

На правах рукописи

Белолипецкий Павел Викторович

Численное моделирование гидрофизических процессов
в стратифицированных озёрах

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2008

Работа выполнена в Институте вычислительного моделирования СО РАН

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук
Шайдуров Владимир Викторович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Черных Геннадий Георгиевич
доктор физико-математических наук
Шлычков Вячеслав Александрович

Ведущая организация: Южно-Российский региональный центр
информатизации Южного федерального
университета (г. Ростов-на Дону)

Защита состоится 10 июня 2008 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики ГПНТБ СО РАН (проспект Академика М.А. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан 8 мая 2008 г.

И.о. учёного секретаря диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор

А.Д. Рычков

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Одна из важнейших проблем, которые ставит перед человечеством научно-технический прогресс, - проблема "чистой воды". Через несколько десятилетий чистая пресная вода станет важнейшим ресурсом. Вода занимает особое положение среди природных богатств Земли - она незаменима. К истощению водных ресурсов ведет не рост расходуемой воды, а ее загрязнение. Выделяют химическое, физическое, биологическое, тепловое, радиоактивное типы загрязнений. Загрязнение воды представляет собой нередко чрезвычайно серьезную угрозу. Если поток загрязнений превышает способности экосистемы водоема к самоочищению, они накапливаются в донных отложениях, и негативные процессы усугубляются так называемым вторичным загрязнением. Каждый из водных объектов имеет определенный предел самоочищения и поэтому может выдержать только определенную нагрузку сточных вод, превышение которой разрушает его способность к самоочищению и ведет к катастрофическим последствиям.

Актуальной задачей является математическое моделирование динамики водных экосистем. Использование математического моделирования и проведение вычислительного эксперимента позволяют оценить аспекты и последствия реализации проектов, связанных с воздействием на природную среду, как в перспективе, так и при возникновении всевозможных кризисных и экстремальных ситуаций.

Целью работы является разработка одномерной вертикальной и двумерной в вертикальной плоскости математических моделей гидрофизических процессов в озёрах, создание компьютерных программ для моделирования гидрофизических и гидробиологических процессов в озёрах, проведение численных расчётов по озеру Шира.

Для достижения данной цели были поставлены и решены следующие *задачи*:

1. Разработать одномерную и двумерную модели гидрофизических процессов в озёрах с использованием эффективных алгоритмов.
2. Создать программный комплекс для моделирования гидрофизических и гидробиологических процессов в озёрах.
3. Провести численное моделирование гидрофизических процессов в озере Шира.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в разработке двумерной в вертикальной плоскости математической модели гидрофизических процессов в озёрах на основе эффективного алгоритма, проведение численного моделирования гидрофизических процессов в озере Шира.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в том, что разработанные численные модели и компьютерные программы могут быть использованы для исследования гидрофизических процессов в стратифицированных водоемах, проверки гипотез и прогноза при решении различных научно-исследовательских и практических задач, касающихся озёрных экосистем.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ–ККФН (проект № 05-01-97700_р_енисей), РФФИ-НВО (проект № 05-05-8902 НВО), РФФИ (проект № 07-01-00153_а), Министерства образования и науки Российской Федерации и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант RUX0-002-KR-06, программа «Фундаментальные исследования и высшее образование»), интеграционного проекта СО РАН № 24.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием предложенных методов и алгоритмов и подтверждается согласованием результатов численных расчетов с натурными данными и решениями тестовых задач.

На защиту выносятся разработанные одномерная и двумерная модели гидрофизических процессов в озёрах с использованием эффективных алгоритмов, созданный программный комплекс для моделирования гидрофизических и гидробиологических процессов в озёрах, а также результаты их применения к моделированию гидрофизических процессов в озере Шира.

Представление материалов диссертационной работы на конференциях. Основные результаты работы были доложены на IV Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2003), на Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2004), на конференции-конкурсе молодых учёных ИВМ СО РАН (Красноярск, 2006), на VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2006), на конференции-конкурсе молодых учёных ИВМ СО РАН (Красноярск, 2007), на VIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2007), на конференции-конкурсе молодых учёных ИВМ СО РАН (Красноярск, 2008).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе (в скобках в числителе указан общий объём этого типа публикации, в знаменателе – объём, принадлежащий лично автору) 2 статьи в издании, рекомендованном ВАК для представления результатов докторских диссертаций [1, 2] (21/15 стр.), 3 – в трудах международных и всероссийских конференций [3-5] (12/8 стр.), 2 – в материалах конференций молодых учёных [6, 7] (11/9 стр.)

Личный вклад автора. В работе [2] автор участвовал в постановке задач, конструировании численных алгоритмов решения двумерных задач ветровых течений в стратифицированных водоёмах, выполнил программную реализацию и провёл численные эксперименты. В работе [3] участвовал в конструировании численного алгоритма для одномерной вертикальной модели и его программной реализации. В работе [6] автор участвовал в постановке задачи и реализации численного алгоритма решения задачи протекания.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 101 наименований. Полный объём диссертации составляет 112 страниц, включая 39 рисунков, 5 таблиц.

Основное содержание работы

Во введении показана актуальность темы, формулируются цель работы и основные результаты.

В первой главе приводится обзор работ по математическому моделированию гидротермических процессов в озерах. Основная задача состоит в определении гидротермодинамических характеристик водоема, влияющих на динамику водных экосистем. Для этих целей могут использоваться различные модели – одномерные, двумерные, трёхмерные. Часто озёра являются достаточно однородными в горизонтальном плане и тогда применима одномерная вертикальная модель. При невыполнении условия однородности в горизонтальном направлении применяются двумерные и трёхмерные модели. Часто в этих моделях используется гидростатическое приближение. Важными частями моделей являются уравнение состояния, параметризация коэффициента вертикального турбулентного обмена, учёт ветрового напряжения и теплообмена с атмосферой. К гидрофизическим процессам в водоёмах, влияющим на функционирование экологических систем, относятся прежде всего перемешивание и теплообмен. Важным гидрофизическим параметром также является солёность.

