На правах рукописи

ЮРЧЕНКО Андрей Васильевич

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

НОВОСИБИРСК — 2005

Работа выполнена в Институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск)

Научный руководитель:	кандидат физико–математических наук, доцент Голушко Сергей Кузьмич
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Куропатенко Валентин Федорович
	доктор физико–математических наук, профессор Самсонов Виктор Иванович
Ведущая организация:	Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Защита состоится « 28 » декабря 2005 года в 11–00 на заседании диссертационного совета Д 003.046.01 при Институте вычислительных технологий СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, просп. М.А. Лаврентьева, 6.

Факс: (383) 330-63-42 E-mail: DSovet@ict.nsc.ru

С диссертацией можно ознакомиться в специализированном читальном зале вычислительной математики и информатики отделения ГПНТБ СО РАН (г. Новосибирск, просп. М.А. Лаврентьева, 6).

Автореферат разослан «____» ноября 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико–математических наук,
профессор Л. Б. Чубаров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Фундаментальная задача научных исследований — выявление причинно–следственных связей, общих тенденций и закономерностей. Так как проведение натурных экспериментов затрудняется их дороговизной и сложностью, проблемами при обеспечении исследователя желаемым количеством измеряемых параметров, а в ряде случаев невозможностью реализации, то моделирование процессов становится одним из наиболее распространенных методов исследования объектов и явлений различной природы. Особая роль при этом отводится вычислительному эксперименту.

Большинство задач математической физики приводит к необходимости численного решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. При этом системы уравнений могут иметь высокий порядок, переменные коэффициенты, содержать малые и большие параметры, что приводит к появлению в структуре решений таких задач быстро изменяющихся функций, а сами решения приобретают ярко выраженный характер погранслоев. Кроме того, нелинейность моделируемых процессов приводит и к нелинейности краевых задач, описывающих эти процессы. Традиционные схемы и алгоритмы численного интегрирования при этом оказываются малопригодными. Поэтому, разработка и совершенствование численных методов и алгоритмов решения краевых задач, возникающих при математическом моделировании объектов и явлений, является важной и актуальной задачей фундаментальной науки.

Актуальным является решение конкретных, практически важных задач, среди которых выделим задачи моделирования и расчета композитных оболочечных систем. Тонкостенные пластины и оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций. Они играют ведущую роль в авиационной и ракетно–космической технике, судо– и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении, жилищном и промышленном строительстве. Значительное повышение требований, предъявляемых к современным конструкциям, заставило использовать при их изготовлении новые композиционные материалы (КМ), сочетающие высокую прочность и жесткость с другими ценными качествами. Это, в свою очередь, привело к необходимости выявления и более полного использования потенциальных возможностей, открывающихся при использовании КМ. Решение задач расчета напряженно–деформированного состояния (НДС) композитных конструкций, определение механизмов разрушения и выявление тенденций их поведения в зависимости от геометрии, структурных и механических характеристик материала, вида и параметров нагружения способствует как выработке конкретных технологических решений, так и формулировке общих рекомендаций по вопросам проектирования конструкций.

ЦЕЛЬ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ заключается в:

- разработке эффективных алгоритмов решения краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений и создании программного комплекса для решения задач расчета и анализа напряженно-деформированного состояния упругих слоистых армированных оболочек вращения;
- исследовании особенностей деформирования упругих слоистых армированных оболочек вращения, выявлении зависимостей их поведения от структурных и механических характеристик композиционных материалов, геометрии оболочек и вида их нагружения.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА РАБОТЫ определяется следующими результатами, которые выносятся на защиту.

