На правах рукописи

Пененко Алексей Владимирович

Определение температуропроводности слоистых сред методами градиентного спуска

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск
2009

Работа выполнена в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Кабанихин Сергей Игоревич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Танана Виталий Павлович

доктор физико-математических наук, Голушко Сергей Кузьмич

Ведущая организация: Институт математики и механики УрО РАН, г.Екатеринбург

Защита состоится “5” февраля 2010 г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ003.046.01 в Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 630090, г.Новосибирск, просп. ак. Лаврентьева, 6, факс (383) 330-63-42

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики ГПНТБ СО РАН (просп. ак. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан “____” декабря 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Л.Б.Чубаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Непосредственно определить внутреннюю структуру среды часто или невозможно без её разрушения, как, например, в медицине и технике, или неэффективно экономически, как в геофизике и экологии. Если же в среде протекает некоторый процесс, то на основе его математической модели, а также доступных для измерения характеристик, можно попытаться восстановить структуру среды и динамику процесса с помощью решения обратных задач. В контексте математического моделирования речь идет о решении обратной задачи, состоящей в количественной оценке параметров модели по доступной информации.

Общим подходом является нахождение таких параметров модели, при которых заданный функционал, описывающий разницу между рассчитанными по модели и измеренными величинами, достигает минимума на пространстве параметров. Однако, вследствие некорректности по Адамару, свойственной обратным задачам, минимизация таких функционалов не всегда связана с убыванием ошибки в решении. Из-за некорректности, отдельной актуальной задачей является построение устойчивых численных методов решения обратных задач на ЭВМ.

Для эффективного применения оптимизационных методов целесообразно анализировать модели с позиций теории обратных и некорректных задач, получившей развитие в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова и созданных ими научных школ. К настоящему времени в этой области имеется теоретически обоснованный математический аппарат, позволяющий решать широкий класс научных и практических задач. Поэтому сведение различных обратных задач к постановкам, изучающимся в теории некорректных задач, позволяет активно использовать накопленный опыт, а возвращение от абстрактных постановок к математическим моделям даёт возможность получать новые знания о моделируемых процессах.

Моделями теплопроводности (диффузии) описывается множество физических, биологических и социальных процессов. К конкретным примерам относятся процессы теплообмена в почве, диффузии (фильтрации) в нефтяных пластах, процессы изменения электромагнитных полей и др. Так как с помощью этих процессов можно исследовать большой набор важных для практики сред, обратные задачи на основе моделей теплопроводности актуальны и применяются в геофизике, динамике атмосферы и океана, теплотехнике и физике ядерных реакторов, биологии, химии, экономике и т.д.

Объектом исследования являются процессы распространения тепла и диффузии вещества в среде.

Предметом исследования являются характеристики температуропроводности среды и методы их определения, обратные задачи для моделей теплопроводности с данными измерений на границах области, численные алгоритмы градиентного типа для решения обратных задач, численные схемы, используемые в реализации таких алгоритмов на ЭВМ.

Целью работы являются разработка и обоснование методов численного нахождения коэффициентов моделей теплопроводности по данным граничных измерений характеристик тепловых (диффузионных) процессов в слоистых средах.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- для удобства изучения, на примере задачи об определении температуропроводности почвы выполнен переход от постановки физической задачи к общей обратной коэффициентной задаче для модели теплопроводности;
- для построения эффективного метода решения полученной задачи, она была исследована методами теории некорректных задач:
  - введением оператора прямой задачи, обратная задача сформулирована в виде операторного уравнения;
  - построен оператор чувствительности, характеризующий связь между разницей коэффициентов температуропроводности сред и разницей соответствующих им значений функций состояния моделей на границе области;
  - исследованы свойства оператора прямой задачи и оператора чувствительности, выбран адекватный этим свойствам градиентный метод решения нелинейных некорректных задач;

- алгоритмическая реализация метода для решения обратной задачи получена на основе дифференциально-разностного аналога модели теплопроводности в слоистой среде:
  - изучена связь между итерациями алгоритма и решением исходной обратной задачи;
  - разработаны взаимно-согласованные дискретно-аналитические численные схемы для вычисления составляющих градиента функционала невязки;
  - создан комплекс программ и проведены серии численных экспериментов;
- с помощью комплекса программ и полученных теоретических результатов проведено численное исследование задачи об определении температуропроводности почвы.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены с применением методов математического моделирования, теории обратных и некорректных задач, теории возмущений, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории оптимизации, методов вычислительной математики. Для получения и анализа формул использовалась система компьютерной алгебры, а для повышения эффективности программной реализации - методы прикладного параллельного программирования.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- построен оператор чувствительности, связывающий разницу коэффициентов дифференциальной модели теплопроводности с разницей следов функции состояния модели на границе области;
- определены свойства градиентного алгоритма решения дифференциально-разностного аналога обратной задачи, сформулированные в виде теорем:
  - о сходимости градиента функционала невязки дифференциально-разностной обратной задачи в операторной форме к градиенту функционала невязки исходной обратной задачи в операторной форме;

- о характере локальной сходимости алгоритма решения дифференциально-разностной обратной задачи методом проекции градиента (с постоянным параметром спуска) к решению исходной обратной задачи;

- разработаны численные алгоритмы для исследования и решения дифференциально-разностной обратной задачи на основе совместного использования пространственных локально-сопряженных задач для уравнения теплопроводности и спектральных методов;
- с применением распараллеливания посредством OpenMP создан комплекс программ, реализующий алгоритмы решения и исследования дифференциально-разностной обратной задачи;
- на примере задачи об определении температуропроводности почвы с помощью оператора чувствительности исследована прикладная обратная коэффициентная задача.

Научная новизна работы. Предложен новый подход к исследованию процессов теплопроводности в слоистых средах с использованием обратных коэффициентных задач для уравнений параболического типа с данными измерений температуры и потоков тепла на границе области.

Для исследования возможности восстановления коэффициентов модели процесса теплопроводности построен компактный интегральный оператор чувствительности и изучены его свойства.

Доказаны теоремы, описывающие сходимость алгоритма решения дифференциально-разностной обратной задачи методом проекции градиента с постоянным параметром спуска к решению исходной обратной задачи.

Построены новые согласованные численные схемы для решения дифференциально-разностных прямых и сопряженных задач, а также вычисления градиента функционала, в которых совместно применяются аналитические решения локально-сопряженных задач и спектральные методы.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждены доказательствами, согласием между теоретическими выводами и результатами численных экспериментов, а также согласием с выводами других авторов.

Теоретическая и практическая значимость состоит в развитии теории и методов численного решения обратных задач для моделей, описываемых параболическими уравнениями. Результаты представляют интерес для специалистов по математическому моделированию, вычислительной математике, обратным и некорректным задачам. Разработанные алгоритмы и реализующие их комплексы программ могут быть использованы для решения прямых и обратных задач на основе уравнений параболического типа.

Представление работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на Международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященной памяти акад. А.А.Самарского, Москва 2009; на Всероссийской конференции "Математика в приложениях", приуроченной к 80-летию акад. С.К. Годунова, Новосибирск 2009; на Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2009, Новосибирск 2009; на Международной школе-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Новосибирск 2009; на Украинском Математическом Конгрессе, посвященном памяти акад. Н.Н.Боголюбова, Киев 2009; на конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной памяти В.К. Иванова, Екатеринбург 2008; на Международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск 2008; на 5-ом международном конгрессе "Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008)", Венеция 2008; на 6-ой Международной конференции "Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice", Дурдан (Париж) 2008; на 4-ой Международной конференции "Inverse Problems: Modeling and Simulation", Олудениз (Турция) 2008; на Международной конференции "Обратные и некорректные задачи математической физики" посвященной 75-летию акад. М.М. Лаврентьева, Новосибирск 2007; на Международной конференции, посвященной 100-летию акад. И.Н.Векуа "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", Новосибирск 2007.

Основные результаты докладывались на семинарах: в Институте математики СО РАН на семинаре лаборатории волновых процессов (под рук. чл.-корр. РАН В.Г. Романова), в Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН на семинаре под рук. проф. А.Ф. Воеводина, в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН на объединенном семинаре ИВМиМГ и кафедры вычислительной математики НГУ (под рук. проф. В.П. Ильина), в Институте математики и механики УрО РАН на семинаре отдела некорректных задач анализа и приложений (под рук. чл.-корр. РАН В.В. Васина), в Институте вычислительных технологий СО РАН на семинаре "Информационно-вычислительные технологии" (под рук. акад. Ю.И. Шокина и проф. В.М. Ковени).

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [1–20]. Из них (в скобках в числителе указан общий объем этого типа публикаций, в знаменателе – объем, принадлежащий лично автору): [1] в журнале, рекомендованном ВАК (14/6 стр.); [4, 5] в спец. выпусках журнала, рекомендованного ВАК (15/15 стр.); [2] в международном рецензируемом журнале (20/15 стр.); [3, 6] в международных рецензируемых журналах по материалам международных конференций (17/13 стр.); [9] в трудах международной конференции (7/3 стр.); [4, 7] в трудах конференций молодых ученых ИВМиМГ СО РАН (22/22 стр.); одиннадцать работ в тезисах всероссийских и международных конференций [10–20](11/10.5 стр.).

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. В [1] автор принимал участие в постановке задачи, получил доказательство леммы о приближенном градиенте функционала невязки для обратной задачи в слабой постановке с использованием оценок, полученных проф. А.Гасановым для алгоритма грубых-тонких сеток ("coarse-fine mesh method") в его более ранней статье. Автор разработал и реализовал численный алгоритм, провел численные эксперименты. В [2] для задачи теплопроводности с обратным временем автор получил оценку сходимости итераций алгоритма градиентного спуска, минимизирующего функционал специального вида, реализовал алгоритм, провел численные эксперименты на примере задачи о восстановлении размытого изображения. В [3, 9] автор принимал участие в постановке задачи, подготовил разделы статей, посвященные обратной коэффициентной и "боковой" (sideways) задачам теплопроводности, разработал программы и провел расчеты. В [18] автор получил оценку скорости сходимости алгоритма градиентного спуска для "боковой" (sideways) задачи теплопроводности, реализовал программу и провел численные эксперименты.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы из 132 наименований. Объем работы 161 страница (16 рисунков и 4 таблицы). Основной текст диссертации составляет 125 страниц.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору С.И. Кабанихину за внимание к работе и ценные замечания.

Содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы исследования, излагаются цели и краткое содержание диссертации. Формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** приводятся примеры практических задач, сводящихся к обратной коэффициентной задаче для модели процесса теплопроводности в слоистых средах, теоретически исследуются свойства этих моделей и на основе обнаруженных свойств доказывается теорема о локальной сходимости численного алгоритма проекции градиента с постоянным параметром спуска к решению обратной задачи.

В **параграфе 1.1** на примере модели процесса теплопроводности в почве с измерениями на границе области ставится обратная задача (1)-(5) по определению коэффициента k по известным f и α:

$$u_t = (k_{(i+0.5)}u_x)_x,\ (x,t) \in (x_i, x_{i+1}) \times [0,1]\,,\ i \in \{1, N\}\,, \tag{1}$$

$$k_{(1+0.5)}u_x(0+,t) = \alpha(t), \quad k_{(N+0.5)}u_x(1-,t) = 0,\ t \in [0,1]\,, \tag{2}$$

$$[u]\,(x_i,t) = 0, \quad [ku_x]\,(x_i,t) = 0,\ t \in [0,1]\,,\ i \in \{2, N\}\,, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in [0,1]\,, \tag{4}$$

$$u(0+,t) = f(t),\ t \in [0,1]\,, \tag{5}$$

где N, $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$, $\left\{k_{(i+0.5)}\right\}_{i=1}^{N}$ - число интервалов постоянства, точки разрыва и значения коэффициента $k(x)$ на интервалах постоянства соответственно, $\{1, N\}$ - дискретное множество $1, \ldots, N$, безразмерные коэффициенты $k(x)$, характеризующие температуропроводность, принадлежат множеству кусочно-постоянных на отрезке $[0,1]$ функций K, таких, что $0 < k_{\min} \leq k(x) \leq k_{\max} < \infty$, $u \in \cap_{i=1}^{N}(C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0,1)) \cap C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0,1]))$.

Введением оператора A прямой задачи, который при фиксированной $\alpha \in C_0^1\,[0,1]$ ставит в соответствие коэффициенту $k \in K$ след $u(0+, t)$ решения краевой задачи (1)-(4), обратная задача сводится к операторному уравнению

$$A(k) = f. \tag{6}$$

В **параграфе 1.2** приводится обзор литературы по тематике исследования. По данной и смежным темам работали: О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, А.Б. Бакушинский, Н.Я. Безнощенко, Д. Бек, П.Н. Вабищевич, В.В. Васин, А. Гасанов, С.К. Годунов, А.В. Гончарский, П.Г. Данилаев, А.М. Денисов, П. Дю Шато, В. Исаков, К.Т. Искаков, А.Д. Искендеров, С.И. Кабанихин, Дж. Р. Кэннон, А.Л. Карчевский, М.В. Клибанов, А.И. Кожанов, А.И. Козлов, А.И. Кокурин, В.И. Костин, А.С. Леонов, Д. Лесник, Ж.-Л. Лионс, Г.И. Марчук, В.А. Морозов, А.В. Ненарокомов, В.В. Пененко, А.И. Прилепко, А. Рамм, С.В. Румянцев, Б. Рысбайулы, А.А. Самарский, Р.К. Тагиев, В.П. Танана, А.Н. Тихонов, Д. Хао, Н.С. Хоанг, В.А. Чеверда, А.Г. Ягола и др.

В **параграфе 1.3** для эффективного решения (6), лежащая в его основе модель (1)-(5) исследована с позиций теории обратных и некорректных задач. С применением теории сопряженных уравнений получены следующие результаты:

Теорема 1.1, Следствия 1.3, 1.5, 1.6: Для любых $k, \bar{k}, k_* \in K$, $f = A(k_*)$, $\alpha \in C_0^1\,[0,1]$, верны соотношения

$$A(k) - f = \mathcal{L}[k_*, k](k - k_*) = \mathcal{L}[k, k_*](k - k_*), \quad A'(k) = \mathcal{L}[k, k], \tag{7}$$

где $\mathcal{L}[\bar{k}, k] : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ - оператор чувствительности, который является обобщением производной Фреше оператора $A(k)$ и действует по правилу

$$\mathcal{L}[\bar{k}, k]y := \int_0^1 (V[k,x]^* U[\bar{k},x]\alpha) y(x) dx, \;\; y \in L_2(0,1), \tag{8}$$

$$\left\| V[k,.]^* U[\bar{k},.]\alpha \right\|_{L_2((0,1)\times(0,1))} \le \frac{\|\alpha\|}{k_{min}^2}, \tag{9}$$

$$\left\| V[k,.]^* U[\bar{k},.]\alpha - V[k,.]^* U[k_*,.]\alpha \right\|_{L_2((0,1)\times(0,1))} \le \frac{\|\alpha\|}{k_{min}^3} \left\| \bar{k} - k_* \right\|,$$

$U[k,x], V[k,x] : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ - операторы, определенные при $x \in \cup_{i=1}^N (x_i, x_{i+1})$ и действующие по правилам

$$U[k,x]\alpha := \lim_{n\to\infty} u_x(x, .; \alpha_n, k), \tag{10}$$

$$V[k,x]\alpha := \left[U[k,x]\alpha(1-.)\right](1-.), \tag{11}$$

и $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^1[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$; пределы понимаются в смысле нормы $L_2(0,1)$; выражение $y(.)$ означает, что некоторая функция y рассматривается как элемент $L_2(0,1)$; $u(x,t;\alpha_n,k)$ - решение прямой задачи (1)-(4), соответствующее α_n и k; верхним индексом * отмечен сопряженный оператор.

С использованием найденных свойств в **параграфе 1.4** доказывается **Теорема 1.2** о связи решения обратной задачи и последовательности приближений, порождаемой при минимизации функционала невязки (6) алгоритмом проекции градиента с постоянным параметром спуска.

Из (9) вытекает, что $\mathcal{L}[\bar{k}, k]$ является компактным и, следовательно, его сингулярные числа стремятся к 0. Кроме того, он обладает гладкостью по параметрам. Поэтому чувствительность следа решения (на границе) прямой задачи (1)-(4) к возмущению коэффициента модели определяется принадлежностью этого возмущения к определенному сингулярному подпространству, натянутому на правые сингулярные векторы оператора чувствительности.

Для того, чтобы "ограничить" выявленную некорректность, в качестве алгоритма решения рассмотрен градиентный алгоритм минимизации функционала невязки $J(k) = \|A(k) - f\|^2$ на $Q := R \cap K$, где $R := k_0 + Y$, $k_0 \in K$ и Y - некоторое конечномерное подпространство пространства кусочно-постоянных функций. Оператор $\mathcal{L}[\bar{k}, k]$ позволяет получить следующее представление для градиента минимизируемого функционала:

Лемма 1.5: Пусть $k, k+h \in Q$, $h \in Y$, тогда

$$
\begin{gathered}
J(k+h) - J(k) = \langle \nabla_Y J(k), h \rangle + o(\|h\|), \\
\nabla_Y J(k) = 2P_Y (A'(k))^* (A(k) - f) = \\
= 2P_Y \int_0^1 U[k,x]\alpha(t)V[k,x](A(k)-f)(t)dt, \qquad (12)
\end{gathered}
$$

где P_Y - ортогональный проектор на Y.

Так как при проведении реальных вычислений точное решение краевой задачи (1)-(4) в общем случае невозможно, то и $\nabla_Y J(k)$ может вычисляться только приближенно, поэтому в алгоритме приходится использовать некоторое его приближение $\nabla_Y J_M(k)$. Выяснить характер сходимости и оценить влияние различных факторов на сходимость градиентного алгоритма позволяет следующая

Теорема[1]: 1.2 Пусть $k_1, k_* \in K$, $f = A(k_*) + \delta f$, последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ индуктивно порождается алгоритмом проекции градиента с постоянным параметром спуска:

$$
k_{n+1} := P_Q \left(k_n - \gamma \nabla_Y J_M \left(k_n \right) \right), \qquad (13)
$$

где $\gamma > 0$, P_Q - метрический проектор на Q,

$$
1 - a > 0, \quad (1-a)^2 - 4bc \geq 0, \qquad (14)
$$

$$
\|\nabla_Y J_M(k_n) - \nabla_Y J(k_n)\| \leq W, \ n > 0, \qquad (15)
$$

$$
\|k_1 - P_R k_*\| \leq \frac{(1-a) + \sqrt{(1-a)^2 - 4bc}}{2b}, \qquad (16)
$$

[1] на основе Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Козлов А. И. Стабилизирующиеся методы градиентного типа для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений. — Москва: ЛКИ, 2007. — 192 с.

тогда

$$\|k_{n+1} - P_R k_*\| \le a\,\|k_n - P_R k_*\| + b\,\|k_n - P_R k_*\|^2 + c, \qquad (17)$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|k_n - P_R k_*\| \le \frac{(1-a) - \sqrt{(1-a)^2 - 4bc}}{2b}, \qquad (18)$$

где

$$a = \max_{\lambda \in Sp\mathcal{H}[P_Q k_*]} |1 - 2\gamma\lambda| + 8\gamma \dim Y \frac{\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}\,\|\xi\|,$$

$$b = \frac{2\gamma\,\|\alpha\|^2}{k_{\min}^5}(4\dim Y + 1),\ \eta = k_* - P_R k_*,\ \xi = P_R k_* - P_Q k_*,$$

$$\mathcal{H}[k] = \{\langle A'(k)e_i, A'(k)e_j\rangle\}_{i,j=1}^{\dim Y},$$

$$c = 2\gamma\left(\frac{\|\alpha\|}{k_{\min}^2}\left(\frac{\|\alpha\|\,\|\eta\|^2}{k_{\min}^3} + \frac{\|\alpha\|\,\|\eta\|}{k_{\min}^2} + \|\delta f\|\right) + W\right) + \|\xi\|,$$

$\|.\|$ - норма $L_2(0,1)$, P_R - метрический проектор на R, $\{e_i\}_{i=1}^{\dim Y}$ - ортонормированный базис Y, $dimY$ - размерность Y, $Sp\mathcal{H}$ - спектр матрицы $\mathcal{H}$.

Во **второй главе** на основе введения дискретной по времени модели предлагается и обосновывается способ построения приближенного градиента функционала невязки, фигурирующего в **Теореме 1.2**.

В **параграфе 2.1** дискретизацией модели (1)-(5) по времени вводится её дифференциально-разностный аналог

$$u(x,j) - \tau k_{(i+0.5)} u_{xx}(x,j) = u(x,j-1), \qquad (19)$$
$$(x,j) \in (x_i, x_{i+1}) \times \{1,M\},\ i \in \{1,N\},$$

$$k_{(1.5)} u_x(0,j) = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(t)dt,\ k_{(N+0.5)} u_x(1,j) = 0, \qquad (20)$$
$$j \in \{1,M\},$$

$$[u](x_i,j) = 0, \quad [ku_x](x_i,j) = 0,\ j \in \{1,M\},\ i \in \{2,N\}, \qquad (21)$$

$$u(x,j) = 0,\ x \in [0,1],\ j < 1, \qquad (22)$$

$$u(0,j)=\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)dt =: f_M(j),\ j\in\{1,M\}, \tag{23}$$

где $u(.,j)\in\cap_{i=1}^{N}C^2(x_i,x_{i+1})\cap_{i=1}^{N}C^1[x_i,x_{i+1}],\ j\in\{1,M\},\ k\in K$, $\alpha\in L_2(0,1)$, $\tau=T/M$, $\{t_j|j\in\{1,M+1\}\}$ - равномерная сетка на временном отрезке $[0,1]$.

Аналогично дифференциальному случаю строится дискретный аналог оператора прямой задачи A_M и градиент функционала невязки $J_M(k)=\|A_M(k)-f_M\|^2$.

В **параграфе 2.2** проверяется сходимость $\nabla_Y J_M(k)$ к $\nabla_Y J(k)$.

Теорема 2.1: Пусть $\alpha\in C_0^3[0,1]$, $k\in K$, $\{e_l\}_{l=1}^{dimY}$ - ортонормированный базис Y, который используется при вычислении градиента, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $M_\varepsilon=M(\varepsilon,\{e_l\}_{l=1}^{dimY},\alpha,f,k)$, что при $M>M_\varepsilon$ выполняется оценка погрешности

$$\|\nabla_Y J_M(k)-\nabla_Y J(k)\|\leq\varepsilon.$$

В **третьей главе** обсуждаются вопросы построения численных схем для реализации на ЭВМ алгоритма решения обратной задачи, полученного в предыдущих главах. Приводится описание численных экспериментов и, в частности, на примере задачи об определении температуропроводности почвы с помощью оператора чувствительности проводится исследование прикладной обратной задачи. Результаты диссертации сравниваются с выводами других авторов.

В **параграфе 3.1** обсуждается вычисление $\nabla_Y J_M(k)$ по аналогии с (12). Базовым компонентом его вычисления является алгоритм решения (19)-(22). Показано, что (19)-(22) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Методом построения дискретно-аналитических схем, использующим тождество Лагранжа для дифференциальных операторов и фундаментальные решения локально-сопряженных задач в пределах интервалов $[x_i,x_{i+1}]$, находятся элементы матрицы системы. Для получения правых частей системы применяются методы аппроксимации в гильбертовых пространствах с использованием ортонормированного базиса, составленного из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля, и разложения Фурье по этому базису.

Теорема 3.1: Пусть $k \in K$, $\alpha \in L_2(0,1)$, $u(x,j)$ - решение дифференциально-разностной прямой задачи (19)-(22), тогда для $j \in \{1, M\}$

$$\tau k u_x(x_i, j) = F_i^+(j-1) - (R_i^+ + D_i^+)u(x_i, j) + R_i^+ u(x_{i+1}, j),$$
$$\tau k u_x(x_{i+1}, j) = F_{i+1}^-(j-1) - (R_{i+1}^- + D_{i+1}^-)u(x_{i+1}, j) + R_{i+1}^- u(x_i, j);$$

значения функции $u(x_i, j)$ удовлетворяют трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений:

$$(R_i^+ + D_i^+)u(x_i, j) - R_i^+ u(x_{i+1}, j) = F_i^+(j-1) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(t)dt, \ i = 1,$$
$$-R_i^- u(x_{i-1}, j) + (R_i^- + D_i^- + D_i^+ + R_i^+)u(x_i, j) - R_i^+ u(x_{i+1}, j) =$$
$$= F_i^-(j-1) + F_i^+(j-1), \ i \in \{2, M\},$$
$$-R_i^- u(x_{i-1}, j) + (R_i^- + D_i^-)u(x_i, j) = F_i^-(j-1), \ i = N+1,$$

где $H_{i+0.5} = \frac{h_{i+0.5}}{\sqrt{\tau k_{(i+0.5)}}}$, $D_i^{\pm} = \frac{h_{i\pm0.5}\operatorname{Tanh}(H_{i\pm0.5})}{H_{i\pm0.5}}$, $R_i^{\pm} = \frac{h_{i\pm0.5}}{\operatorname{Sinh}(H_{i\pm0.5})H_{i\pm0.5}}$,

$$F_i^{\pm}(j-1) = h_{i\pm0.5} \sum_{m=1}^{j-1} S^-(j-1-m, H_{i\pm0.5})u(x_{i\pm1}, m) +$$
$$+ h_{i\pm0.5} \sum_{m=1}^{j-1} S^+(j-1-m, H_{i\pm0.5})u(x_i, m),$$

$h_{i+0.5} = x_{i+1} - x_i$ и функции $S^{\pm}$ определены для $p \in \mathbb{N}$, $H > 0$ абсолютно сходящимися рядами

$$S^{\pm}(p, H) = 2H^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} (\pi l)^2 H^{-2}}{(1 + (\pi l)^2 H^{-2})^{p+2}}.$$

Полученные схемы являются точными по пространству и точно учитывают краевые условия. Они обладают свойствами аппроксимации, устойчивости и монотонности.