Рассмотрены основные особенности стратифицированных озёр. Подробно описан объект исследования – солёное озеро Ши́ра. Отмечены основные процессы, происходящие в озёрах. Для моделирования турбулентных течений применяются уравнения Рейнольдса. Приведены различные полуэмпирические модели турбулентности. Предлагается использование формулы Прандтля-Обухова для коэффициента вертикального турбулентного обмена. Приведено уравнение переноса и диффузии для определения распределения температуры воды. Выписаны различные соотношения для вычисления составляющих те-

плового баланса. Приведены математические модели гидротермики водоёмов различного уровня сложности: трёхмерные модели, двумерные модели (в вертикальной плоскости, плановые) и одномерные модели.

Во второй главе описаны разработанные математические модели гидрофизических процессов в озёрах. Полученные в результате численных расчетов распределения гидрофизических компонентов должны служить входными данными для биологических моделей. Основными гидрофизическими процессами, влияющими на экологию водоёма, являются перемешивание и тепло- и массоперенос. Из анализа результатов натурных наблюдений на озере Шира следует, что в глубоководной части водоёма концентрации исследуемых характеристик зависят в основном от глубины и практически не зависят от горизонтальных координат. Таким образом, для достижения приемлемой для исследователей скорости расчётов и адекватного описания происходящих процессов можно использовать двумерные и одномерные вертикальные модели.

Формирование температурного режима в непроточном стратифицированном водоеме осуществляется вследствие ветровых течений и теплообмена с атмосферой. Задача для температуры в одномерном приближении формулируется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + a b \frac{F_I e^{-bz}}{c_p r_0}. \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} K_T \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{F_n}{c_p r_0} \quad \text{при } z = 0, \\ K_T \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = H. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь T – температура воды, $K_T(z)$ – коэффициент вертикального турбулентного обмена, F_n – полный тепловой поток через свободную поверхность, F_I – приходящая коротковолновая радиация, b – коэффициент поглощения излучения, a – параметр, определяющий часть коротковолновой радиации, проникающей на глубину ($0 \leq a \leq 1$), c_p – удельная теплоемкость воды, r_0 – характерное значение плотности воды, H – глубина водоема.

Аналогично задача ставится для определения вертикального распределения солености:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_S \frac{\partial S}{\partial z} \right), \\ K_S \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -F_S, \quad K_S \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=H} = F_{SH}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь S – соленость воды, $K_S(z)$ – коэффициент вертикального турбулентного обмена для солености, F_{SH} – массообмен с дном, F_S – поток через свободную поверхность. Необходимо также задать начальные распределения температуры и солености: $T(0, z) = T^0(z)$, $S(0, z) = S^0(z)$.

Существенное влияние на тепломассоперенос оказывает турбулентность. Для параметризации вертикального турбулентного обмена применяется формула, полученная на основе формулы Прандтля-Обухова и приближенного решения Экмана для ветровых течений:

$$K_z = \begin{cases} (0.05h_1)^2 \sqrt{\left(\frac{t}{r_0 K_0}\right)^2 e^{-2az} - \frac{g}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)} + K_{\min} & \text{при } V \geq 0, \\ K_{\min} & \text{при } V < 0, \end{cases} \quad (4)$$

здесь $B = \left(\frac{t}{r_0 K_0}\right)^2 e^{-2az} - \frac{g}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)$, $t = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}$ – напряжение трения ветра, $K_{\min} = 0.02$ см²/сек – минимальное значение коэффициента вертикального турбулентного обмена,

$K_0 = \frac{(0.05p)^2 t}{2r_0 f}$, $a = \sqrt{\frac{f}{2K_0}}$, $h_1 = p \sqrt{\frac{K_0}{2f}}$, f – параметр Кориолиса.

$$K_T = K_S = \begin{cases} K_z & \text{при } K_z > K_{\min}, \\ 0.1K_z & \text{при } K_z = K_{\min}. \end{cases} \quad (5)$$

В описанной методике интенсивность вертикального турбулентного обмена определяется градиентом скорости и стратификацией.

Для пресной воды плотность зависит только от температуры, уравнение состояния соленой воды принимается в приближении Буссинеска для морской воды:

$$r = r_0 \left(e_1 + e_2 \frac{T}{T_0} + e_3 \frac{S}{S_0} \right), \quad (6)$$

где $r_0 = 1.0254$ г/см³, $e_1 = 0.9753$, $e_2 = -0.00317$, $e_3 = 0.02737$, $T_0 = 17.5$ °С, $S_0 = 35$ ‰.

Согласно натурным измерениям, плотность соленой воды оз. Шира отличается от рассчитанной по формуле (6). Поэтому коэффициенты e_1 , e_2 , e_3 были уточнены согласно экспериментальным данным:

$$e_1 = 0.984156, \quad e_2 = -0.007079, \quad e_3 = 0.0297595.$$

Важными параметрами, влияющим на температурный режим водоема, являются тепловые потоки. Полный тепловой поток через свободную поверхность находится по известным соотношениям (Белолипецкий и др., 1994; Belolipetskii, Genova, 1998):

$$F_n = (1 - a)F_I + F_{\text{эф}} - F_m - F_{uc}, \quad (7)$$

где $F_{эф}$ – эффективное длинноволновое излучение, F_{uc} – теплоотдача испарением, F_m – конвективный теплообмен, F_I – приходящая коротковолновая радиация.