- Проведено численное исследование проблемы обеспечения точности и устойчивости расчетов при решении краевых задач методом дискретной ортогонализации. Выработаны критерии контроля и способы обеспечения устойчивости счета. Предложена методика обеспечения и повышения точности расчетов с применением неравномерных сеток.
- Разработан и реализован программно эффективный алгоритм решения многоточечных краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на методе дискретной ортогонализации.
- С помощью созданного программного комплекса решены новые краевые задачи расчета напряженно–деформированного состояния упругих композитных элементов конструкций, выполненных в виде замкнутых в окружном направлении оболочек вращения.
- Проведен сравнительный анализ использования различных структурных моделей композиционного материала и различных вариантов геометрически линейных и нелинейных теорий пластин и оболочек при расчете НДС композитных элементов конструкций. Исследовано влияние структурных и механических параметров композиционных материалов,

геометрии оболочек и вида нагружения на поведение параболических рефлекторов, куполов и тороидальных оболочек вращения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ РАБОТЫ. Разработанные алгоритмы могут быть использованы при решении широкого класса нелинейных многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные с помощью созданного программного комплекса результаты исследования НДС композитных оболочечных элементов конструкций могут служить основой как при выработке конкретных технологических решений, так и при формулировке общих рекомендаций по вопросам проектирования конструкций.

Исследования выполнялись в соответствии с планами научно-исследовательских работ Института вычислительных технологий СО РАН по теме "Теоретические исследования моделей и разработка эффективных численных методов решения нелинейных задач математической физики" (номер государственной регистрации 01. 2. 00 313336), поддерживались грантами: Федеральной целевой программы "Интеграция" (грант № 274); Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ–2314. 2003. 1).

ДОСТОВЕРНОСТЬ полученных результатов обеспечена корректностью постановок рассматриваемых задач и методов их решения, сравнением с известными для частных случаев аналитическими решениями, с численными и экспериментальными результатами других авторов, совпадением решений, полученных двумя принципиально различными численными методами.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: V Всероссийской научно–технической конференции "Механика летательных аппаратов и современные материалы" (Томск, 1998); II и V Сибирских школах–семинарах "Математические проблемы механики сплошных сред" (Новосибирск, 1998; 2001); XXXVII, XXXVIII Международных научных конференциях "Студент и научно–технический прогресс" (Новосибирск, 1999; 2000); V, VI и VII научных конференциях "Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф" (Красноярск, 1999; 2001; 2003); XVI школе–семинаре "Информационные технологии в задачах математического моделирования" в рамках научных мероприятий "Вычислительные технологии — 2000" (Новосибирск, 2000); Конференции молодых ученых, посвященной 10–летию ИВТ СО РАН (Новосибирск, 2000); Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика", посвященной 80-летию академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, 2001); XVII, XVIII, XIX Межреспубликанских конференциях по численным методам решения задач теории упругости и пластичности (Новосибирск, 2001; Кемерово, 2003; Бийск, 2005); Международных конференциях молодых ученых по математике, математическому моделированию и информатике (Новосибирск, 2001; 2002); Международной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании" (Казахстан, Алматы, 2004).

В полном объеме материалы диссертации докладывались и обсуждались на Объединенном семинаре "Информационно–вычислительные технологии" Института вычислительных технологий СО РАН, Новосибирского государственного университета и Новосибирского государственного технического университета (руководители — академик Ю.И. Шокин и д.ф.-м.н., профессор В.М. Ковеня; Новосибирск, 2005); семинаре "Проблемы математического и численного моделирования" Института вычислительного моделирования СО РАН (руководитель — чл.-корр. РАН В.В. Шайдуров; Красноярск, 2005).

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации опубликовано 14 статей в научных журналах и сборниках трудов конференций, а также тезисы докладов на научных конференциях. Список публикаций приведен в конце автореферата.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка, включающего 83 наименования, и приложения. Общий объем диссертации составляет 164 страницы.

Автор считает своим долгом выразить глубокую и искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. Голушко Сергею Кузьмичу за всестороннюю поддержку на всех этапах выполнения работы.

