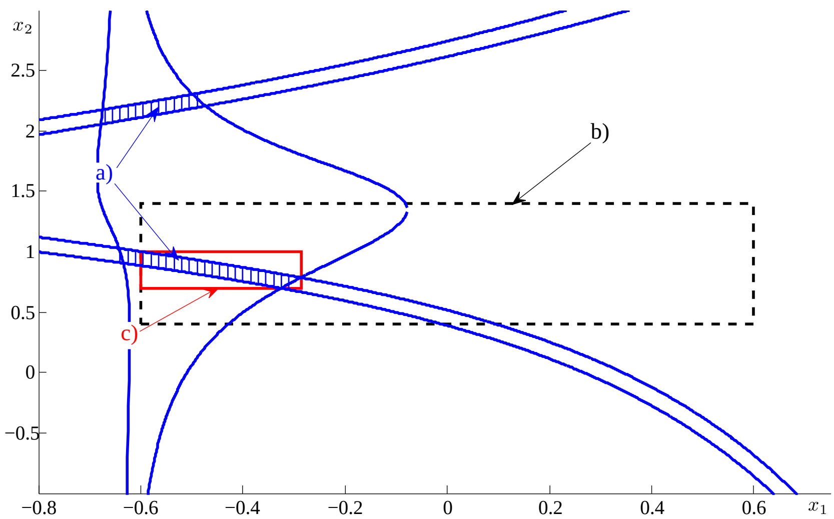

Рисунок 2 — Внешняя оценка радиальных и осевых пемещений торца лопатки.

Предложенные выше алгоритмы были применены для анализа многомерных перемещений торца лопатки силовой установки, соответствующих вектору цифровых кодов, компоненты которого с учётом погрешностей измерения задавались интервалами. Например, на рисунках 2 и 3 приведены результаты внешнего и внутреннего оценивания радиальных и осевых перемещений торца лопатки, соответствующих вектору цифровых кодов с компонентами $\boldsymbol{c}_1 = [2472, 2482]$ и $\boldsymbol{c}_2 = [2868, 2884]$ на основе градуировочных характеристик $\boldsymbol{f}_i(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} \boldsymbol{a}_{(i)k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, $i = 1, 2$, с коэффициентами

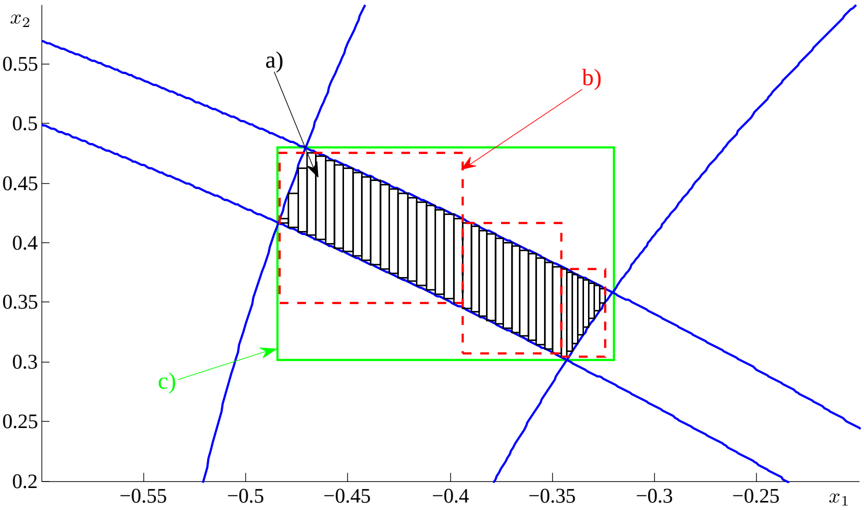

Рисунок 3 — Внутренние оценки радиальных и осевых пемещений торца лопатки.

$\boldsymbol{a}_{(1)00}$	$=$	[2557.3632,2567.3632]	$\boldsymbol{a}_{(2)00}$	$=$	[3037.7782,3053.7782]
$a_{(1)01}$	$=$	-221.0272	$a_{(2)01}$	$=$	-218.5782
$a_{(1)02}$	$=$	70.5782	$a_{(2)02}$	$=$	80.1020
$a_{(1)10}$	$=$	-297.6301	$a_{(2)10}$	$=$	317.1479
$a_{(1)11}$	$=$	301.4891	$a_{(2)11}$	$=$	-342.3596
$a_{(1)12}$	$=$	-93.0325	$a_{(2)12}$	$=$	112.5637
$a_{(1)20}$	$=$	58.3290	$a_{(2)20}$	$=$	30.1870
$a_{(1)21}$	$=$	-88.8764	$a_{(2)21}$	$=$	10.7886
$a_{(1)22}$	$=$	36.0065	$a_{(2)22}$	$=$	-19.9298