Известны различные формулы для вычисления составляющих теплового потока через свободную поверхность. В данной работе использовались следующие соотношения. Коротковолновая радиация вычисляется по формуле

$$F_I = 0.94 \cdot Q(h_c)(1 - 0.65N_0^2),$$

где

$$Q(h_c) = \left(0.66 + 0.34 \frac{g - 0.9 + 0.4 \sin h_c}{0.1 + 0.4 \sin h_c} \right) \frac{k_n \sin^2 h_c}{r^2 (\sin h_c + 0.107)},$$

$$h_c = \arcsin \left(\sin j_k \sin g_1 + \cos j_k \cos g_1 \cos \left((t - t_n) \frac{P}{12} \right) \right),$$

$$g_1 = 0.4 + 23.4 \cdot \cos \left(\frac{2P}{365} (d + 192) \right) - 0.4 \cdot \cos \left(\frac{2P}{365} (d - 192) \right),$$

$k_n = 1.11 - 1.23$ в зависимости от влагосодержания атмосферы, N_0 – балл общей облачности в долях единицы, h_c – высота солнца в градусах, r – плотность воздуха, $\gamma = 0.94$,

j_k – широта местности в градусах, $t = 0, 1, \dots, 23$ – местное астрономическое время; $t_n = 12$ – полуденное местное время; g_1 – склонение солнца, d – порядковый номер суток с начала года).

Длинноволновое излучение

$$F_{эф} = 4.46 \cdot 10^{-13} (1 + 0.17N_0^2)(T_a + 273.15)^6 - 264 - 4.7 \cdot T_s^2,$$

турбулентный обмен между водной поверхностью и атмосферой

$$F_m = 0.459 \cdot f(W_2) \cdot (T_s - T_a),$$

поток тепла, обусловленный испарением

$$F_{uc} = f(W_2) \cdot (e_s - e_a),$$

здесь

$$e_s = 25.4 \exp \left(17.62 - \frac{5278}{T_s + 273.15} \right), \quad e_a = 25.4 \exp \left(17.62 - \frac{5278}{T_a + 273.15} \right),$$

$$T_d = \frac{5278 \cdot (T_a + 273.15)}{5278 - \ln y} - 273.15, \quad f(W_2) = 4.3 \cdot |W_2|,$$

T_s – температура поверхности воды ($^{\circ}\text{C}$), T_a – температура воздуха ($^{\circ}\text{C}$), N_0 – облачность (доли единицы), e_s – давление насыщенного пара при данной температуре водной поверхности (Мб), e_a – давление насыщенного пара в атмосфере, измеренное на одной высоте с температурой (Мб), W_2 – скорость ветра на высоте 2 м (м/сек), y – относительная влажность воздуха.

Напряжение ветра определяется по формуле Давтян Н.А.:

$$\bar{t} = r_a(0.9 + 0.107|\bar{W}_2|) \cdot 10^{-3} |\bar{W}_2| \bar{W}_2, \quad (8)$$

где r_a – плотность воздуха, $\bar{W}_2 = (w_x, w_y)$ – вектор скорости ветра на высоте 2 м (м/с).

Численный метод решения дифференциальных уравнений состоит в последовательном расчете конвективного переноса и диффузии. Конвективный перенос рассчитывается с помощью явной конечно-разностной схемы против потока. Диффузия рассчитывается с помощью неявной центральной конечно-разностной схемы, а получающаяся система уравнений решается методом прогонки. Имеется возможность расчёта на неравномерных сетках.

Математическая модель двумерных в вертикальной плоскости ветровых течений в замкнутых стратифицированных водоемах основывается на уравнениях турбулентных течений неоднородной жидкости в приближениях Буссинеска и "твердой крышки", на уравнениях конвекции-диффузии для температуры и солёности воды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{r_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{r_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{r}{r_0} g, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} K_{zT} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_{xT} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} + W \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} K_{zS} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_{xS} \frac{\partial S}{\partial x}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$r = r_0(1 + r_1(T, S)).$$

Здесь U, W – составляющие скорости течения воды в направлениях Ox и Oz , ось Oz направлена вниз, t – время, r – плотность воды, r_0 – характерная плотность воды, p – давление, g – ускорение свободного падения, T – температура воды, S – солёность воды, $K_x, K_{xT}, K_{xS}, K_z, K_{zT}, K_{zS}$ – коэффициенты турбулентного обмена.

Введем функцию p^* :

$$p^* = p - gr_0 \int_0^z r_1 dz, \quad (12)$$

тогда уравнения (9) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{r_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U}{\partial x} - g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z r_1 dz, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{r_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial W}{\partial x} + g, \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (13), (10), (11) дополняются начальными и граничными условиями. Граничные условия на водной поверхности ($z=0$)

$$\begin{aligned} K_z \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{t}{r_0}, \quad W = 0, \\ K_T \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{F_n}{c_p r_0}, \quad K_S \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{F_S}{c_p r_0}, \end{aligned} \quad (14)$$

на дне и на боковой поверхности ($z=H$ или $x=x_i$)

$$\begin{aligned} U &= 0, \quad W = 0, \\ \cos(n, x) K_{xT} \frac{\partial T}{\partial x} + \cos(n, z) K_{zT} \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{F_{\partial n}}{c_p r_0}, \\ \cos(n, x) K_{xS} \frac{\partial S}{\partial x} + \cos(n, z) K_{zS} \frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{F_{\partial S}}{c_p r_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь n - внешняя нормаль к поверхности, t - напряжение трения ветра, F_n - полный поток тепла через свободную поверхность, $F_{\partial n}$ - теплообмен с ложем водоема, F_S - поток соли через свободную поверхность, $F_{\partial S}$ - массообмен с ложем водоема.

Для определения коэффициента вертикального турбулентного обмена применяется формула Прандтля-Обухова:

$$K_z = \begin{cases} (0.05h)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{r_0} \frac{\partial r}{\partial z}} + K_{\min} & \text{при } \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{r_0} \frac{\partial r}{\partial z} \geq 0, \\ K_{\min} & \text{при } \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{r_0} \frac{\partial r}{\partial z} < 0, \end{cases} \quad (16)$$

где K_{\min} - фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена, h - глубина верхнего квазиоднородного слоя, которая определяется по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{r_0} \frac{\partial r}{\partial z} \leq 0.$$

Если h получается больше половины максимальной глубины водоема, то h приравнивается этой половине.

Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена K_x , K_{xT} , K_{xS} считаются постоянными. $K_{zT} = a_T K_z$, $K_{zS} = a_S K_z$, где a_T , a_S - турбулентные числа Прандтля.

Для построения численного алгоритма применяются метод расщепления по физическим процессам, метод конечных элементов и схема с разностями против потока. В соответствии с методом расщепления, на каждом временном шаге вначале рассчитываются течения при известном поле плотности, затем по найденной картине течения рассчитываются распределения температуры и солёности, и по ним находится новое распределение плотности. В каждом из этих шагов отдельно рассчитываются конвекция и диффузия. Для расчёта конвективного переноса используется конечно-разностная схема против потока. Диффузия и другие процессы рассчитываются с помощью метода конечных элементов. Разработан алгоритм построения квазиравномерной прямоугольной конечно-элементной сетки на непрямоугольных областях. Используются билинейные базисные функции и экономичный алгоритм для хранения матрицы жёсткости.

Для движений, горизонтальный масштаб которых много больше вертикального, применимо гидростатическое приближение:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g r_0 (1 + r_1). \quad (17)$$

В приближении гидростатики уравнения гидродинамики для исследования двумерных в вертикальной плоскости течений имеют следующий вид:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U}{\partial z} + g \frac{\partial V}{\partial x} - g \int_0^z \frac{\partial r_1}{\partial x} dz, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h U dz = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (20)$$

где $V = V(t, x)$ - функция, описывающая положение водной поверхности.

Для решения уравнений (17) - (20) используется метод расщепления (или как он ещё называется – метод проекций). В соответствии с ним решение системы разбивается на ряд последовательных этапов, в каждом из которых решается одно уравнение.

Этап 1:

$$\frac{\tilde{U} - U^n}{\Delta t} + U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + W^n \frac{\partial U^n}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Этап 2:

$$\begin{aligned} \frac{U^\bullet - \tilde{U}}{\Delta t} &= \frac{\int K_x}{\partial x} \frac{\int U^\bullet}{\int x} + \frac{\int K_z}{\int z} \frac{\int U^\bullet}{\int z} - F_1^n, \quad F_1^n = g \int_0^z \frac{\partial r_1^n}{\partial x} dz, \\ K_z \frac{\int U^\bullet}{\int z} \Big|_{z=0} &= -\frac{t_x}{r_0}, \quad U^\bullet \Big|_{z=H_i} = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U^n}{\partial z} - F_1^n \right), \\ U^\bullet \Big|_{x=x_i} &= \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial U^n}{\partial x} - F_1^n \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Этап 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{g \Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U^\bullet dz, \quad \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -\frac{1}{g \Delta t} U^\bullet \Big|_{x=x_0}, \\ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_L} &= -\frac{1}{g \Delta t} U^\bullet \Big|_{x=x_L}. \end{aligned} \quad (23)$$

Этап 4:

$$U^{n+1} = U^\bullet + g \Delta t \frac{\partial V}{\partial x}, \quad W^{n+1} = -\int_0^z \frac{\partial U^\bullet}{\partial x} dz + \frac{z}{H} \int_0^H \frac{\partial U^\bullet}{\partial x} dz. \quad (24)$$

Этапы 3 и 4 упрощаются. Проинтегрируем уравнение (23) относительно V по x и с учетом граничных условий для непроточного водоема из (24) получим:

Этап 3а:

$$U^{n+1} = U^\bullet - \frac{1}{H} \int_0^H U^\bullet dz, \quad W^{n+1} = -\int_0^z \frac{\partial U^\bullet}{\partial x} dz + \frac{z}{H} \int_0^H \frac{\partial U^\bullet}{\partial x} dz. \quad (25)$$

Таким образом, исключается этап численного решения задачи (23), компоненты вектора скорости определяются в результате последовательного выполнения этапов 1, 2 и 3а.

В третьей главе описываются разработанный комплекс программ и результаты численных экспериментов, выполненных для озера Шира.

На основе описанных численных алгоритмов разработан комплекс программ для исследования стратифицированного водоема. Программы позволяют проводить расчёты, изменяя начальные данные, метеоданные, расчётные параметры, сетку. С помощью небольших и понятных изменений кода программы можно изменять уравнения модели, добавлять или удалять расчётные переменные и параметры.

Для проверки адекватности моделей, алгоритмов и программ и возможности их применения проведено сравнение рассчитанных распределений с результатами натурных измерений на озере Шира. Следует отметить, что из гидрофизических параметров имеются данные только по вертикальным распределениям температуры и солёности в глубоководных

водной части озера. Эти измерения проводились в течении нескольких лет в различные периоды года сотрудниками Института биофизики СО РАН. Эти данные использовались для верификации моделей. Характерные распределения температуры и солёности зимой, весной, летом и осенью представлены на рис. 1.