Автор благодарен своим коллегам: к.ф.-м.н. Горшкову В.В. и аспирантке Морозовой Е.В. за ценные научные дискуссии и плодотворное обсуждение полученных результатов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, а также результаты, определяющие научную новизну работы. Приведено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе диссертации описаны методы решения краевых задач, возникающих, в частности, при определении напряженно–деформированного состояния композитных оболочечных элементов конструкций. Сформулированы проблемы, возникающие при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений с малыми и большими параметрами. Изложены алгоритмы используемых в работе методов решения одномерных краевых задач.

В § 1.1 перечислены некоторые подходы к решению двумерных краевых задач для систем дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных по направлениям. Описан метод разделения переменных для сведения краевых задач вида

$$\frac{\partial \mathbf{y}(s,\varphi)}{\partial s} = \mathbf{A}_m(s)\frac{\partial^m \mathbf{y}(s,\varphi)}{\partial \varphi^m} + \mathbf{A}(s)\mathbf{y}(s,\varphi) + \mathbf{f}(s,\varphi), \tag{1}$$

$$(\mathbf{g}_p, \mathbf{y}(s_p,\varphi)) - g_p(\varphi) = 0, \quad p = 1,\dots,S,$$

где $\mathbf{y}$ — вектор решения, $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_m$ — матричные функции, $\mathbf{f}$ — вектор–функция свободных элементов системы, $\mathbf{g}_p$ и g_p — векторы и свободные элементы граничных и локальных условий, к ряду краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{y}}(s)}{ds} = \tilde{\mathbf{A}}(s)\tilde{\mathbf{y}}(s) + \tilde{\mathbf{f}}(s), \quad (\mathbf{g}_p, \tilde{\mathbf{y}}(s_p)) - \tilde{g}_p = 0,$$

где вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ состоит из коэффициентов в разложении компонентов решения исходной задачи в ряды Фурье, $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{f}}$ — матричная и векторная функции, $\tilde{g}_p$ — коэффициенты в разложении в ряды Фурье функций $g_p(\varphi)$.

В § 1.2 обсуждаются проблемы неустойчивости численных алгоритмов при интегрировании одномерных краевых задач, особенности соответствующих систем уравнений. Если для задач Коши вопросы преодоления численной неустойчивости проработаны достаточно подробно, то для многоточечных краевых задач это значительно более сложная проблема. Традиционные схемы и алгоритмы численного интегрирования краевых задач на классах систем нелинейных дифференциальных уравнений, к которым приводят, в частности, задачи механики композитных элементов конструкций, оказываются малопригодными. Следует отметить, что в работах, посвященных проблемам численного интегрирования задач Коши для жестких систем ОДУ, рассматриваются задачи, решение которых устойчиво относительно начальных данных. Для такого класса задач спектр матрицы системы лежит в левой комплексной полуплоскости, хотя допускается и существование собственных чисел с малой положительной действительной частью.

Класс краевых задач статики тонкостенных оболочечных конструкций включает в себя задачи, спектры матриц систем которых содержат и отрицательные, и положительные действительные собственные числа, в том числе очень большие. Так, для матриц систем краевых задач, возникающих при расчете НДС тонкостенных армированных оболочек на основе теорий Кирхгофа — Лява или Тимошенко, эти числа достигают значений порядка 10. В случае использования уточненных теорий пластин и оболочек[1] величины действительных собственных чисел могут быть на два и более порядка больше — от 100 до 1000 и выше.

При численном интегрировании задачи Коши, спектр матрицы которой содержит большие и малые по величине собственные числа, лежащие и в левой и в правой комплексных полуплоскостях одновременно, наряду с классическими проблемами жесткости системы задачи Коши, возникает проблема неустойчивости её решения относительно возмущений начальных данных. В этом случае применение сеток со сколь угодно мелким шагом не дает возможности проинтегрировать задачу с заданной точностью — погрешность численного решения растет экспоненциально, тем быстрее, чем больше величина положительных собственных значений матрицы системы, если длина интервала интегрирования велика, то это неизбежно приводит к неограниченному росту погрешности интегрирования.