На рисунке 2 изображены: a) множество решений системы интервальных полиномиальных уравнений $\boldsymbol{F}(X) = \boldsymbol{C}$, b) исходный брус $\boldsymbol{X} = ([-0.6, 0.6], [0.4, 1.4])^\top$, заданный на основе физических соображений, c) внешняя оценка $\boldsymbol{V} = [-0.6000, -0.2861] \times [0.6978, 1.0024]$. На рисунке 3 изображены: a) внутренние оценки, b) интервальные оболочки внутренних оценок, полученных в результате трех итераций алгоритма, c) интервальная оболочка множества решений на брусе $\boldsymbol{X}$.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Разработаны и реализованы методы внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями, элементы матриц и компоненты векторов правых частей которых зависят от параметров. Методы основаны на адаптивном дроблении интервальных параметров и вычислении внутренних оценок с использованием формального и «центрового» подходов.

2. Предложена модификация «центрового подхода» для внутреннего оценивания множеств решений интервальных линейных систем со связями,

коэффициенты матрицы которой зависят от параметров, а вектор правых частей не является интервальным.

3. В целях наилучшего исчерпывания множества решений ИСЛАУ со связями (получения наиболее «представительной» оценки) разработана процедура построения его регулярного покрытия брусами.

4. Предложена процедура внешнего оценивания множеств решений систем полиномиальных уравнений, коэффициенты которых зависят от параметров. Процедура основана на интервальных методах распространения ограничений, многомерном интервальном методе Ньютона, методах дробления решений.

5. Разработаны алгоритмы оценивания множеств значений интервальных полиномов и их интервальных корней на заданном брусе, которые используются при вычислении интервальных наклонов и проверке существования решений системы интервальных уравнений на брусе.

6. Разработаны методы внутреннего оценивания множества решений системы интервальных полиномиальных уравнений, а также описаны способы построения регулярного покрытия этого множества брусами.

7. Приведены результаты применения разработанных методов и алгоритмов для решения тестовых примеров и конкретных практических задач анализа и диагностики механических конструкций.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Людвин, Д. Ю. Сравнительный анализ реализаций модификации Рона в методах дробления параметров / Д. Ю. Людвин, С. П. Шарый // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17, № 1. — С. 69–89.

2. Людвин, Д. Ю. Внутреннее оценивание множеств решений интервальных систем линейных уравнений со связями / Д. Ю. Людвин // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2013. — Т. 11, Вып. 1. — С. 78–92.

3. Lyudvin, D.Yu. Testing implementations of PPS-methods for interval linear systems / D. Yu. Lyudvin, S. P. Shary // Reliable Computing. — 2014. — Vol. 19. — P. 176–196.

Прочие публикации по теме диссертации

1. Людвин, Д. Ю. О внутреннем оценивании множеств решений интервальных линейных систем со связями / Д. Ю. Людвин // XII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 3–5 октября 2011 г., Тезисы докладов. — Новосибирск, 2011. — С. 19.

2. Людвин, Д. Ю. Внутреннее оценивание множества решений интервальных систем линейных уравнений со связями / Д. Ю. Людвин // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика: Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая — 4 июня 2011 г.). — № гос. регистр. 0321101160, ФГУП НТЦ «Информрегистр». — Новосибирск, 2011. — http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/39830/ 45772/Людвин.pdf.

3. Lyudvin, D. Yu. Comparisons of implementations of Rohn modification in PPS-methods for interval linear systems / D. Yu. Lyudvin, S. P. Shary // 15th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetics and Verified Numerics, Novosibirsk, Russia, September 23–29 2012, Book of Abstracts. – Novosibirsk, 2012. – P. 103.

4. Людвин, Д. Ю. Использование методов интервального анализа для оценки многомерных перемещений элементов конструкции лопаточной силовой установки / Д. Ю. Людвин // XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 15–17 октября 2012 г., Тезисы докладов. — Новосибирск, 2012. — С.26. — http://conf.nsc.ru/files/conferences/ym2012/fulltext/137987/139451/Lyudvin.pdf.

5. Людвин, Д. Ю. Оценивание множеств решений систем интервальных полиномиальных уравнений / Д. Ю. Людвин // XIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Томск, 15–17 октября 2013 г., Тезисы докладов. — Томск, 2013. — С.25. — http://conf.nsc.ru/files/conferences/ym2013/fulltext/175082/176771/Lyudvin.pdf.