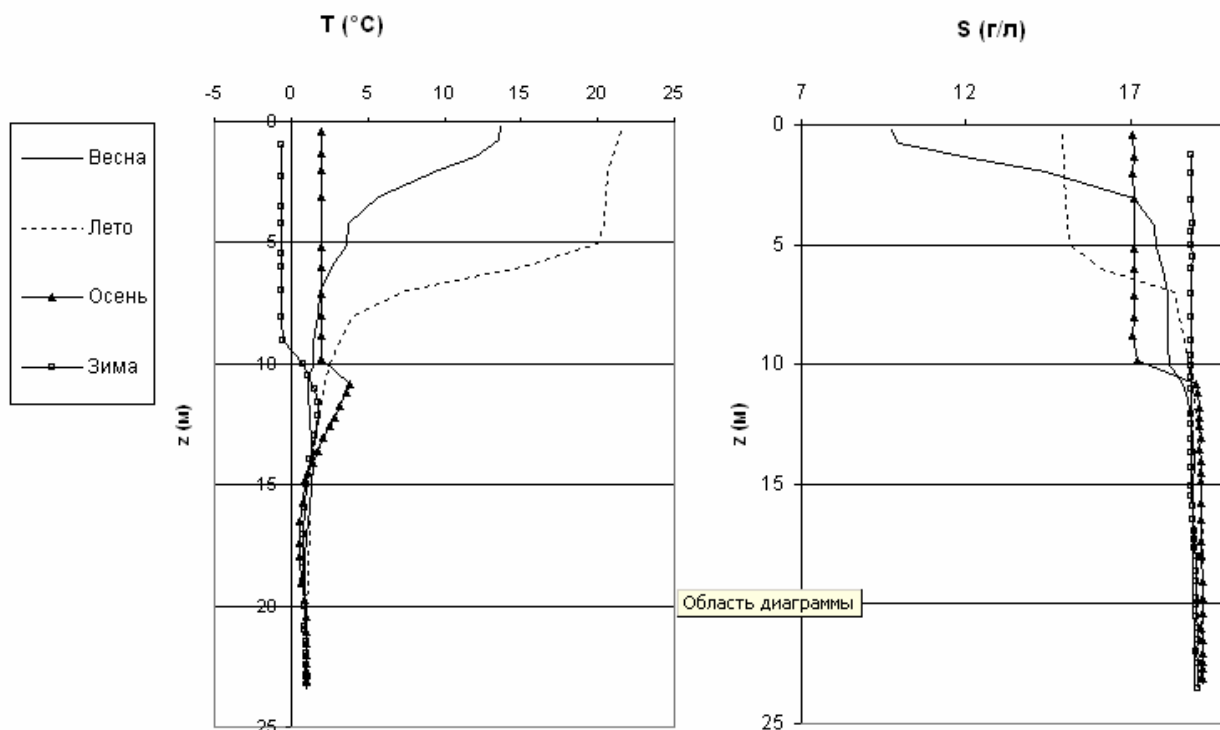


Рис. 1. Характерные распределения температуры и солёности в озере Шира

Для разных сезонов распределения существенно различные. Летом формируется устойчивая стратификация с двумя различными слоями верхним и нижним. Выполнены численные эксперименты по динамике вертикальных распределений температуры и солёности воды. Как двумерная, так и одномерная модель показали хорошие результаты. Разработанные компьютерные модели позволяют определять качественную вертикальную структуру, положение переходной зоны для температуры и солёности, значения гидрофизических параметров в нижнем и верхнем слоях. Для примера, на рис. 2 приведён результат расчета по одномерной модели, на рис. 3 – по двумерной модели. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными натурных измерений.

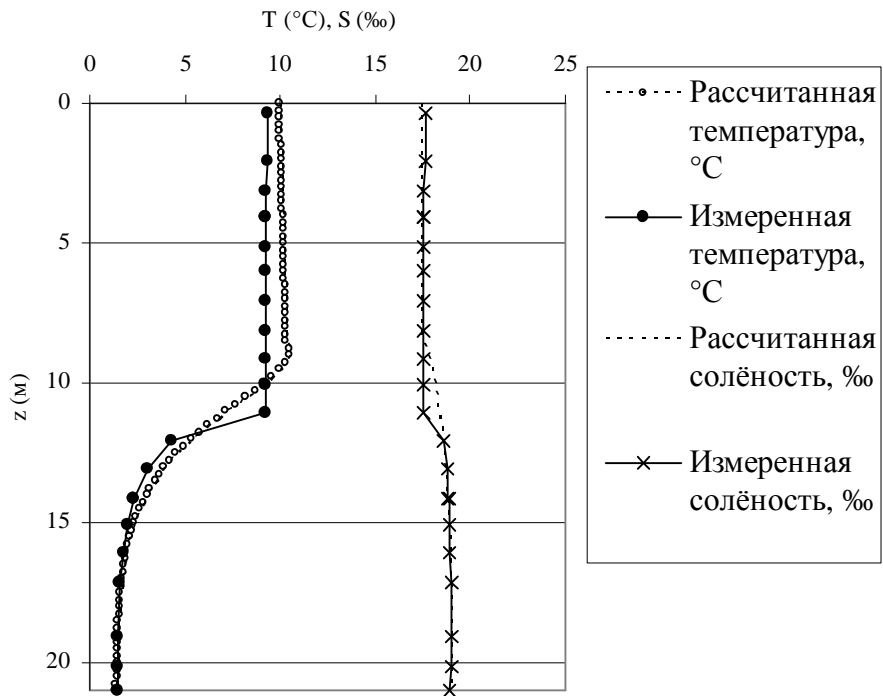


Рис. 2. Сравнение натуральных и расчётных данных (08.10.02). Одномерная модель.