В § 1.3 приведены описания используемых в работе методов решения краевых задач для систем ОДУ: метода начальных параметров, метода дискретной ортогонализации (МДО), метода сплайн–коллокации.

Вторая глава посвящена разработке алгоритма решения многоточечных краевых задач для систем ОДУ на основе МДО. МДО хорошо зарекомендовал себя при решении задач расчета осесимметричного НДС композитных сосудов высокого давления и резервуаров, в том числе составных. Использование при этом классической теории пластин и оболочек Кирхгофа — Лява позволило применять метод на равномерных сетках и без особых модификаций. Однако, переход к использованию уточненных теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига на основе гипотез о нелинейном распределении вектора перемещений по толщине оболочки, заставил искать пути по адаптации алгоритма МДО к решению краевых задач для систем ОДУ, в спектрах матрицы Якоби которых содержатся сильно удаленные от мнимой оси величины из обеих комплексных полуплоскостей.

В § 2.1 предложено решение проблемы построения векторов начальных

[1] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. — 288 с.

данных для многоточечных краевых задач. В работе[2], представлен общий алгоритм МДО, но отсутствует описание ряда необходимых при его реализации процедур. Тем самым, у исследователей имеется определенная свобода в реализации алгоритма метода. В частности, не рассматривается вопрос вычисления векторов начальных данных. Кроме того, алгоритм МДО изначально предназначен для решения двухточечных краевых задач, в то время как существует широкий класс проблем, приводящих к решению многоточечных краевых задач. Поэтому в диссертации предложен алгоритм построения начальных векторов в МДО для произвольного вида линейных невырожденных краевых условий, позволяющий, с одной стороны, использовать его при решении двухточечных краевых задач, с другой стороны, модифицировать алгоритм МДО для решения многоточечных краевых задач. Описана соответствующая модификация МДО.

В § 2.2 численно исследованы вопросы обеспечения устойчивости счета при использовании МДО. Исследования проводились на задаче изгиба длинной слоистой пластины[1], аналитическое решение которой содержит в своей структуре быстроизменяющиеся экспоненциальные функции.

Выявлены различные механизмы потери устойчивости, а именно: в результате вырождения набора векторов–решений, в результате неустойчивости численного интегрирования задач Коши или в результате неограниченного роста погрешности численного интегрирования задач Коши. Построены зависимости минимального числа узлов ортогонализации J, при котором счет становится устойчивым, от спектрального радиуса матрицы системы λ. На рис. 1а представлены два варианта таких зависимостей: при нефиксированном (больше трех, подбираемом в зависимости от результатов) количестве интегрирований между узлами ортогонализации (пунктирная кривая) и при фиксированном (три интегрирования, сплошная кривая). В обоих случаях зависимость приближенно стабилизируется на некоторой линейной функции при увеличении λ. Однако, для фиксированного количества интегрирований между узлами ортогонализации эта зависимость более стабильная: $J \approx 0.095 \cdot \lambda + 25$. На рис. 1б приведены значения $W^* = \max_{i,j}\{-\log_{10}|W_{ii,j}|\}$, полученные при построении представленных на рис. 1а зависимостей. Здесь $W_{ii,j}$ — диагональные элементы матрицы $\mathbf{W}_j$ оператора ортогонализации в j–ом узле. Можно видеть, что при увеличении спектрального радиуса матрицы системы рассматриваемые величины стабилизируются, гиперболически приближаясь к значениям порядка $4 \div 5$. При этом, для фиксированного

[2]Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук, 1961. Т. 16. № 3. С. 171–174.

