

На правах рукописи



КАРАБЦЕВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

**МЕТОД ЕСТЕСТВЕННЫХ СОСЕДЕЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕАЛЬНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

**05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ**

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Кемерово – 2008

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет» на кафедре ЮНЕСКО по НИТ

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Стуколов Сергей Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Хакимзянов Гаяз Салимович

доктор физико-математических наук,
профессор Стурова Изольда Викторовна

Ведущая организация: Томский государственный университет

Защита состоится **10 июня 2008 г. в 9-00** на заседании диссертационного совета ДМ 003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Ак. Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики ГПНТБ СО РАН.

Автореферат разослан 8 мая 2008 г.

И.о. учёного секретаря
диссертационного совета
доктор технических наук, профессор



А.Д. Рычков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Моделирование волновых процессов, связанных с сильными нелинейными эффектами, такими как нестационарное движение и обрушение волн, взаимодействие волн с преградами, выход волн на мелководье, невозможно без использования современных численных методов, допускающих нарушение связности расчетной области. Физические эксперименты для изучения подобных явлений оказываются сложными и дорогостоящими, а быстрота протекания реальных процессов делает численные методы практически единственным источником информации о течении. В задачах, имеющих практический интерес, размеры длин волн обычно бывают большими, поэтому при исследовании распространения волн и взаимодействия волн с твердыми преградами можно пренебрегать влиянием вязкости и рассматривать задачи в постановке, основанной на модели идеальной несжимаемой жидкости.

Для решения задач гидродинамики большое распространение получили классические лагранжевы методы, в которых используется сетка с неизменной топологией: метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР), метод контрольных объемов (МКО). К этой группе методов также можно отнести метод граничных элементов (МГЭ) и комплексный метод граничных элементов (КМГЭ). Существенным недостатком указанных методов является невозможность проведения численного моделирования задач с большими деформациями, так как при этом сетка, на которой строится решение, теряет узловую связность и становится вырожденной.

С ростом производительности компьютеров возродился интерес к лагранжевому описанию среды на основе свободно-лагранжевых методов. В таких методах отношение соседства частиц не фиксировано и может со временем изменяться. Данные методы известны как бессеточные методы, характерными представителями которых являются: метод сглаженных частиц (SPH), полуневязный метод движущихся частиц (MPS), метод лагранжево-эйлеровых частиц. Указанные методы позволяют достаточно точно воспроизводить кинематику течений, однако получение динамических характеристик, необходимых для расчета гидродинамических нагрузок, является весьма затруднительной задачей.

Актуальность определения динамических нагрузок при взаимодействии поверхностных волн с береговыми и донными сооружениями обусловлена вероятностью появления катастрофических последствий, возникающих в том случае, когда гидродинамические нагрузки превышают допустимые пределы. Разработка численных методов для моделирования течений идеальной несжимаемой жидкости, позволяющих с высокой точностью определять не только кинематические, но и динамические характеристики течений с большими деформациями расчетной области, является важной и актуальной задачей современной гидродинамики.

Цель работы – создание эффективного численного метода на основе метода естественных соседей и его реализация в виде программного комплекса, позволяющего проводить численное моделирование нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости с большими деформациями расчетной области.

Задачи исследования

1. Реализация метода естественных соседей для моделирования движения идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами на основе решения системы уравнений Эйлера.

2. Реализация алгоритма «заметающей плоскости» разбиения расчетной области ячейками Вороного.
3. Разработка алгоритмов поиска естественных соседей и определения свободной границы многосвязной расчетной области на основе разбиения Вороного.
4. Модификация численного алгоритма на основе метода естественных соседей для решения нестационарных задач идеальной несжимаемой жидкости с большими деформациями расчетной области.
5. Сравнение численных результатов, полученных методом естественных соседей, с аналитическими решениями, экспериментальными данными и расчетами других авторов.
6. Проведение численных экспериментов по расчету задач о взаимодействии уединенных волн с различными препятствиями и определение значений гидродинамических нагрузок на твердые стенки области.
7. Разработка параллельного алгоритма метода естественных соседей для многопроцессорных вычислительных систем.

Научная новизна работы. Предложен численный метод на основе метода естественных соседей для решения нестационарных задач динамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами, сопровождающихся большими деформациями расчетной области. Данный метод позволяет проводить численное моделирование на всех этапах вычислительного эксперимента, включая этапы сильно нелинейного поведения течения с эффектами ненулевой завихренности жидкости и образованием многосвязности расчетной области. Характерной чертой разработанного метода является способность вычислять давление, которое используется для расчета гидродинамических нагрузок.

На защиту выносятся:

1. Модифицированный метод естественных соседей для решения задач гидродинамики со свободными границами в полной нелинейной постановке, основывающейся на системе уравнений Эйлера, который позволяет проводить численное моделирование нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости с большими деформациями расчетной области.
2. Алгоритм поиска естественных соседей, построения структуры узловой связности и определения границ расчетной области на основе разбиения области ячейками Вороного.
3. Результаты численного моделирования задач о взаимодействии уединенных волн с препятствиями в виде подводной ступеньки и тела прямоугольного сечения, расположенного на дне. Обнаружено образование вихревых течений вблизи препятствия, а также установлено их влияние на амплитуды прошедших и отраженных волн. Вычислены значения гидродинамических нагрузок, создаваемых жидкостью на твердые стенки.
4. Параллельный алгоритм метода естественных соседей и его реализация в виде программного комплекса для многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановок рассматриваемых задач и методов их решения, основывается на расчетах широкоизвестных и рекомендуемых тестовых задач и

сопоставлении результатов численных расчетов с результатами, полученными другими авторами.