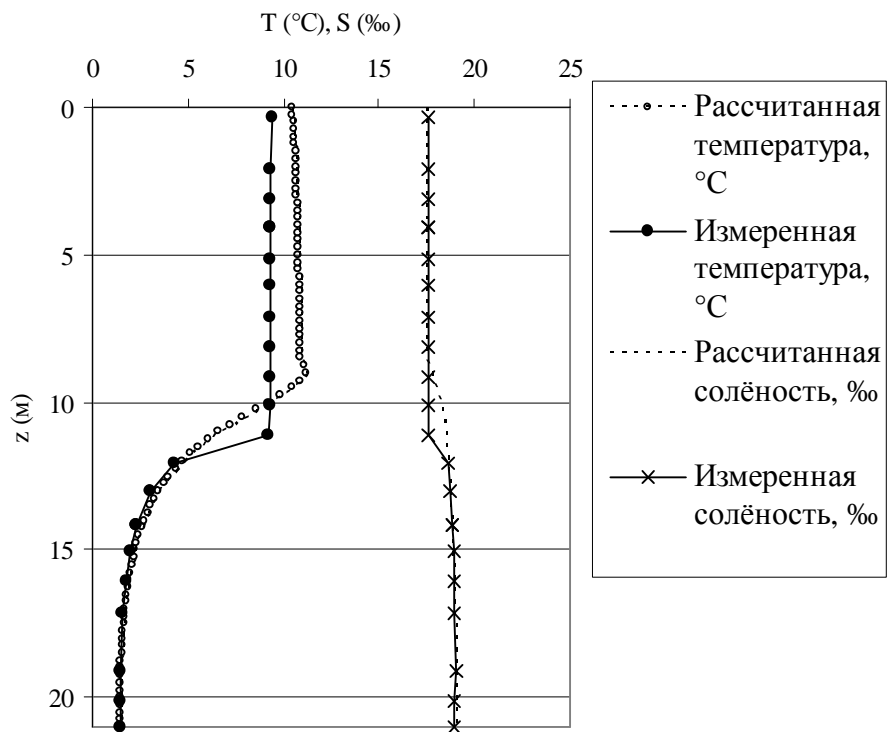


Рис. 3. Сравнение натуральных и расчётных данных (08.10.02). Двумерная модель.

В одномерной модели перемешивание происходит только под влиянием турбулентности, в двумерной модели на перемешивание оказывают влияния ещё и течения. Согласование расчетных данных с натурными говорит об адекватном моделировании ветровых течений. Картина ветровых течений зависит от силы ветра, стратификации и геометрии водоема. Для однородной жидкости в водоеме формируется одна циркуляционная зона, причем с увеличением длины водоема возрастает максимальное значение скорости течения воды. Влияние размеров водоема, силы ветра и стратификации было рассмотрено на следующих примерах. Пресноводное озеро длиной 500 м и максимальной глубиной 20 м, с линейным перепадом температуры от 7 до 4 градусов Цельсия в верхнем восьмиметровом слое и далее на глубине постоянном. В данном случае при скорости ветра более 9 м/с формируется одна циркуляционная зона с небольшими вихрями у дна (рис. 4, 5). При скорости ветра 5 м/с в водоеме образуются две циркуляционные зоны (рис. 6, 7). Для соленой воды при том же перепаде температуры и постоянной солености и для скорости ветра 20 м/с формируются две циркуляционные зоны. Для пресноводного водоема длиной 5000 м, максимальной глубиной 20 м и тем же профилем температуры формируется одна циркуляционная зона с небольшими по размеру вихрями у дна. Для соленой воды такого же водоема формируются две циркуляционные

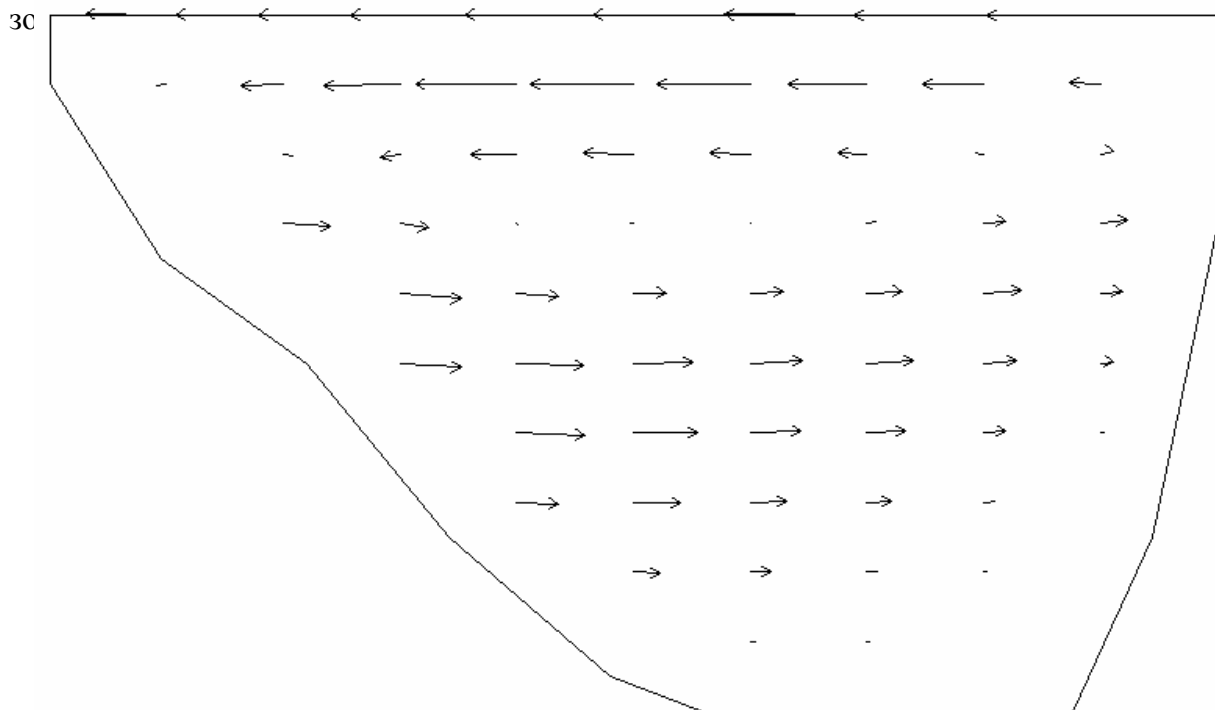


Рис. 4. Картина течений с одной циркуляционной зоной.

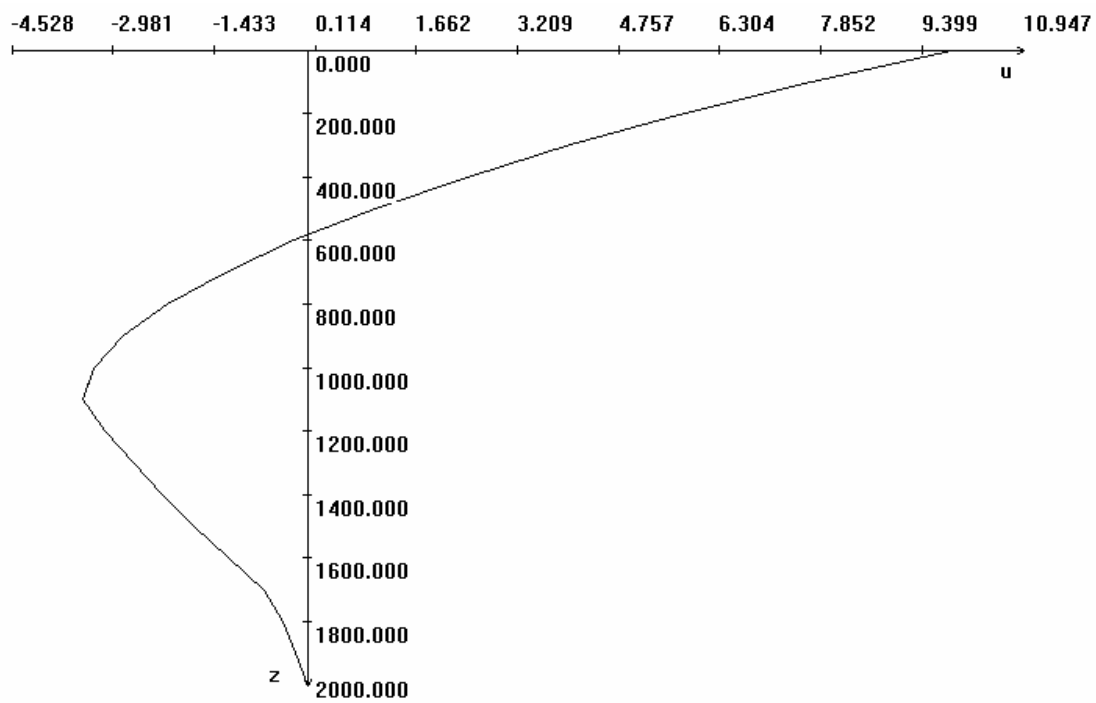


Рис. 5. Вертикальный профиль горизонтальной компоненты скорости в глубоком створе для течений с одной циркуляционной зоной.

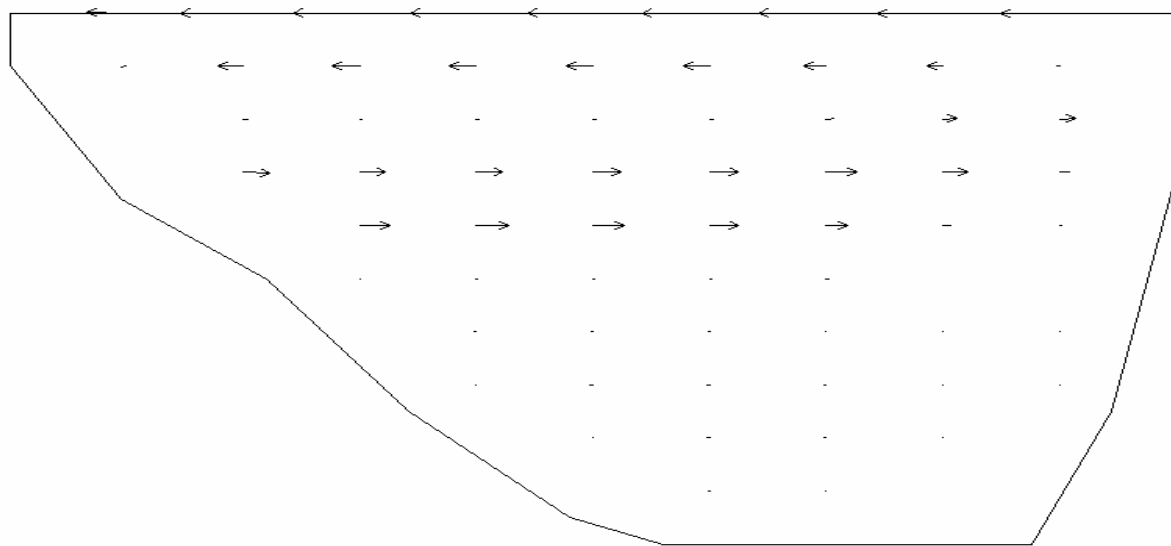


Рис. 6. Картина течений с двумя циркуляционными зонами.