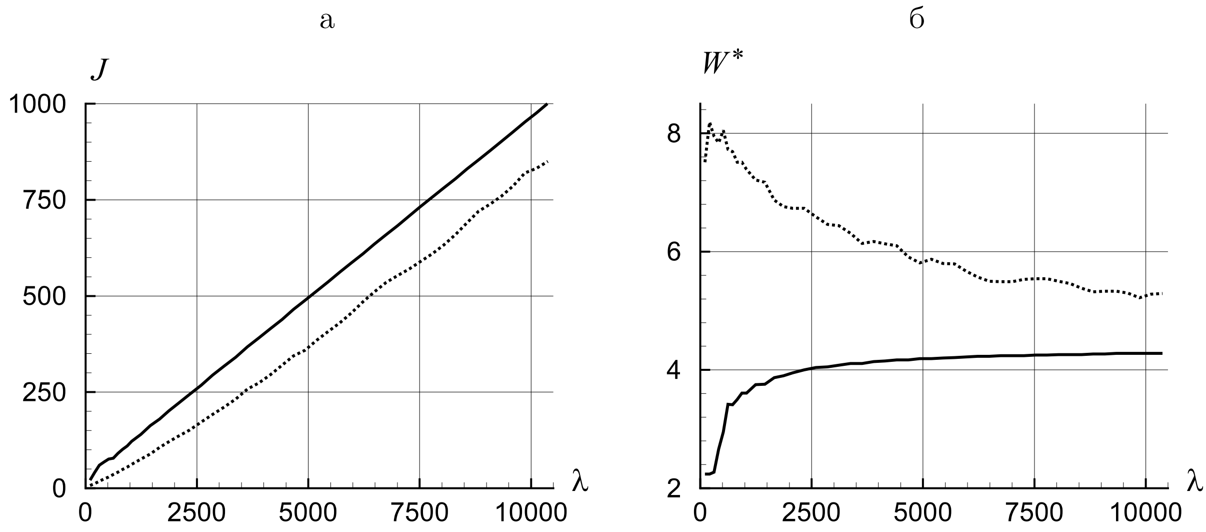

Рис. 1:

числа интегрирований между ортогонализациями в задачах с относительно небольшими спектральными радиусами матрицы системы, условия устойчивости выполняются с запасом, т.е. расчет становится устойчивым при меньшем числе узлов ортогонализации, а недостающую точность можно легко компенсировать измельчая сетку процедуры интегрирования.

Проведенные исследования позволили сформулировать следующие критерии контроля и обеспечения устойчивости расчета МДО. При выборе шага интегрирующей процедуры можно руководствоваться выполнением критерия[3]

$$\max_i \left| \frac{(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)_i}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)_i} \right| \leq \frac{7}{12},$$

начиная со второго или с третьего после ортогонализации интервала интегрирования. Здесь $\mathbf{k}_i$ — стадии метода Рунге—Кутты—Мерсона, используемого для численного интегрирования задач Коши. Выбор расстояния между узлами ортогонализации основывается на анализе оператора ортогонализации $\mathbf{W}$. Необходимым условием уменьшения расстояния является вырожденность набора векторов–решений в узле, достаточным — условия вида:

$$\max_i \{-\log_{10} |W_{ii}|\} \geq \text{const}.$$

Входящая в формулу константа зависит от многих факторов, в т.ч. разрядности математического процессора. В расчетах $\text{const} \approx 4.0$.

На основе предложенных критериев разработан алгоритм решения краевых задач для систем ОДУ с автоматическим обеспечением устойчивости счета. Тестирование на задачах, для которых спектральные радиусы матрицы

[3]Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997. — 195 с.

Якоби систем ОДУ достигали значений порядка 10^4, показало работоспособность алгоритма — получаемые погрешности не превышали долей процента в большинстве случаев (см. табл. 1, где приведены погрешности ε, а также число выполняемых при этом интегрирований).

Таблица 1

Спектральный радиус λ	20.75	103.77	311.32	1037.72	3113.18	10377.2
Погрешность ε, %	0.55	2.75	0.16	0.04	0.14	0.09
Число интегрирований	19	116	371	1236	3722	12258

В § 2.3 приведена схема алгоритма решения краевых задач для систем ОДУ, основанного на методе дискретной ортогонализации и разработанных дополнительных процедурах.

В § 2.4 исследована эффективность разработанных алгоритмов и процедур обеспечения устойчивости счета в применении к решению задачи изгиба круглых слоистых пластин в рамках уточненной теории пластин и оболочек[1]. Получено два варианта разрешающей системы уравнений с переменными коэффициентами: один вариант с постоянными собственными числами матрицы системы, другой вариант — с переменными, гиперболически стремящимися к бесконечности при приближении к нулю. Выписан общий вид аналитического решения задачи. Рассмотрено влияние вида разрешающей системы и параметров задачи на работу алгоритма и его эффективность. Показано, что алгоритм успешно справляется с решением задачи при различных ее параметрах, в том числе при малых радиусах внутреннего отверстия — получаемые погрешности составляют доли процента. При этом погрешности и соответствующие объемы вычислений зависят от параметров задачи и выбора варианта системы уравнений.

В § 2.5 предлагается методика обеспечения и повышения точности расчетов с применением неравномерных адаптивных сеток процедуры Рунге—Кутты—Мерсона численного интегрирования задач Коши, возникающих в МДО. При определении шага таких сеток применяются формулы, построенные по принципу эквираспределения:

$$\Delta(x) = \min\{\Delta_{\max}, \Delta^* \sqrt[4]{\varepsilon'/\varepsilon^*(x)}\}, \tag{2}$$

$$\Delta(x) = \min\{\Delta_{\max}, C \cdot \|(\mathbf{y}^*)'(x)\|^{-1/4}\}. \tag{3}$$

Здесь $\Delta(x)$ — шаг неравномерной сетки, $\Delta_{\max}$ — ограничение сверху на шаг сетки, $\mathbf{y}^*(x)$ — решение, полученное на равномерной сетке с шагом Δ^*, $\varepsilon^*(x)$ —

достигнутая при этом погрешность, для приближенного вычисления которой используется правило Рунге, ε' — требуемая точность, $C = C(\mathbf{y}^*, \varepsilon^*, \varepsilon')$. Показано, что применение предложенной методики позволяет либо существенно — на $2 \div 4$ порядка и более — увеличить точность расчетов, либо сократить объем вычислений в $3 \div 20$ и более раз (см. табл. 2).

Таблица 2

Погрешность	$\varepsilon \approx 10^{-7}$	$\varepsilon \approx 10^{-10}$	$\varepsilon \approx 10^{-12}$
Тип сетки	Число интервалов интегрирования		
Равномерная	13825	75000	237000
Формула (2)	3109	3718	10471
Формула (3)	3077	8119	63022

Третья глава диссертации посвящена вопросам моделирования свойств композитов и описанию основных положений классической теории пластин и оболочек Кирхгофа — Лява и уточненной теории типа Тимошенко, выводу разрешающих систем уравнений, описывающих НДС круглых пластин и оболочек вращения.

В § 3.1 обсуждаются основные подходы к определению физико–механических свойств КМ, представлены используемые в работе структурные модели КМ и критерии прочности и начального разрушения композитов. При использовании структурных моделей КМ физико–механические характеристики композита выражаются через характеристики его компонентов и структурные параметры армирования, при этом удается восстановить напряжения и деформации в связующем и армирующих элементах по известным средним напряжениям и деформациям КМ, что открывает широкие перспективы и возможности для улучшения свойств композитных конструкций. Приведены определяющие соотношения ряда структурных моделей КМ, которые используются в работе: модели В.В. Болотина (МБ)[4], моделей Ю.В. Немировского с одномерными волокнами (МОВ)[5] и с двумерными волокнами (МДВ).[6]

Представлены используемые в работе структурные критерии прочности и начального разрушения композитов, которые базируются на изучении на-

[4]Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.

[5]Немировский Ю. В. