На правах рукописи

Гейдаров Назим Абульфат оглы

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кемерово - 2011

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет» (КемГУ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Захаров Юрий Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Черный Сергей Григорьевич

кандидат физико-математических наук Паничкин Алексей Васильевич

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН (ИВМ СО РАН), г. Красноярск

Защита состоится «28» декабря 2011 г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ003.046.01 в Учреждении Российской академии наук Институте вычислительных технологий Сибирского отделения РАН (ИВТ СО РАН) по адресу 630090, г. Новосибирск, проспект академика М.А. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики ГПНТБ СО РАН (г. Новосибирск, проспект академика М.А. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан «25» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д. ф.-м. н., профессор Л.Б. Чубаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На практике часто возникает необходимость исследования стационарных течений, возникающих в каналах под действием перепада давления. Таковы, например, задачи о течениях жидкости в трубопроводах, насосах, отопительных котлах или подземных каналах, течениях воздуха в системе вентиляции, задачи о токе крови в сосудах и аппарате искусственного кровообращения.

При изучении подобных явлений методами математического моделирования зачастую удовлетворительной оказывается модель вязкой жидкости, описываемая системой дифференциальных уравнений Навье-Стокса, которые в таких случаях обыкновенно выписываются в форме естественных переменных «скорость-давление». На входе и выходе из канала задается перепад давления. При этом на этих границах задаются условия только на касательную составляющую вектора скорости. Таким образом, в исходной постановке отсутствуют условия на нормальную компоненту вектора скорости на входе и выходе из канала, а также условия на давление на твердых стенках.

Следовательно, при численном решении дифференциальной краевой задачи разностными методами возникает необходимость замыкания полученной в результате разностной аппроксимации системы алгебраических уравнений. Эта система в нашем случае является нелинейной и поэтому для её решения, в силу большой размерности, необходимо использовать специальные методы решения.

Таким образом, при численном решении задачи о течении вязкой жидкости, вызванном заданным перепадом давления, мы сталкиваемся с существенными трудностями как на этапе построения разностной задачи, так и при её решении. При преодолении этих трудностей появляется возможность численно решать прикладные задачи, имеющие народнохозяйственное значение.

Цель работы состояла в разработке технологии решения стационарной задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости при заданном перепаде давления и применении технологии при решении двух- и трехмерных задач.

Основные результаты, выносимые на защиту:

В работе присутствуют результаты, соответствующие трем пунктам паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

Пункт 3 (разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий):

1. Технология численного решения задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления, включающая аппроксимацию исходной системы дифференциальных уравнений, замыкание полученной разностной задачи, применимое в тех случаях, когда сложно поставить условия на какие-либо компоненты вектора решения на одной из границ, а также метод решения системы нелинейных уравнений и алгоритм выделения устойчивого решения;
2. Градиентное обобщение метода последовательной верхней релаксации для решения систем линейных алгебраических уравнений;
3. Метод последовательной верхней релаксации решения систем билинейных алгебраических уравнений с покомпонентной вариационной оптимизацией итерационных параметров;

Пункт 4 (реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента):

4. Расширяемый и конфигурируемый программный комплекс, предназначенный для решения задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости, вызванном заданным перепадом давления. Данный комплекс состоит из конструктора областей, позволяющего задавать область течения, краевые условия и параметры сетки, библиотек классов, предназначенных для решения двух- и трехмерных задач в указанной постановке, модулей проверки решений, модуля постобработки для последующей визуализации результатов;

Пункт 5 (комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента):

5. Результаты расчетов двух- и трехмерных задач о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления. Показано, что в случае, когда постановка условий на компоненты вектора скорости затруднена на участках протекания границы, предлагаемая в работе технология позволяет найти решения, для которых выполнены базовые физические принципы и допущения.

Научная новизна работы.

1. Предложена оригинальная технология решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления.
2. Впервые построено градиентное обобщение метода последовательной верхней релаксации решения систем линейных алгебраических уравнений.
3. Построен оригинальный метод последовательной верхней релаксации для решения систем билинейных алгебраических уравнений.
4. С помощью созданного программного комплекса впервые решены следующие двух- и трехмерные задачи о течении, вызванном перепадом давления: задачи о течении при наличии внутренних источников, о течении в канале с фильтрацией, в цилиндрическом канале с закрученным на входе потоком.

Обоснованность и достоверность основных результатов обеспечивается использованием полностью консервативных разностных схем для аппроксимации решаемой дифференциальной задачи, сходящимися итерационными методами решения систем нелинейных алгебраических уравнений, хорошим совпадением результатов методических расчётов с точными решениями и решениями полученными другими авторами.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость работы обуславливается новизной предложенной технологии решения задач о течении, вызванном перепадом давления, и результатов их численного моделирования. Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанных алгоритмов и реализующих их программных комплексов при решении ряда производственных задач угольной, добывающей промышленности, социальной сферы.

Представление работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на V Всероссийской научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск 2006; XX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», Ярославль 2007; VII Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии», Кемерово 2008; международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании», Алматы (Казахстан) 2008; 21ой всероссийской конференции «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности», Кемерово 2009; международной конференции математических и информационных технологий, Капаоник (Сербия) 2009; VII всероссийском семинаре вузов по теплофизике и энергетике, Кемерово 2011.

Основные результаты докладывались на семинарах: на кафедре вычислительной математики (КемГУ) на семинаре «Математические модели. Методы решения», Кемерово (под рук. проф. Ю.Н. Захарова), на кафедре НИТ (КемГУ) на семинаре «Информационные технологии и математическое моделирование», Кемерово (под рук. проф. К.Е. Афанасьева), в институте вычислительных технологий СО РАН на семинаре «Информационно-вычислительные технологии», Новосибирск (под рук. акад. Ю.И. Шокина и проф. В.М. Ковени), в институте вычислительного моделирования СО РАН на семинаре «Математические методы в механике», Красноярск (под рук. проф. В.К. Андреева).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций, в знаменателе – объем, принадлежащий лично автору) 2 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК (1.6/0.7), 1 – в рецензируемом журнале (0.6/0.3), 6 – в трудах международных и всероссийских конференций (2.6/1.4), а также свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора.

В [1] автором реализованы алгоритмы, входящие в состав зарегистрированного программного комплекса. В [2] автором получено численное решение задачи о течении вязкой жидкости в многосвязной области под действием перепада давления. В [3, 6, 7, 8] с помощью подготовленного программного комплекса получены численные решения двух- и трехмерных задач о течении жидкости под действием заданного перепада давления. В [4, 5, 9] автором получены расчётные формулы итерационных параметров для градиентного обобщения метода последовательной верхней релаксации решения линейной системы алгебраической системы и метода ПВР для билинейной системы алгебраических уравнений. В [10] автором показана устойчивость полученных численных решений задачи о течении вязкой жидкости, вызванном заданным перепадом давления.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка цитируемой литературы из 116 наименований и приложения. Полный объем диссертации составляет 122 страницы (66 рисунков и 1 таблица).

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физ.-мат. наук профессору Ю.Н. Захарову за поддержку и постоянное внимание в ходе выполнения работы. Хочется также поблагодарить кандидата физ.-мат. наук В.В. Рагулина за многочисленные обсуждения и консультации. Особая благодарность – моей жене В.В. Гейдаровой за терпение и поддержку.

Содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы исследования, содержится обзор литературных источников по теме диссертационной работы, излагаются цели и задачи исследования.

Первая глава посвящена краткому описанию математической модели, примерам практических задач, решение которых сводится к исследованию этой модели, разностным схемам, применяемым методам решения, описанию применяемого программного комплекса.

В **параграфе 1.1** приводится система дифференциальных уравнений Навье-Стокса, моделирующая стационарную задачу о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления

$$(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u}+\nabla p-\nu\Delta\bar{u}=\bar{f} \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\bar{u}=0, \quad (x,y,z)\in\Omega, \tag{2}$$

где $\bar{u}=(u,v,w)$ - вектор скорости, $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$, $p=p(x,y,z)$ - давление, $\bar{f}$ - известный вектор правой части, $\nu>0$ - коэффициент кинематической вязкости. На рис. 1 показана возможная область решения Ω.

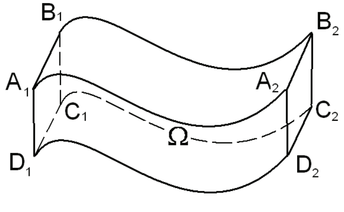


Рис. 1. Область течения

Для системы (1)-(2) рассматриваются две постановки задачи. Первая заключается в задании на участках протекания поля скоростей, а на твердых стенках – условий прилипания. При этом ставятся следующие краевые условия.

$$\bar{u}\Big|_{\Gamma_1}=\bar{u}_1(x,y,z),\ \bar{u}\Big|_{\Gamma_2}=\bar{u}_2(x,y,z),\ \bar{u}\Big|_{\Gamma_3}=0, \tag{3}$$

где Γ_1 и Γ_2 - входная и выходная границы (сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на рис. 1), Γ_3 - твердые стенки (поверхности $A_1B_1A_2B_2$, $C_1D_1C_2D_2$, $A_1D_1A_2D_2$, $B_1C_1B_2C_2$), $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ - заданные функции. Краевую задачу (1)-(3) будем называть задачей «в скоростях».

Вторая постановка краевой задачи для системы (1)-(2) заключается в задании на входе и выходе из канала функций давления. При этом ставятся следующие краевые условия.

$$p\Big|_{\Gamma_1}=p_1(x,y,z),\ p\Big|_{\Gamma_2}=p_2(x,y,z), \tag{4}$$

$$\bar{u}\Big|_{\Gamma_3} = 0, \tag{5}$$

$$(\bar{u}, \bar{\tau}) = 0 \text{ на границах } \Gamma_1,\ \Gamma_2, \tag{6}$$

где $p_1(x,y,z)$, $p_2(x,y,z)$ - заданные функции, $\bar{\tau}$ - вектор единичной касательной к границе. Равенство (6) означает, что вектор скорости $\vec{u}$ перпендикулярен границам Γ_1 и Γ_2. Краевую задачу (1), (2), (4)-(6) будем называть задачей «в давлениях».

В данном параграфе также приводятся известные теоремы о существовании и единственности поставленных краевых задач в обеих постановках.

В **параграфе 1.2** для решения поставленных краевых задач в области Ω вводится разнесенная сетка, на которой методом контрольного объема строится разностная схема, аппроксимирующая исходные уравнения. В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений (7), обладающая свойством билинейности.

$$A(u)u = f, \tag{7}$$

где матрица A, вообще говоря, является прямоугольной и зависит от элементов вектора неизвестных u линейно; f - известный вектор, содержащий аппроксимации краевых условий и значения функции правой части системы (1).

Т.к. на участках Γ_1 и Γ_2 не поставлены условия на нормальную компоненту вектора скорости $\bar{u}$, а на твердых стенках Γ_3 отсутствуют условия на давление, то количество уравнений полученной системы (7) меньше числа неизвестных. Для замыкания разностной задачи мы аппроксимировали уравнения исходной системы (1)-(2) внутрь области решения там, где это было необходимо. В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей А. Далее везде мы считаем, что у системы (7) число неизвестных совпадает с числом уравнений, и система (7) есть запись получающейся разностной задачи в виде системы алгебраических уравнений.

Для решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений (7) в **параграфе 1.3** используется двухшаговый градиентный итерационный метод минимальных невязок.

$$u^{n+1/2} = u^n - \tau_{n+1}[A(u^n)u^n - f] \tag{8}$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + \alpha_{n+1} z^n, \quad n = 0,1,2,... \tag{9}$$

где $z^n = (z_1,...., z_m)^T$ – некоторый ненулевой вектор, u^0 – произвольное начальное приближение, τ_{n+1} - либо числовой итерационный параметр, либо квадратная диагональная матрица, α_{n+1} – диагональная матрица итерационных параметров.

Числовой итерационный параметр τ_{n+1} и элементы матрицы α_{n+1} находятся из условий минимума функционалов невязки по явным формулам Кардано. Показано, что последовательность невязок $r^n = A(u^n)u^n - f$ является убывающей.

Обозначим через $A(u^n, u^{n+1/2})$ матрицу, которая отличается от $A(u^n)$ тем, что некоторые ее компоненты зависят от элементов вектора u^n, а другие – от $u^{n+1/2}$, и $\Lambda(u^n, u^{n+1/2})$ и $L(u^n, u^{n+1/2})$ - соответственно диагональная и нижнетреугольная части этой матрицы. В случае, когда τ_{n+1} является квадратной диагональной матрицей итерационных параметров, шаг (8) можно выписать в следующем виде

$$\begin{gathered}\tau_{n+1}^{-1}\left(\Lambda(u^n, u^{n+1/2}) + \tau_{n+1} L(u^n, u^{n+1/2})\right)(u^{n+1/2} - u^n) + \\ + (A(u^n, u^{n+1/2})u^n - f) = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

где элементы матрицы τ_{n+1} также находятся по явным формулам Кардано из условий минимума последовательности квадратичных функционалов, определяющих величину нормы невязки.

В итоге итерационный метод (10) является методом последовательной верхней релаксации решения (7) с покомпонентной вариационной оптимизацией параметров.

В случае, когда элементы матрицы A не зависят от u^n, метод (10) представляет собой градиентное обобщение метода последовательной верхней релаксации для систем линейных алгебраических уравнений.

При решении систем нелинейных алгебраических уравнений методом (8)-(9) возможно построение ускоряющей процедуры.

$$u^{n+3} = (1+\omega_n)u^{n+2} - \omega_n u^n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{11}$$

где ω_n - итерационный параметр, который также находится из условия минимума функционала невязки. Чем меньше $\left\| u^{n+2} - u^n \right\|$, тем существеннее эффект от применения ускоряющей процедуры (11).

Параграф 1.4 посвящен описанию программного комплекса, предназначенного для решения задачи о течении вязкой жидкости под действием заданного перепада давления. В его состав входит конструктор сеток, библиотеки операторов и геометрий, расчетный модуль, модуль экспорта. Функционал любого модуля может быть легко дополнен, так как программный комплекс построен по принципам объектно-ориентированного программирования. Предусмотрена возможность вывода результатов расчета в форматах, подходящих для просмотра данных в популярных пакетах визуализации (например, ParaView).

Таким образом, в первой главе работы рассмотрена математическая модель исследуемой задачи. Предложен итерационный метод последовательной верхней релаксации (10) решения систем билинейной системы алгебраических уравнений (7) с покомпонентной вариационной оптимизацией параметров и градиентное обобщение метода ПВР решения СЛАУ, описан используемый программный комплекс.

Вторая глава посвящена изложению и тестированию технологии решения задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости при заданном перепаде давления.

В **параграфе 2.1** описаны свойства решаемой задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости, вызванном перепадом давления.

Для задачи «в давлениях» (1)-(2), (4)-(6) нет доказанных теорем о единственности решения, а, значит, она, в принципе, может иметь не одно решение. Далее, в исходной постановке отсутствуют краевые условия на нормальную составляющую вектора скорости на участках протекания, а давление задано лишь на части границы. При аппроксимации системы дифференциальных уравнений количество алгебраических уравнений будет меньше количества неизвестных, т.е.

для замыкания разностной задачи необходимо будет построить дополнительные соотношения, которые были бы следствиями уравнений исходной дифференциальной задачи.

Далее приводится предлагаемая нами технология решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления.

1. *Строим в области решения разнесенную сетку,* неравномерную или криволинейную, на которой *аппроксимируем систему уравнений* (1)-(2), (4)-(6) методом контрольного объема.

2. На тех участках границы, где отсутствуют краевые условия на неизвестные функции, *замыкаем разностную задачу, аппроксимируя исходные уравнения внутрь области решения*. В итоге получаем разностную задачу, являющуюся системой билинейных алгебраических уравнений.

3. Для решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений *используем итерационный метод неполной аппроксимации* минимальных невязок (8)-(9). Итерационный процесс останавливается, когда относительная норма невязки приближенного решения достигает значения ε (до 10^{-9}).

4. Для исключения решений системы билинейных алгебраических уравнений, не соответствующих решениям исходной дифференциальной задачи, *находим решения разностной задачи на наборе сеток с все более мелким шагом*: 0.05, 0.01, 0.001 и т.д. Процесс останавливается, когда решения на ближайших сетках отличаются на величину порядка аппроксимации отвечающего минимальному шагу сетки h.

5. *Решаем так называемую задачу «в скоростях»*, используя как краевые условия значения вектора скорости на границах протекания, определенные в результате решения исходной задачи «в давлениях». Если обе задачи («в скоростях» и «в давлениях») приведут к решениям, относительная норма разности между которыми достаточно мала и убывает с уменьшением шага сетки, можно считать, что исходная задача решена верно.

6. Для отсева возможных неустойчивых решений выполняем проверку полученного решения на устойчивость: *решаем задачу с малыми возмущениями краевых условий*.

Далее на рисунках показаны линии тока и контуры давления, полученные при решении задач о течении жидкости, вызванном перепадом давления.

В Параграфе 2.2 решены тестовые задачи о течении в плоских областях в каналах сравнительно простой формы: с прямыми стенками параллельными осям координат (прямоугольный, прямоугольный с траншеей, прямоугольный со ступенькой). Проведены расчеты для различных значений перепада давления и вязкости. Для течения в прямоугольном канале евклидова норма отличия приближенного решения от точного составляет 10^{-6} для шага 0.01. Течения, полученные в Т-образном канале, близки к результатам работы Н.П. Мошкина[1].

Здесь же приведены тестовые расчеты течений в трехмерных каналах: канале-параллелепипеде, трехмерном канале со ступенькой, трехмерном канале с траншеей. Норма разности полученных решений и расчётов, приведённых в монографии[2], составляет порядка 10^{-5}.

С целью проверки эффективности замыкания разностной задачи с использованием аппроксимации уравнений системы внутрь области решения в **параграфе 2.3** рассмотрена задача о течении в разветвляющемся канале (рис. 2), где на границах $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_6$ заданы постоянные функции давления $p_1,\ldots,p_6$ соответственно. Остальные границы канала – твердые стенки.

Для нормальной составляющей вектора скорости не задано краевых условий в исходной дифференциальной задаче, поэтому мы следовали пункту 2 технологии.

Изменение давления p_6 на 5% от начального изменяет направление линий тока так, что на одной части границы Γ' жидкость вытекает из канала, а на другой – втекает внутрь (рис. 2). Следовательно, использование аппроксимации соответствующего уравнения исходной системы для замыкания разностной задачи

[1]Moshkin N., Yambangwi D. Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel. // Intern. J. of Comput. Fluid Dyn. – 2009. – Vol. 23. – N 3. – P 259-270.

[2] Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2004. – 239 с.

позволяет находить скорости несмотря на разнонаправленность движения через границу.

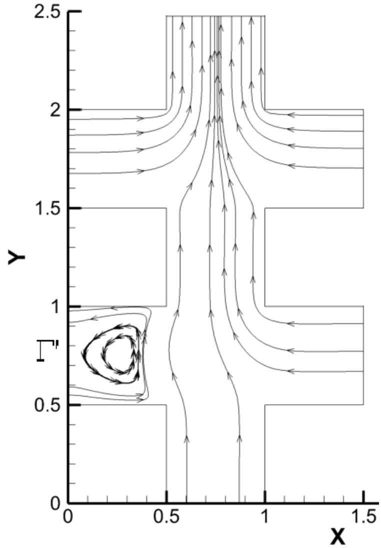


Рис. 2. Течение в разветвляющемся канале

Таким образом, во второй главе предложена технология решения исследуемой задачи. Как показали тестовые расчеты, данная технология успешно применяется при решении двух- и трехмерных задач о течении, вызванном заданным перепадом давления. Показано, что она позволяет найти решение в тех случаях, когда постановка условий на вектор скорости на входе и выходе из канала может быть затруднена (т.к. при различных перепадах давления течение может быть направлено как внутрь канала, так и вовне, что не всегда возможно определить до проведения расчета).

Третья глава посвящена решению задач, для которых на выходе канала трудно задать касательную составляющую вектора скорости.

При решении, например, задач о течении в системе вентиляции с фильтрацией через стенки, в цилиндрическом канале с закрученным на входе потоком (рис. 6), о течении с внутренним источником (рис. 7) вид линий тока вблизи границ протекания зависит не только от краевых условий, но и от формы канала и других факторов. В **третьей главе** при решении подобных задач применяется предложенная ранее технология, в которую добавляется следующий пункт:

2.1. на выходной границе для определения *всех* компонент вектора скорости используется аппроксимация внутрь области течения *всей системы* уравнений.

Параграф 3.1 посвящен решению задачи о «свободном истечении». Согласно условию (6) линии тока перпендикулярны границам протекания. Однако в случае, например, течения с фильтрацией, когда баланс расхода жидкости зависит от перепада давления, имеет смысл говорить о *свободном истечении* жидкости, когда течение зависит в большей степени от формы канала или краевых условий на твёрдых стенках, чем от краевых условий на выходе из канала. При этом линии тока могут выходить под разными, заранее неизвестными углами к границам. Если в подобных случаях все же решать задачу Навье-Стокса вместе с условием (6), то линии тока вблизи границы могут резко менять направление.

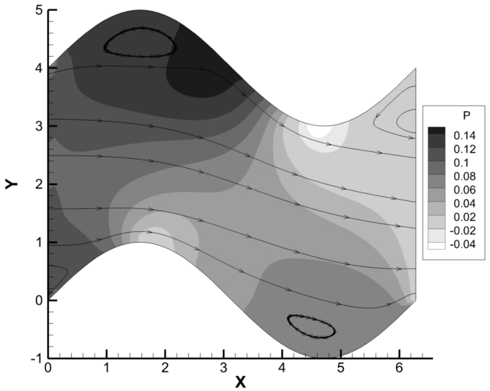


Рис. 3 Течение в криволинейном канале

Данное замечание проиллюстрировано на примере задачи о течении в криволинейном канале. На рис. 3 показано решение задачи о свободном истечении (1), (2), (4), (5). В правом верхнем углу возникает подсасывающая зона, и линии тока подходят к правой границе под разными, в том числе и достаточно острыми углами.

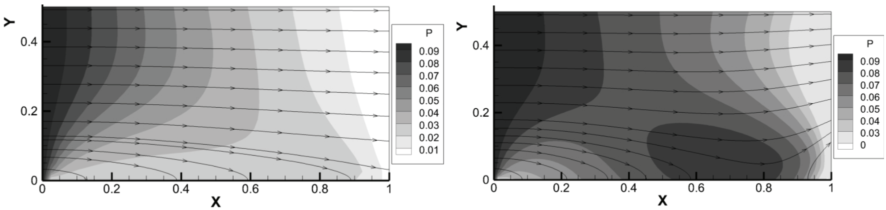
В **параграфе 3.2** рассматриваются течения в канале с фильтрацией через нижнюю стенку (рис. 4, 5) и в цилиндрическом канале с закрученным на входе потоком (рис. 6).

В постановке задачи с фильтрацией помимо краевых условий (4)-(5) присутствует также условие (12) о пропорциональности нормальной составляющей вектора скорости разности давления на границе и внешнего давления.

$$|\vec{u}| = |\vec{u} \cdot \vec{n}|, \quad p(\bar{x}) = p_{ext}(\bar{x}) + k_1(\bar{x})(\vec{u} \cdot \vec{n}), \quad (\bar{x}) \in \Gamma' \qquad (12)$$

где $p_{ext}(\bar{x})$ - заданная функция внешнего давления, k_1 - коэффициент фильтрации, Γ' - нижняя проницаемая стенка канала, $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали.

Количество фильтрующейся жидкости зависит от разности заданного внешнего давления и давления на границе, а объем жидкости, поступающей в канал и вытекающей из него, неизвестен до проведения расчета. Вместе с тем вид линий тока вблизи границ протекания зависит как от формы канала, так и от возникающего в результате фильтрации течения.



(а) $p_{ext} \equiv 0$ (б) $p_{ext} \equiv 0.1x$

Рис. 4. Течение в прямоугольном канале с фильтрацией

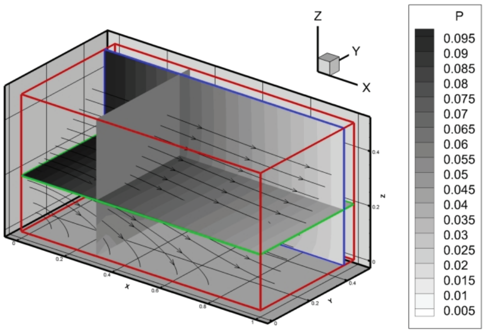


Рис. 5. Течение в канале-параллелепипеде с фильтрацией

На рис. 6 показано течение, полученное при решении задачи (1), (2), (4), (5), (13) о течении в цилиндрическом канале с закрученным на входе потоком.

$$v = v_1,\ w = w_1,\ \bar{x} \in \Gamma_1 \tag{13}$$

Компоненты v_1 и w_1 в (13) выбирались так, чтобы проекция вектора скорости на входную плоскость была перпендикулярна отрезку радиуса основания, а ее длина – постоянна для всех точек на входе.

Закрутка потока затухает по направлению к выходу, что связано с действием силы трения, обусловленной вязкостью. Необходимо отметить, что хотя мы задаем касательные составляющие вектора скорости на входе в канал, априорная информация о поле скоростей на выходе из канала отсутствует, т.к. там поле скоростей определяется в ходе расчета при учете перепада давления. Таким образом, нецелесообразно задавать какие-либо компоненты вектора скорости на выходе из канала. Для замыкания разностной задачи мы также руководствуемся предлагаемой в работе технологией с использованием п. 2.1.

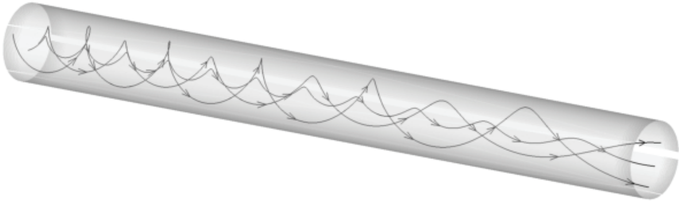
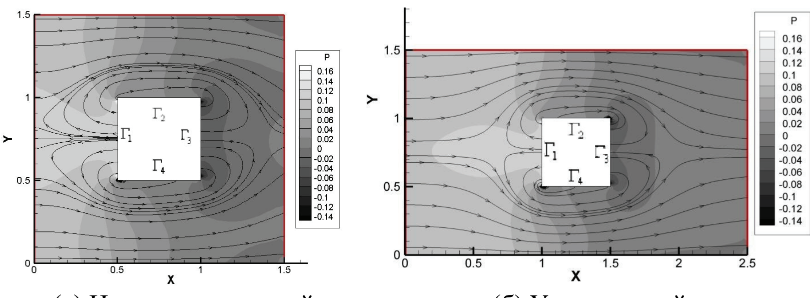


Рис. 6. Течение в цилиндрическом канале с закрученным на входе потоком

В **параграфе 3.3** показано, что даже в прямоугольном канале сложно задать поле скоростей на входе-выходе канала, т.к. перепад давления может не определять направления вектора скорости на входе-выходе канала. Здесь рассмотрена задача о течении в прямоугольном канале при наличии внутреннего источника прямоугольной формы. На входной (левая) и выходной (правая) границах канала заданы функции давления, на границах источника – векторы скорости.



(а) Истечение на левой границе (б) Увеличенный канал

Рис. 7. Течение в канале с внутренним источником

При постановке достаточно высокой скорости на границах источника часть жидкости может выходить из канала через левую «входную» границу (рис. 7а). Однако, при «растяжении» канала, при тех же краевых условиях, жидкость вновь начинает поступать в канал через эту границу (рис. 7б).

Таким образом, в третьей главе с помощью предложенной технологии решены задачи о течениях, вызванных заданным перепадом давления: задача о течении в канале с фильтрацией, о течении при наличии внутренних источников, о течении с закрученным на входе потоком. Показано, что предлагаемая в работе технология позволяет определить течение, в тех случаях, когда практически невозможно задать краевые условия на скорости на входе или выходе канала.

В заключении приводятся основные результаты исследования и выводы.

1. В работе приведена технология решения задачи о течении вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале при заданном перепаде давления, применяемая при решении двух- и трехмерных задач. Данная технология позволяет разрешить основные трудности, возникающие при решении указанных задач.

2. Метод решения системы билинейных уравнений, являющийся вариантом метода ПВР для нелинейного случая, успешно применяется для решения возникающих в результате аппроксимации систем нелинейных уравнений.

3. Разработанный программный комплекс может применяться при решении задач о течениях жидкости, вызванных заданным перепадом давления.

4. Решена задача о свободном истечении, когда течение вблизи границ определяется не только краевыми условиями, но и формой канала.

Публикации по теме исследования

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

[1] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программный комплекс для численного расчета течений, вызванных перепадом давления «Flow Produced by Given Pressure Drop»» / Гейдаров Н.А., Захаров Ю.Н. // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – № 2011612543; опубл. 28.03.2011.

В рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК:

[2] Гейдаров Н. А. Решение стационарной задачи о течении вязкой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом давлений, при наличии внутренних источников / Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров, Ю. И. Шокин // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 5. – С. 14–23.

[3] Geidarov, N. A. Solution of the problem of a viscous fluid flow with a given pressure differential / N. A. Geidarov, Yu. N. Zakharov, Yu. I. Shokin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2011. – Vol. 26. – № 1. – P. 39–48.

В рецензируемых журналах:

[4] Гейдаров Н. А. О треугольных методах решения систем линейных и нелинейных уравнений с вариационной оптимизацией параметров / Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров // Вестник КемГУ. – 2009. – № 2 (38). – С. 34–39.

В трудах конференций:

[5] Гейдаров Н.А. Течение вязкой жидкости при заданном перепаде давления и наличии проницаемой стенки. / Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20: сб. трудов XX Международной научной конференции. В 10 т. – Т.1., Секция 1. – Ярославль, 2007. – С. 225-226

[6] Гейдаров Н. А. Об одной краевой задаче для системы уравнений Навье-Стокса / Н. А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров // Совместный выпуск по материалам Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» 10-14 сентября 2008 г. «Вычислительные технологии», «Вестник КазНУ им. Аль-Фараби». Серия: математика, механика, информатика – Т. 13. – №3(58). – Часть II. – 2008. – С.147-151.

[7] Гейдаров Н.А. Метод решения задачи о течении в канале вязкой несжимаемой жидкости при заданном перепаде давления / Н.А. Гейдаров, Ю.Н. Захаров // Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии: сборник научных трудов. – Кемерово, 2008. – С. 303-308.

[8] Гейдаров Н. А. Решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в канале, вызванном заданным перепадом

давления / Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XXI Всероссийской конференции, Кемерово – Новосибирск, 2009. – С. 66–72.

[9] Geidarov N. A. About gradient extension over relation method of solution of system of linear and nonlinear algebraic equations / N. A. Geidarov, Yu. N. Zakharov // Proceedings of International Conference “Mathematical and Informational Technoklogies MIT-2009” (Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro). – Kosovska Mitrovica, 2009. – P. 135-139.

[10] Geidarov N. A. Stability of solution of stationary viscous incompressible fluid flow produced by a given pressure drop problem / N. A. Geidarov, Yu. N. Zakharov // Proceedings of International Conference “Mathematical and Informational Technoklogies MIT-2009” (Kopaonik, Serbia, Budva, Montenegro). – Kosovska Mitrovica, 2009. – P. 140-143.

Автореферат:
Формат 60x84/8. Объём 1,0 усл. печ. л.
Подписано к печати 24.11.2011
Тираж 100 экз. Заказ № 1174.
Отпечатано ЗАО РИЦ «Прайс-курьер» ул. Кутателадзе, 4г, т. 330-7202