Практическая ценность диссертационного исследования заключается в следующем. Предложенная модификация метода естественных соседей позволяет проводить численное моделирование задач гидродинамики со свободными границами, сопровождающихся большими деформациями расчетной области. Особенностью данного метода является возможность вычисления давления, которое используется для расчета динамических нагрузок, создаваемых жидкостью на твердые стенки. Основные результаты работы были использованы при выполнении следующих проектов:

- проекта № 4829 «Численное моделирование течений жидкости со свободными границами современными численными методами на многопроцессорных вычислительных системах» (2005 год) по ведомственной научной программе Федерального агентства по образованию «Развитие научного потенциала высшей школы»;
- интеграционного проекта фундаментальных исследований Объединенного ученого совета по механике и энергетике СО РАН (2006–2008 годы) по теме «Численное моделирование нестационарного взаимодействия сложных упругих конструкций с жидкостью или газом», блок 2: «Нестационарное взаимодействие нелинейных поверхностных волн с плавающими и закрепленными упругими конструкциями», Пункт 1. «Развитие методов расчета гидродинамических нагрузок при резко нестационарном воздействии волн с большими деформациями области течения».
- проекта № 4256 «Создание типового информационно-вычислительного портала для организации учебной и научной деятельности вуза» по ведомственной научной целевой программе Федерального агентства по образованию «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)» (2006–2008 годы).

Представление работы. Основные результаты диссертации представлялись на: VI, VII, VIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2005, Красноярск, 2006, Новосибирск, 2007); V, VI, VII Всероссийской научно-практической конференции «Недра Кузбасса. Инновации» (Кемерово, 2006–2008); XI Международной научно-методической конференции «Новые информационные технологии в университетском образовании» (Кемерово, 2006); III Международной летней научной школе «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование» (Кемерово, 2006); II и III Российско-Германской школе по параллельным вычислениям на высокопроизводительных вычислительных системах (Новосибирск, 2005, 2006); Международной конференции «Сопряженные задачи механики реагирующих сред, информатики и экологии» (Томск, 2007); объединенном семинаре ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии (численные методы механики сплошной среды)» под руководством академика Шокина Ю.И., профессора Ковени В.М.; семинаре ИГиЛ СО РАН «Прикладная гидродинамика» под руководством чл.-кор. РАН Пухначева В.В.; а также регулярно на семинарах «Численные методы решения задач механики сплошной среды» кафедры ЮНЕСКО по НИТ КемГУ под руководством профессора Афанасьева К.Е. (Кемерово, 2004–2008).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе (в скобках в числителе указан общий объём этого типа публикаций, в знаменателе – объём, принадлежащий лично автору) 2 статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК для предоставления основных результатов диссертации (1,12/0,6 печ. л.), 6 публикаций в трудах и материалах конференций (2,31/1,47 печ. л.), 6 публикаций в тезисах конференций (0,62/0,33 печ. л.).

Личный вклад автора. Основные научные и практические результаты диссертации получены автором лично. В публикациях [1, 2, 4, 5] автор участвовал в разработке и реализации численных алгоритмов, проведении численных расчетов. В работах [3, 6] автор участвовал в процессе постановки задачи и разработке алгоритма построения сеток. В работе [7] автору принадлежит численная реализация предложенного алгоритма решения задачи.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, списка цитируемой литературы и приложения. Общий объём работы составляет 163 страницы машинописного текста, включая приложение – 3 страницы; библиографический список состоит из 150 литературных источников.

Автор выражает искреннюю признательность доктору физико-математических наук, профессору К.Е. Афанасьеву за предложенную тему, постоянное внимание, творческие идеи и ценные замечания при выполнении работы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и на основе анализа близких по тематике публикаций показано место данной работы в общем ряду исследований, посвященных вопросам, затронутым в диссертации; изложено краткое содержание работы, сформулированы цели и задачи исследования, а также выносимые на защиту результаты.

Первая глава посвящена описанию метода естественных соседей на основе интерполяции Сибсона (интерполяции естественных соседей) для решения дифференциальных уравнений в частных производных¹. Рассмотрены вопросы численной реализации алгоритма решения уравнения Пуассона с граничными условиями типа Дирихле и Неймана.

В *первом параграфе* приводится определение интерполяции естественных соседей по произвольно заданному множеству узлов $x_i = (x_1, x_2)$, $i = \overline{1, M}$, представляющему расчетную область \overline{D} . В вычислительной геометрии понятие естественных соседей связано с понятием ячейки Вороного – выпуклого многоугольника, содержащего узел x_i и определяемого на плоскости как $T_i = \{x \in R^2 : d(x, x_i) < d(x, x_j), \forall j \neq i\}$. Естественными соседями узла x_i являются такие узлы x_j , $j \neq i$, между которыми проходит ребро ячейки Вороного T_i . При построении интерполяции Сибсона используют ячейки Вороного второго порядка, которые имеют x_i в качестве первого естественного соседа, а x_j , $j \neq i$ – в качестве второго. Тогда коэффициенты интерполяции Сибсона определяются как отношение площади

¹ Sukumar N., N. Sukumar, Moran B., Belytschko T. The natural element method in solid mechanics // International Journal of Numerical Methods in Engineering. – 1998. – Vol. 43, № 5. – P. 839–887.

пересечения ячеек Вороного второго порядка для узла x , введенного в заданное разбиение, с площадью ячейки Вороного первого порядка, содержащую узел x :

$$N_i(x) = A_i(x) / A(x), \quad A(x) = A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_k(x), \quad (1)$$

где $i = \overline{1, k}$, k – число естественных соседей для x , $A_i(x)$ – ячейки Вороного второго порядка, а их объединение $A(x)$ – первого, $N_i(x)$ – функция формы для i -го узла. Производные интерполирующих функций по пространственным переменным вычисляются из (1) следующим образом:

$$\partial N_i(x) / \partial x_j = (A_{i,x_j}(x) - N_i(x) A_{x_j}(x)) / A(x), \quad j = \overline{1, 2}. \quad (2)$$

Вычисление функций формы Сибсона является сложной задачей вычислительной геометрии, так как необходимо искать площади пересечения многоугольников. Для сокращения временных затрат на вычисление коэффициентов интерполяции в работе был реализован алгоритм Бовье-Вотсона².

Второй параграф посвящен описанию численного алгоритма решения уравнения Пуассона методом естественных соседей. В двумерной области D с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ задано уравнение Пуассона:

$$\Delta u = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$u = \tilde{u}(x_1, x_2), \quad \text{где } (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad \partial u / \partial n = u_n(x_1, x_2), \quad \text{где } (x_1, x_2) \in \Gamma_2. \quad (4)$$

Метод естественных соседей представляет собой разновидность метода Галеркина, в соответствии с которым неизвестные функции аппроксимируются выражением вида:

$$u(x) = \sum_{i=1}^k N_i(x) u_i(x). \quad (5)$$

Для формирования дискретной системы уравнений записывается слабая форма (3):

$$\int_{\Omega} (\Delta u - f) N_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} (u_n - \partial u / \partial n) N_j d\Gamma_2 = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (6)$$

С учетом (5) матричная форма выражения (6) выглядит следующим образом:

$$KU = B, \quad \text{где } K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega, \quad B_i = - \int_{\Omega} f N_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} u_n N_i d\Gamma_2. \quad (7)$$

Внедрение граничных условий (4) осуществляется аналогично подходу, применяемому в методе конечных элементов.

Третий параграф посвящен выбору метода решения систем линейных алгебраических уравнений, полученных в результате перехода от дифференциальных уравнений к их дискретному аналогу. Матрица K системы (7) является разреженной, симметричной и положительно определенной. В работе установлено, что эффективным методом для решения подобных СЛАУ является метод сопряженных градиентов с $DILU(0)$ – предобуславливанием. Применение специфической схемы хранения разреженной матрицы в методе сопряженных градиентов дает значительное ускорение и сокращает количество вычислительных операций.

В *четвертом параграфе* проводится тестирование метода естественных соседей на решении уравнения Пуассона с известным аналитическим решением. Показана сходимость метода при увеличении количества расчетных узлов в области.

² Watson D. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes // The Computer Journal. – 1981. – Vol. 24, № 2. – P. 167–172.

Вторая глава посвящена описанию численного метода на основе метода естественных соседей для решения задач гидродинамики со свободными границами, сопровождающихся большими деформациями расчетной области. Предлагается численный алгоритм для решения плоских нестационарных задач в полной нелинейной постановке. В *первом параграфе* представлены основные блоки численного метода.

Общая постановка нестационарной задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей приводится во *втором параграфе*. В расчетной области течения D , представленной конечным набором узлов, ограниченной свободной поверхностью Γ_3 и твердыми стенками $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$, задано течение идеальной несжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений Эйлера и уравнением неразрывности:

$$Du_i / Dt = -(1/\rho)(\partial p / \partial x_i) + f_i, \quad \bar{x} \in \bar{D}, \quad i = \overline{1,2}. \quad (8)$$

$$\partial u_i / \partial x_i = 0, \quad \bar{x} \in \bar{D}. \quad (9)$$

Здесь $\bar{x} = (x_1, x_2)$ – пространственные координаты, $\bar{u} = (u_1, u_2)$ – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, $\bar{f} = (f_1, f_2) = (0, -g)$ – вектор внешних сил. Движение расчетных узлов во всей области описывается уравнением вида:

$$dx_i / dt = u_i, \quad \bar{x} \in \bar{D}, \quad i = \overline{1,2}. \quad (10)$$

На свободной поверхности Γ_3 выполняется динамическое условие $p = p_{am}$, на твердых стенках $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$ выполняется условие непротекания $\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$, где \bar{n} – внешняя нормаль к поверхности жидкости. В начальный момент времени задано положение расчетных узлов $\bar{x}(0) = \bar{x}^0$ и распределение поля скоростей в расчетной области $\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{u}^0(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{D}$.

В *третьем параграфе* представлен алгоритм интегрирования по времени системы уравнений (8)–(9), что представляет некоторые трудности в случае несжимаемой жидкости. При решении уравнений в переменных \bar{u} и p основная сложность заключается в разработке такого способа определения давления, который обеспечит соленоидальность поля скорости и не будет приводить к нефизическим осцилляциям функции давления. В данной работе в качестве схемы движения по времени применяется метод дробных шагов, который впервые был предложен Н.Н. Яненко³. В результате расщепления системы уравнений (8)–(9) по физическим процессам решение задачи разбивается на два этапа: нахождение векторной функции u_i^* – предиктора скорости и нахождение скалярной функции давления p из решения уравнения Пуассона для коррекции вектора скорости u_i на шаге $t + \Delta t$. Тогда решение системы уравнений (8)–(9) на шаге t^{n+1} можно представить следующим образом:

$$1) \quad u_i^* = u_i^n + \Delta t f_i, \quad i = \overline{1,2}. \quad (11)$$

$$2) \quad (\rho / \Delta t) \nabla \cdot \bar{u}^* = \Delta p^{n+1}, \quad \text{где } p = p_{am}, \quad x \in \Gamma_3, \quad \text{и } \partial p / \partial n = 0, \quad x \in \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4. \quad (12)$$

$$3) \quad u_i^{n+1} = u_i^* - (\Delta t / \rho) (\partial p^{n+1} / \partial x_i), \quad i = \overline{1,2}, \quad \text{где } \bar{u} \cdot \bar{n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4. \quad (13)$$

³ Яненко Н.Н. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов) // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 134. – 5 с.

В *четвертом* параграфе представлен дискретный аналог системы уравнений (11)–(13).

В *пятом параграфе* описываются алгоритмы для выбора шага по времени, определения динамических нагрузок на твердые стенки, а также алгоритмы вычисления характеристик волны, таких как масса, кинетическая и потенциальная энергии.

Шестой параграф посвящен описанию реализации алгоритмов построения диаграммы Вороного на плоскости, поиска естественных соседей и построения структуры узловой связности. Применение диаграммы Вороного существенно ускоряет процесс вычисления функций формы Сибсона, так как для введенной в первоначальное разбиение точки x поиск естественных соседей осуществляется лишь в некоторой подобласти, ограниченной ячейкой Вороного, которой принадлежит x , и ее ближайшими естественными соседями. Поэтому скорость работы метода естественных соседей в целом зависит от эффективности алгоритма, реализующего разбиение области ячейками Вороного.

Наиболее эффективным и достаточно простым в реализации является алгоритм «sweep line», теоретическая оценка числа операций которого составляет $O(M \log M)$, где M – количество точек⁴. Идея методов «sweep line» заключается в перемещении горизонтальной линии сверху вниз по плоскости. Во время движения такой линии возникают события двух типов – «события точки» и «события круга», на основании которых формируется информация о вычисляемом графе. В данном варианте метода «sweep line» графом является диаграмма Вороного. Оценка числа операций в реализованном алгоритме составила $O(M^{1.4} \log(M))$. Увеличение по сравнению с теоретической оценкой объясняется тем, что в теоретическую оценку не входят специфические операции, подготавливающие данные для дальнейшего их использования в методе естественных соседей – отсечение внешних ребер, построение структуры узловой связности. Разработанная структура узловой связности позволяет быстро получать информацию о естественных соседях любого узла, а также восстановить двойственную диаграмме Вороного структуру – триангуляцию Делоне. На рисунке 1, а изображена диаграмма Вороного для заданного набора узлов.

Описание метода определения границ расчетной области и его реализация на основе структуры данных, полученной при построении диаграммы Вороного, приводится в *седьмом параграфе*. При решении задач гидродинамики в начальный момент времени необходимо задавать положение свободной и твердых границ моделируемых течений. В следующие моменты времени положение свободной границы меняется, а вместе с ней может меняться и последовательность номеров узлов, лежащих на границе. Течения жидкости, сопровождающиеся большими деформациями, дополнительно могут привести к появлению многосвязных областей в виде брызг или образовавшихся внутри области полостей, что невозможно учесть на начальном этапе задания граничных узлов.

Эффективным методом определения границ расчетной области является метод « α -share», который основывается на понятии α -формы⁵. Задача нахождения границы по заданному множеству точек подразумевает распознавание его формы и не имеет

⁴ Fortune S.J. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams // Journal Algorithmica. – 1987. – № 2. – P. 153–174.

⁵ Edelsbrunner H., Macke E.P. Three-dimensional alpha // ACM Trans. Graph. – 1994. – Vol. 13, № 1. – P. 43–72.

единственного решения. α -форма параметризуется действительным числом $\alpha \in [0; \infty)$ и представляет семейство геометрических фигур в диапазоне от точки до выпуклой оболочки множества. На практике для нахождения границы используется триангуляция Делоне, а параметр α является значением критерия: если радиус описанной окружности треугольника превышает значение α , то треугольник исключается из расчетной области.

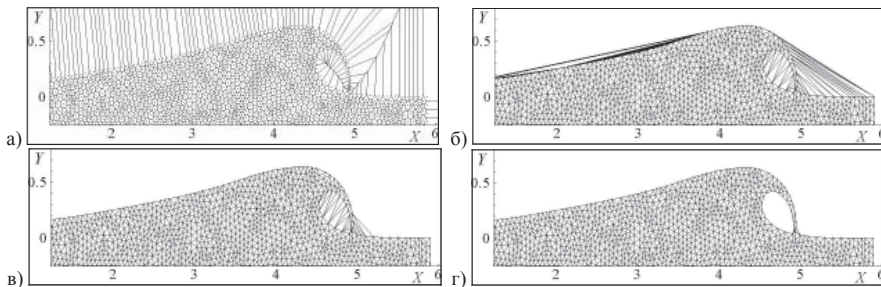


Рис. 1. а) Диаграмма Вороного; б) первоначальная триангуляция Делоне; в) триангуляция Делоне при $\alpha = 0,25$; г) триангуляция Делоне при $\alpha = 0,059$

На рисунке 1 приведен процесс определения границы множества точек. На первом шаге из диаграммы Вороного восстанавливается первоначальная триангуляция Делоне (рисунок 1, б). Затем осуществляется очистка области от элементов, не удовлетворяющих критерию α (рисунки 1, в–г). Для определения геометрии границы заданной области необходимо подобрать значение параметра α , дающего «приемлемые» результаты. Универсальных методов выбора значения α нет, существуют лишь некоторые рекомендации, полученные из опыта применения алгоритма и основанные на соотношениях расстояний между самыми близкими и самыми удаленными точками области.

В восьмом параграфе приводится описание разбиения расчетной области расширенной триангуляцией Делоне, которая в данной работе используется для перехода к дискретной форме систем уравнений (12)–(13)⁶. Расширенной триангуляцией Делоне называется разбиение области D на подобласти P_i так, что $D = \bigcup P_i$, где каждая подобласть P_i есть многоугольник, определяемый всеми вершинами, лежащими на окружностях Делоне, центры которых находятся на достаточно малом расстоянии друг от друга. Расширенная триангуляция Делоне лишена недостатков, характерных для триангуляции Делоне, которые проявляются в неоднозначности или вырожденности треугольных элементов, поэтому численное интегрирование с ее применением осуществляется точнее.

Третья глава посвящена решению нестационарных задач гидродинамики со свободными границами модифицированным методом естественных соседей. Волновое движение массы воды со свободной поверхностью под действием силы тяжести является одним из наиболее интересных и успешных приложений нелинейной

⁶ The meshless finite element method / S. Idelsohn, E. Onate, N. Calvo, F. Del Pin // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2003. – Vol. 58, № 4. – P. 32–59.

гидродинамики. Волны на свободной поверхности представляют хорошо известное, но и вместе с тем достаточно сложное явление, которое весьма не просто описать.

Применимость метода естественных соседей для решения задач механики жидкости со свободными границами проверяется на решении ряда тестовых задач. В пункте 1.1 *первого параграфа* приводится решение задачи Л.В. Овсянникова о деформации жидкого эллипса⁷. Данная задача служит хорошим тестом на нахождение формы свободной границы. В таблице 1 приведены значения относительной погрешности длины главной полуоси эллипса в различные моменты времени.

Таблица 1

Относительная погрешность главной полуоси эллипса (2000 узлов)

t	0,1	0,4	0,6	1,0	1,3	1,65
$\Delta(a(t)), \%$	0,025	0,046	0,080	0,101	0,128	0,151

В пункте 1.2 приведено решение нестационарной задачи о движении уединенной волны по бассейну постоянной глубины. В этом тесте важным является то, что уединенные волны в процессе движения не изменяют амплитуду и скорость, сохраняют форму и полную энергию. Начальные данные (распределение расчетных частиц в области и поле скоростей), описывающие уединенную волну, получены численно из решения нелинейной нестационарной задачи комплексным методом граничных элементов (КМГЭ)⁸. Расчеты по распространению волн выполнялись в безразмерных переменных. В качестве характерных параметров выбиралась максимальная глубина канала H , ускорение силы тяжести g , некоторая характерная скорость \sqrt{gH} . Результаты тестирования показали, что использование переменного шага по времени позволяет моделировать течения с меньшими погрешностями, чем с постоянным шагом, при этом возможно снижение временных затрат на проведение расчета в несколько раз.

Таблица 2

Основные характеристики расчета

N	ΔA	ΔE	ΔM
8020	$1,351 \cdot 10^{-2}$	$1,437 \cdot 10^{-2}$	$2,127 \cdot 10^{-3}$
10020	$1,036 \cdot 10^{-2}$	$1,268 \cdot 10^{-2}$	$1,812 \cdot 10^{-3}$
16000	$8,877 \cdot 10^{-3}$	$8,719 \cdot 10^{-3}$	$1,415 \cdot 10^{-3}$

В таблице 2 приведены основные характеристики, полученные в результате расчета движения уединенной волны амплитуды $A = 0,5$, в момент времени $t = 21$, к

которому она прошла путь, равный 2,5 своих длин. В первом столбце указано количество узлов N , во втором, третьем и четвертом столбцах приведены относительные изменения амплитуды ΔA , полной энергии ΔE и массы волны ΔM . Выполнение законов сохранения энергии и массы, сохранение амплитуды и формы волны позволяет судить о применимости метода естественных соседей для решения нелинейных нестационарных задач со свободной поверхностью.

Пункт 1.3 первого параграфа посвящен решению задачи о взаимодействии уединенных волн с вертикальными преградами. Расчет проводился для амплитуд волн $A = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$. На рисунке 2, а приведены профили свободной поверхности при накате солитона амплитуды $A = 0,5$ на вертикальную стенку для

⁷ Овсянников Л.В. Общие уравнения и примеры // Задачи о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. – Новосибирск: Наука, 1967. – С. 5–75.

⁸ Стуколов С.В. Решение нелинейных волновых задач гидродинамики идеальной жидкости комплексным методом граничных элементов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Кемерово, 1999. – 26 с.

нескольких моментов безразмерного времени (при $t=0$, $y_{\max}=1,5005$ – первоначальная форма солитона, $t=8,73$, $y_{\max}=2,2647$ – форма свободной поверхности в момент максимального заплеска, $t=18,01$, $y_{\max}=1,4421$ – форма восстановленного солитона). Анализ рисунка позволяет утверждать, что отражение волны от стенки приводит к уменьшению амплитуды волны и формированию хвоста вторичных волн малой амплитуды⁹.

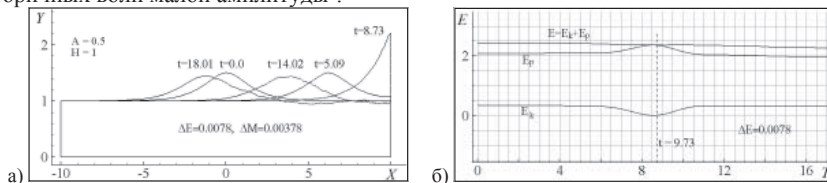


Рис. 2. а) Профиль свободной границы; б) кинетическая, потенциальная и полная энергии.

На рисунке 2, б приведены зависимости кинетической, потенциальной и полной энергий от времени. По оси абсцисс обозначен момент времени максимального заплеска на вертикальную стенку. Нетрудно заметить, что максимум потенциальной энергии и максимальный заплеск на стенку смещены по времени относительно друг друга⁹.

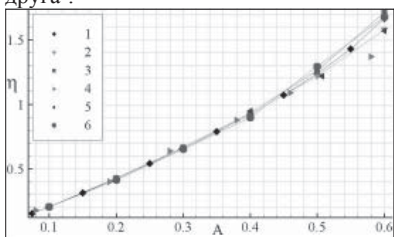


Рис. 3. Сравнение максимального заплеска на вертикальную стенку

(Шокин Ю.И., Рузиев Р.А., Хакимзянов Г.С., 1990), 6 – расчеты автора методом естественных соседей. В работе (Манойлин, С.В., 1989) приведены экспериментальные данные (значения 4). Из рисунка 3 видно расхождение с экспериментальными данными результатов, полученных методом естественных соседей, для амплитуд волны $A \geq 0,5$. При этом с остальными результатами получено хорошее качественное и количественное совпадение для всех приведенных значений амплитуд волн.

Кроме кинематических особенностей течений интерес представляет задача определения динамической нагрузки, возникающей в результате наката волн на вертикальную стенку. Численные методы, способные точно вычислить поле давления, представляют большую ценность при решении прикладных задач. На рисунке 4 представлены графики динамической нагрузки на правую стенку при накате волны. Сплошной линией обозначены результаты, полученные методом естественных соседей, пунктирной – КМГЭ на основе потенциальной модели жидкости. Из

⁹ Афанасьев, К.Е. Решение нелинейных задач гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами методами конечных и граничных элементов: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Кемерово, 1997. – 39 с.

представленных рисунков видно хорошее количественное совпадение значений динамических нагрузок, создаваемых уединенной волной на вертикальную стенку. Стоит отметить тот факт, что поиск давления в модифицированном методе естественных соседей является неотъемлемой составной частью алгоритма движения по времени, в то время как во многих численных методах, в частности КМГЭ, поиск давления является дополнительной краевой задачей на основе известного распределения поля скоростей на каждом временном шаге.

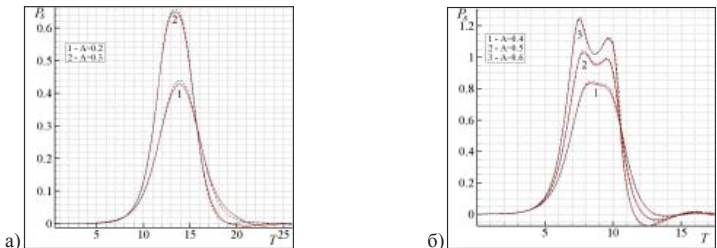


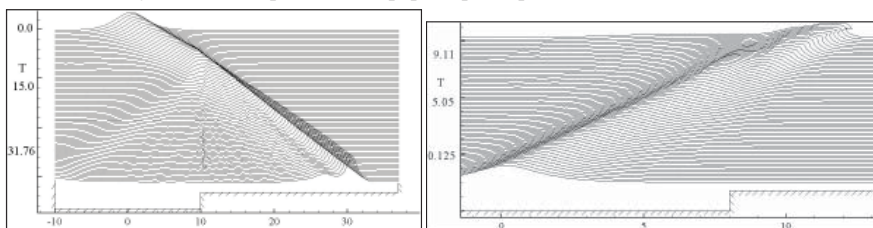
Рис. 4. Динамическая нагрузка на вертикальную стенку для различных амплитуд:
 а) 1 – $A=0,2$; 2 – $A=0,3$; б) 1 – $A=0,4$; 2 – $A=0,5$; 3 – $A=0,6$

Во *втором параграфе* третьей главы приводится решение задачи о движении уединенной волны над прямоугольной ступенькой. Изучение подобных течений имеет важное значение при проектировании береговых и прибрежных объектов. Основными определяющими параметрами задачи являются амплитуда набегающей волны A и высота подводной ступеньки d . Глубина бассейна перед ступенькой $H=1$, а высота слоя жидкости над ступенькой $d_0 = H - d$. При накате набегающей волны на подводную ступеньку на переднем фронте образуется волновой сгусток. Затем амплитуда волны начинает расти, на ее поверхности формируется двойной горб, который в дальнейшем разделяется на отраженную и прошедшую волны. Тестирование алгоритма решения задачи проводилось для таких значений параметров d и A , при которых не происходит обрушения прошедшей волны. Результаты решения сравнивались с численными⁹ и экспериментальными¹⁰ данными. Численное моделирование показало, что при дальнейшем движении прошедшей волны по каналу ее форма трансформируется, волна увеличивается по амплитуде, и от нее отходит четко сформировавшаяся вторая волна, бегущая вслед за первой и отстающая от нее в силу меньшей амплитуды, а следовательно, и скорости (рис. 5, а). Форма свободной поверхности и значения амплитуд волн, полученные в результате расчетов методом естественных соседей, достаточно точно совпадают с указанными экспериментальными¹⁰ и численными данными⁹.

На рисунке 5, а видно, что в диапазоне $10 \leq x \leq 11$ изменения абсциссы поверхность жидкости возмущена волновой рябью. Появление волновой ряби связано с образованием вихревого течения над ступенькой. Существование вихря отмечено в экспериментальной работе¹⁰, однако его влияние на амплитуды прошедших и отраженных волн до сих пор не исследовано. Для определения влияния вихря на амплитуды прошедших и отраженных волн была проведена серия расчетов. Высота

¹⁰ Seabra-Santos F.J. Numerical and experimental study of the transformation of a solitary wave over a shelf or isolated obstacle / F.J. Seabra-Santos, D.P. Renouard, A.M. Temperville // J. Fluid Mech., 1987. – Vol. 176. – P. 117–134.

ступеньки задавалась равной $d=0,5$ и $d=0,7$, амплитуды волн – $A=0,18; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$. Проведенная серия расчетов показала наличие вихрей вблизи передней границы ступеньки для всех рассматриваемых значений амплитуды волны и высоты ступеньки. На рисунке 5, б приведен фрагмент картины наката уединенной волны амплитуды $A=0,6$ на подводную ступеньку высотой $d=0,7$ до момента обрушения гребня волны в интервале времени $0 < t \leq 9,11$. После момента обрушения происходит интенсивное перемешивание жидкости, сопровождающееся появлением брызг. Картины течений на рисунке 6 представлены множеством расчетных узлов. Гребень обрушающейся волны сильно бьет в подошву, выталкивая перед собой движущуюся вперед с большой скоростью массу жидкости, которая в дальнейшем также обрушается. В последующие моменты времени свободная поверхность подвержена сильному волнению, а движение жидкости представлено множеством взаимодействующих волн различных форм и размеров.



а) Режим течения без опрокидывания волны б) Режим течения с опрокидыванием волны
 Рис. 5. Профиль свободной границы: а) $A=0,218; d=0,5$; б) $A=0,6; d=0,7$

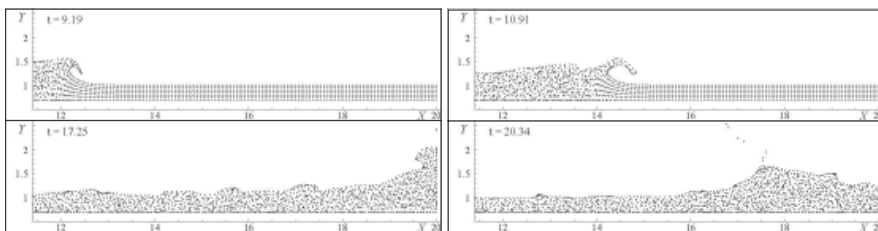


Рис. 6. Картина течения в различные моменты времени: $A=0,6, d=0,7$

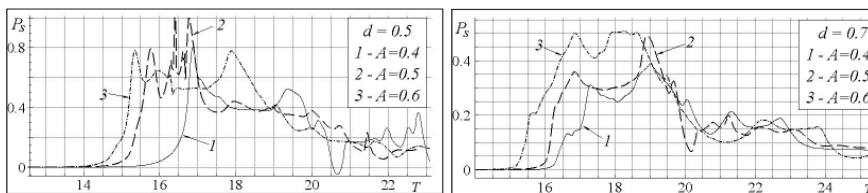


Рис. 7. Динамическая нагрузка на правую стенку бассейна

Динамическая нагрузка, создаваемая волной на правую твердую стенку, представлена на рисунке 7 для высоты ступеньки $d=0,5$ и $d=0,7$ и амплитуды $A=0,4; 0,5; 0,6$. На рисунке 8, а приведена картина вихревого течения, а на рисунках 8, б и в представлено значение циркуляции вихря над ступенькой, соотнесенное к глубине жидкости d_0 для различных амплитуд набегающей волны и высоты ступеньки

$d = 0,7$. Максимальное значение модуля циркуляции достигается в момент отделения отраженной волны от набегающей.

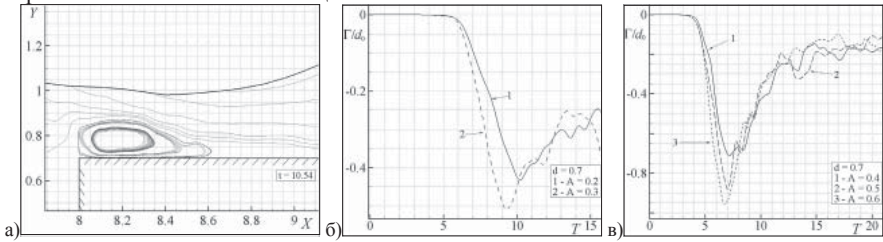


Рис. 8. а) вихревое течение $A = 0,5; d = 0,7$; б), в) циркуляция вихря над ступенькой

Результаты проведенной серии расчетов сравнивались с результатами, полученными КМГЭ на основе потенциальной модели идеальной жидкости в работе⁸ по следующим параметрам: форме свободной поверхности, максимальному значению амплитуды волны A_N при накате на ступеньку, амплитуде отраженной волны A_r , максимальной амплитуде волны A , перед моментом обрушения.

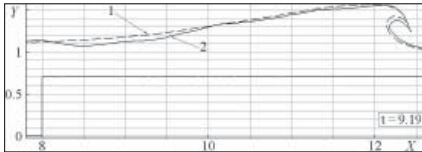


Рис. 9. Профили свободной границы. Кривая 1 – КМГЭ, 2 – NEM

На рисунке 9 в области изменения координаты $8 \leq x \leq 10$ виден значительный изгиб свободной границы в сторону дна для расчета методом NEM. Подобное поведение свободной границы наблюдается для всех проведенных расчетов, параметры которых указаны выше. Причиной изгиба свободной

границы являются вихревое течение, образующееся над ступенькой.

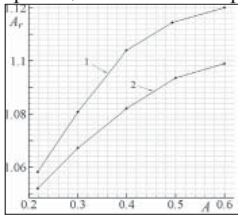


Рис. 10. Амплитуда отраженной волны

В результате сравнения был выявлен интересный факт, касающийся амплитуды отраженной волны: для значений амплитуд набегающей волны $A \geq 0,4$ амплитуда отраженной волны, полученной в результате численного моделирования методом NEM (кривая 1), превышает значение амплитуды отраженной волны для метода КМГЭ (кривая 2) на 15–20 % (рис. 10). При этом значения амплитуд A_N и A_r различаются незначительно (менее 5 %).

В *третьем параграфе* приводится решение задачи о взаимодействии уединенной волны с телом прямоугольного сечения, расположенным на дне. Исследуется влияние ширины L и высоты препятствия d , а также амплитуды волны на основные характеристики возникающего течения жидкости. Расчеты проводились для $L = 2; 7$, $d = 0,3; 0,5; 0,7$ и амплитуд волн $A = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$ в области, где $-8 \leq x \leq 21$. Решению данной задачи посвящена работа¹¹, в которой рассматриваются режимы движения без обрушения гребня волны при прохождении над препятствием. На рисунке 11 приведены фрагменты течения в различные моменты

¹¹ Хажоян, М.Г. Численное моделирование поверхностных волн с подводными препятствиями / М.Г. Хажоян, Г.С. Хакимянов // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 108–123.

времени, полученные методом естественных соседей, для амплитуды $A=0,5$ и размеров тела $L=7; d=0,7$. В области задано 14 000 расчетных узлов. В зависимости от значений размеров тела и амплитуды набегающей волны обрушение можно классифицировать как скользящий или ныряющий бурн⁹. При набегании уединенной волны на препятствие квадратного сечения волновые картины взаимодействия весьма схожи с теми, которые возникают, когда подводным препятствием служит полукруговой выступ на дне¹¹. Серия расчетов для различных амплитуд и $L=d=0,3;0,5;0,7$ показала, что в таком случае на заднем фронте волны формируется всплеск, который опрокидывается «против движения» основной волны.

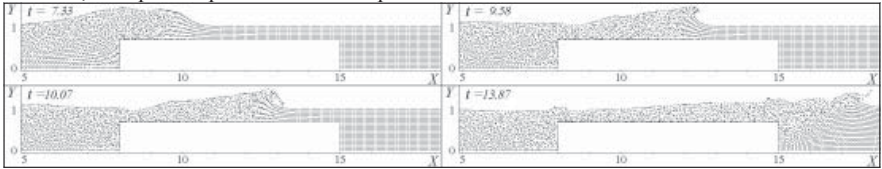


Рис. 11. Картина течения в различные моменты времени. $A=0,5; L=7; d=0,7$

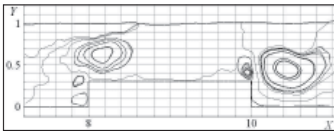


Рис. 12. Вихри вблизи препятствия

В результате проведенной серии расчетов методом естественных соседей установлено наличие вихрей вблизи препятствия, среди которых можно выделить два, обладающих наибольшей циркуляцией (рис.. 12). Один из этих вихрей располагается над передней стенкой препятствия аналогично случаю, возникающему при набегании волны на подводную ступеньку. Второй вихрь находится непосредственно за препятствием. На рисунке 13 приведены графики циркуляции этих вихрей в зависимости от высоты d для амплитуды набегающей волны $A=0,5$. Как видно из рисунков, вихрь, располагающийся за препятствием (рис. 13, б), обладает большей интенсивностью, которая довольно продолжительное время остается на одном уровне. В результате проведенных расчетов установлено (рис. 14), что с увеличением амплитуды набегающей волны амплитуда отраженной волны для метода НЕМ (кривая 1) превышает значение амплитуды для КМГЭ (кривая 2) на 40–60 %.

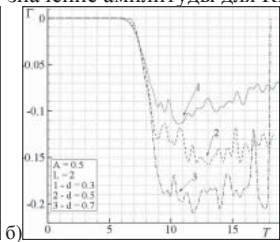
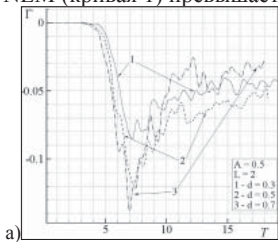


Рис. 13. Циркуляция вихрей вблизи тела

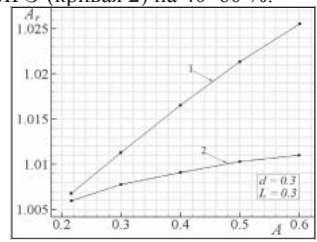


Рис. 14. Амплитуда отраженной волны

Четвертая глава посвящена параллельной реализации метода естественных соседей для многопроцессорных систем с распределенной памятью, применение которых позволяет повысить точность расчета за счет увеличения числа расчетных узлов и значительно сократить временные затраты. *Первый параграф* посвящен разработке параллельного алгоритма метода естественных соседей. Для исследования

его эффективности решалась задача о колебании жидкости в прямоугольном бассейне. Численный алгоритм решения задач гидродинамики методом естественных соседей состоит из следующих крупных блоков: блока построения диаграммы Вороного и определения границ области и трех однотипных блоков, которые включают в себя численное интегрирование и сбор матрицы, внедрение граничных условий, решение полученной СЛАУ. На основе измерения времени при проведении численных расчетов установлено, что с ростом числа узлов в области процентное соотношение времени сбора матрицы к общему времени одного временного шага уменьшается с 48 до 28 %, а соотношение времени решения СЛАУ увеличивается с 43 до 65 %. Внедрение граничных условий занимает 5–12 %, а дискретизация области ячейками Вороного – 1–2 %. Исходя из указанных данных, распараллеливанию подверглись блоки сбора матрицы, внедрения граничных условий и решения СЛАУ. В качестве модели создания приложения была выбрана модель передачи сообщений MPI¹².

Во *втором параграфе* приведены результаты распараллеливания алгоритма. Для определения эффективности и ускорения реализованного параллельного алгоритма была проведена серия расчетов на кластере «СКИФ Cyberia» Томского государственного университета (табл. 3).

Таблица 3

Основные характеристики параллельного алгоритма

N / np	Ускорение				Эффективность				Время			
	2	4	8	16	2	4	8	16	2	4	8	16
1200	1,14	1,17	1,16	1,15	0,57	0,29	0,14	0,07	0,15	0,15	0,15	0,15
10160	1,42	1,51	1,92	2,12	0,71	0,37	0,24	0,13	3,69	3,47	2,73	2,47
20924	1,47	1,93	2,99	4,15	0,73	0,48	0,37	0,13	13,25	10,1	6,52	4,7
36702	-	-	-	-	-	-	-	-	-	34,36	23,09	15,34

Наибольшая эффективность достигается на двух процессорах с числом узлов 20 924 и равна 0,73. Для получения наилучших значений ускорения необходимо данные по процессорам распределить таким образом, чтобы время непосредственных вычислений с этими данными превышало временные затраты на обмены данными между узлами кластера. Указанная особенность алгоритма объясняется свойствами применяемого для решения СЛАУ метода сопряженных градиентов. Распараллеливание алгоритма позволяет проводить расчеты для большого числа узлов за счет использования распределенной памяти. Так, например, был выполнен расчет для 36 702 узлов в области на 4, 8 и 16 процессорах.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1. Предложен численный метод на основе метода естественных соседей для решения нестационарных задач динамики идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами, сопровождающихся большими деформациями расчетной области. Характерной особенностью данного метода является возможность вычисления гидродинамических нагрузок, создаваемых жидкостью на преграды.
2. Разработан и реализован в виде программного комплекса численный алгоритм метода решения в полной нелинейной постановке плоских нестационарных задач со свободными границами. В качестве схемы движения по времени реализован метод дробных шагов.

¹² Афанасьев, К.Е. Многопроцессорные вычислительные системы и параллельное программирование: учеб. пособие / К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов. – Кемерово, 2003. – 182 с.

3. Реализован алгоритм «заметающей плоскости» представления расчетной области ячейками Вороного. Разработаны на основе дискретизации области ячейками Вороного алгоритмы определения естественных соседей для узловой точки и формирования структуры межузловой связности, а также алгоритм определения границ многосвязной расчетной области.
4. Разработан и реализован в виде программного комплекса параллельный алгоритм метода естественных соседей для многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью.
5. Проведены численные эксперименты по расчету в полной нелинейной постановке нестационарных задач о взаимодействии уединенной волны с препятствием в виде подводной ступеньки и тела прямоугольного сечения, расположенного на дне. Обнаружено образование вихревых течений вблизи препятствия. Установлено влияние вихрей на амплитуды отраженных и прошедших волн.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Журналы, рекомендованные ВАК для представления основных научных результатов диссертации:

1. Карабцев, С.Н. Численное моделирование задачи о взаимодействии уединенной волны с подводной ступенькой методом естественных соседей [Текст] / С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, № 2. – С. 55–61.
2. Метод естественных соседей на основе интерполяции Сибсона [Текст] / К.Е. Афанасьев, С.Н. Карабцев, Т.С. Рейн, С.В. Стуколов // Вестник ТГУ. Выпуск «Информационные технологии и математическое моделирование» (Серия «Математика. Кибернетика. Информатика»). – 2006. – № 19. – С. 210–219.

Труды конференций:

3. Карабцев, С. Н. Эффективный алгоритм генерации конечноэлементной сетки для метода естественных соседей [Текст] / С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов // Материалы III Международной научной летней школы «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование». – Кемерово: ИНТ. – 2006. – С. 401–409.
4. Рейн, Т.С. Решение модельных задач гидродинамики методом естественных соседей [Текст] / Т.С. Рейн, С.Н. Карабцев // Недра Кузбасса: труды VI Всероссийской научно-практической конференции. – Кемерово: ИНТ. – 2007. – С. 311–317.
5. Карабцев, С.Н. Применение метода естественных соседей для решения задач идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами [Текст] / С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов // Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии-2008: сборник научных трудов. – Кемерово: ИНТ. – 2008. – С. 351–355.

Тезисы:

6. Карабцев, С.Н. Эффективная реализация метода естественных соседей для решения задач механики жидкости со свободными границами [Текст] / С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов // VII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск, 2006 – С. 21–22.
7. Карабцев, С.Н. Метод естественных соседей для моделирования взаимодействия уединенных волн с подводными препятствиями [Текст] / С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов // Сопряженные задачи механики реагирующих сред, информатики и экологии: материалы Международной конференции, 2007. – Томск: Изд-во Томского университета. – С. 94 – 95.

Подписано к печати 04.05.2008. Формат 60x84¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 327

Издательство «Кузбассвуиздат».
650043, г. Кемерово, ул. Ермака, 7. Тел. 58-34-48