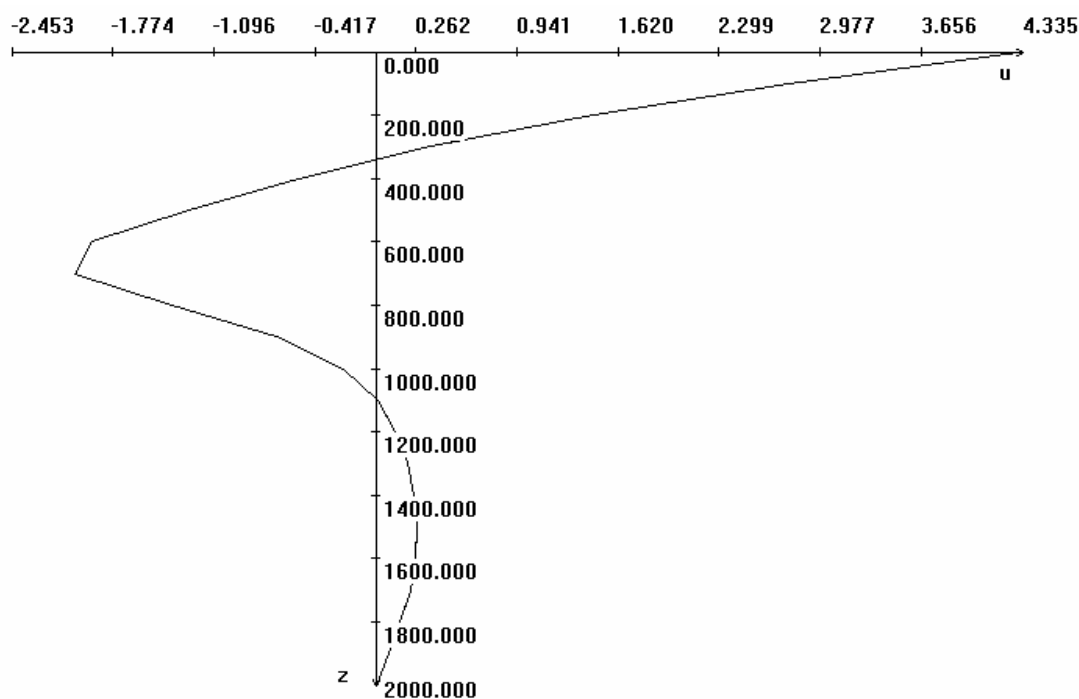


Рис. 7. Вертикальный профиль горизонтальной компоненты скорости в глубоком створе для течений с двумя циркуляционными зонами.

В летний период в озере Шира формируется ярко выраженная температурная стратификация. С учетом неравномерной минерализации воды по глубине образуется стратификация, близкая к двухслойной. Значительные градиенты температуры в термоклине ($4-6^{\circ}\text{C м}^{-1}$) препятствуют проникновению в глубь ветровой циркуляции и ограничивают ее распространение верхним квазиоднородным слоем. На основании проведенных расчетов можно сделать предположение о возможности перемешивания всей толщи воды в озере Шира в весенний и осенний периоды, когда нет ярко выраженного термоклина. В летний период вовлечение придонных слоев в циркуляционное движение возможно только при очень сильных и продолжительных ветрах.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы:

1. Разработана двумерная в вертикальной плоскости математическая модель гидрофизических процессов в озёрах. Построен численный алгоритм на основе метода расщепления по физическим процессам, методов конечных элементов и конечных разностей. Численный алгоритм проверен на специально построенных задачах с точными аналитическими решениями.

2. Разработан эффективный алгоритм на основе гидростатического приближения и метода расщепления, позволивший сохранить приемлемую точность на грубых в горизонтальном направлении сетках и увеличить скорость расчётов.

3. Разработан комплекс компьютерных программ, реализующий одномерные и двумерные гидрофизические модели для стратифицированного водоема. Разработана программная платформа для реализации моделей водной экосистемы. Комплекс программ позволяет проводить численные исследования вертикальной структуры водоема для заданных метеоданных, начальных данных, батиметрии, расчётных параметров и сетки. С помощью небольших и понятных изменений кода программы можно изменять уравнения модели, добавлять или удалять расчётные переменные и параметры. Комплекс передан в Институт биофизики СО РАН для исследования вертикальной структуры водной экосистемы озера Шира.

4. Выполнено численное моделирование гидрофизических процессов в озере Шира. Результаты численных экспериментов согласуются с натурными данными. Компьютерная модель позволяет прогнозировать динамику верхнего квазиоднородного слоя (эпилимниона) в зависимости от метеоданных, в частности, определить вертикальную плотностную стратификацию, которая оказывает решающее влияние на пространственно-временные распределения гидрохимических компонент и динамику планктонных организмов в глубоких озерах. Достаточно хорошее согласование расчетов с полевыми данными позволяет использовать предлагаемую модель для прогноза динамики соответствующих характеристик водной толщи при гипотетических сценариях метеоусловий, например, при моделировании поведения экосистемы озера в ответ на погодные аномалии, вызванные глобальными изменениями климата (слишком теплые или холодные сезоны, ураганные ветры и т.п.).

Список основных работ по теме диссертации.

Публикации в издании, рекомендованном ВАК:

1. Белолипецкий П.В. Численное моделирование двумерных в вертикальной плоскости ветровых течений в стратифицированных водоемах методом расщепления // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 19-28.
2. Белолипецкий В.М., Белолипецкий П.В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах методом расщепления. Гидростатическое приближение // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 5, С. 21-31.

Публикации в трудах международных и всероссийских конференций:

3. Белолипецкий П.В., Генова С.Н., Грицко В.В. Компьютерная модель вертикальной структуры водоема // Вычислительные технологии.-2004.-Т.9.-Вестник КазНУ им. аль-Фараби, сер. математика, механика, информатика №3 (42).- Совместный выпуск. Ч 1. – С. 289-294.

4. Белоліпецкі П.В. Численне мадэліраванне двумерных ветравых теченняў у стратыфіцыраваных вадоемах // Матэрыялы Міжнароднай навучнай студэнцкай канферэнцыі «Студэнт і навучна-тэхнічны прагрэс»: Матэматыка / Новасіб. гос. універсітэт. Новасібірск, 2004. С.20-21.

5. Белоліпецкі П.В. Численне мадэліраванне ветравых теченняў у стратыфіцыраваных вадоемах метадом канечных элементаў // Труды VI канферэнцыі «Дынаміка і тэрміка рэк, вадохранілішч і прыбярэжнай зоны морей». – 2004, Масква. – С. 26-29.

Публікацыі ў трудах канферэнцый маладых учыных:

6. Белоліпецкі П.В., Асіпов М.В. Численне мадэліраванне двумерных у вертыкальнай плоскасці стратыфіцыраваных теченняў у проточных вадоемах // Матэрыялы канферэнцыі маладых учыных ІВМ СО РАН. Краснаярск: ІВМ СО РАН, 2006. С. 5-9.

7. Белоліпецкі П.В. Комплекс камп'ютэрных праграм для ісследавання гідробіялагічных і гідрфізічных працэсаў у азерах // Матэрыялы канферэнцыі маладых учыных ІВМ СО РАН. – Краснаярск: ІВМ СО РАН, 2007. – С. 4-9.