На основе величин $u(x_i, j)$, $i \in \{1, N+1\}$, $j \in \{1, M\}$ и с применением того же аппарата, что и при доказательстве **Теоремы 3.1**, строится алгоритм вычисления $\nabla_Y J_M(k)$, сводящийся к суммированию рядов и векторно-матричным операциям.

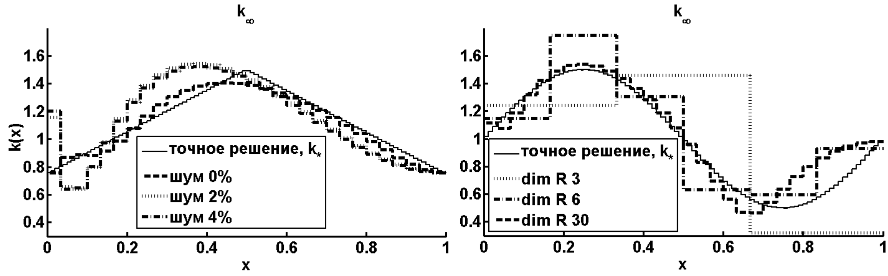

Рис. 1: Влияние шума в данных δf на результат восстановления коэффициента (слева); влияние точности аппроксимации решения k_* линейным многообразием R, определяемой размерностью $\dim R$ (справа)

Параграф 3.2 содержит описание численного алгоритма проекции сопряженных градиентов и серии проведенных с его помощью численных экспериментов, выполненных для проверки теоретических результатов. Исследуется влияние следующих факторов на сходимость алгоритма решения обратной задачи: наличия шума δf в данных (рис. 1, слева), точности аппроксимации решения линейным многообразием R (рис. 1, справа) и погрешностей, обусловленных приближенным вычислением градиента.

В **параграфе 3.3** приводится пример исследования, с использованием сингулярного спектра оператора чувствительности, информативности данных обратной задачи для определения коэффициента температуропроводности почвы в зависимости от точности данных измерений. Полученные выводы проверяются посредством расчетов по алгоритму решения обратной задачи (рис. 2).

В **параграфе 3.4** полученные в диссертации результаты сравниваются с выводами других авторов.

В **Заключении** приводятся основные выводы и обсуждаются перспективы развития полученных результатов.

Таким образом, в диссертационной работе представлен теоретически обоснованный математический аппарат, позволяющий получать решения и проводить анализ широкого круга прикладных задач,

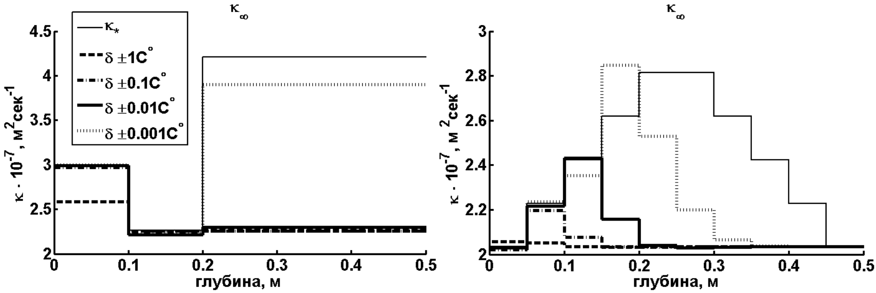

Рис. 2: Результаты восстановления размерного коэффициента температуропроводности почвы κ_* в зависимости от точности δ измерений температуры на поверхности для двух модельных почв

сводящихся к обратным коэффициентным задачам теплопроводности и диффузии. На точность восстановления коэффициента градиентными методами влияют такие факторы как: погрешность в данных измерений, погрешность вычисления градиента, ошибка в априорном выборе общего вида решения, характер убывания сингулярного спектра оператора чувствительности. При решении обратных задач построение точных и согласованных численных схем играет особенно важную роль, так как любые погрешности, вносимые численной схемой, могут существенно влиять на сходимость алгоритма решения обратной задачи.

В **приложении А** даётся краткое описание комплекса программ. В **приложении В** приводятся различные вспомогательные утверждения, используемые в работе, как общеизвестные, так и полученные автором.

Публикации по теме исследования

В рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК:

[1] Кабанихин С. И., Гасанов А., Пененко А. В. Метод градиентного типа для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. 2008. Т. 11 № 1, С. 41–54.

В рецензируемых международных журналах:

[2] Kabanikhin S. I., Penenko A. V. Convergence analysis of gradient descend methods generated by two different functionals in a backward heat conduction problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2009. Vol. 17 No. 7. P. 713–732.

[3] Kabanikhin S., Penenko A. Gradient-type methods in inverse parabolic problems [Электронный ресурс] // J. of Phys.: Conf. Ser. 2008. Vol. 135 No. 012054. P. 1–7. URL: http://www.iop.org/EJ/article/1742-6596/135/1/012054/jpconf8_135_012054.pdf (дата обращения: 23.11.2009)

В рецензируемых журналах по материалам конференций:

[4] Пененко А. В. Обнаружение источников загрязнений с помощью вариационных методов // Вычисл. технологии. 2008. Т.13. Спец.выпуск Ч.3. С. 44–50.

[5] Пененко А. В. Некоторые теоретические и прикладные вопросы последовательного вариационного усвоения данных // Вычисл. технологии. - 2006. Т. 11. Спец.выпуск Ч.2. С. 35–40.

[6] Penenko A. V. Sequential variational data assimilation // Proc. of SPIE. 2005. Vol.6160. No. 61602D. P. 1–9.

В трудах конференций:

[7] Пененко А. В. Анализ сходимости метода проекции градиента для обратной коэффициентной задачи теплопроводности // Труды конф. молодых ученых. Изд. ИВМиМГ СО РАН 2009. С. 125–136.

[8] Пененко А. В. Локализация систем точечных источников для уравнения адвекции-диффузии // Труды конф. молодых ученых. Изд. ИВМиМГ СО РАН. 2008. С. 83–92.

[9] Kabanikhin S., Penenko A. Gradient-type methods in inverse parabolic problems // Book of presentations of the 6th Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice. Dourdan (Paris). France. Nancy:CIRIL. 2008. P.52 (1–7).

В тезисах всероссийских и международных конференций:

[10] Пененко А.В. Численный метод решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности с применением дискретно-аналитических аппроксимаций [Электронный ресурс] // Тез. Украинского математического конгресса - 2009 (посвященного 100-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова). Киев. 2009. URL: http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Penenko1.pdf (дата обращения: 23.11.2009)

[11] Пененко А.В. Метод решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности с использованием свойств интегрального оператора типа разделенных разностей // Межд. науч. конф. «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения. Москва. 2009. С.85.

[12] Пененко А.В. Применение дискретно-аналитических схем для численного решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности [Электронный ресурс] // Тез. Всерос. конф. по вычислительной математике КВМ-2009. Новосибирск. 2009.

[13] Пененко А.В. Решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с применением дискретно-аналитических схем // ”Математика в приложениях”. Всерос. конф., приуроченная к 80-летию академика С.К. Годунова: Тез. докладов / Ин-т математики СО РАН, Новосибирск. 2009. С.203.

[14] Пененко А.В. Итерационное решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности с использованием дискретно-аналитических численных схем [электронный ресурс] //Тез. Межд. школы-конф. ”Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. Новосибирск. 2009. С.74. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/onz09/kniga.pdf (дата обращения: 23.11.2009).

[15] Пененко А.В. Об одном алгоритме нахождения старшего коэффициента в обратной задаче теплопроводности по данным на границе области. // Тез. докл. конф. ”Алгоритмический анализ неустойчивых задач”. Екатеринбург. 2008. С. 228.

[16] Пененко А.В. Об одном методе секущих в применении к задаче идентификации старшего коэффициента в уравнении теплопроводности //Тез. док. Межд. конф. ”Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений” посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск. 2008. С.541.

[17] Penenko A. On some aspects of numerical solution of linear inverse heat conduction problems //Abstracts of the 4th Int. Conf. ”Inverse Problems: Modeling and Simulation”. Oludeniz. Fethiye-Turkey. 2008. P.141.

[18] Penenko A.V., Kabanikhin S.I. Estimating the gradient descent method convergence rate for the sideways heat conduction problem [Электронный ресурс] //Тез. Межд. конф. ”Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященной 75-летию акад. М.М. Лаврентьева. Новосибирск. 2007. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/abstracts/Section3/PenenkoAVKabanikhinSI.pdf (дата обращения: 23.11.2009).

[19] Penenko A.V. A theoretical estimate of the convergence rate of the steepest descent method for the inverse heat conduction problem //Тез. Межд. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа. Новосибирск. 2007. С. 403.

[20] Penenko A.V. Multi-point source localization methodology for the advection-diffusion equation [Электронный ресурс] //Abstracts of the 5th European Congr. on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008). Venice. 2008. (CD-ROM).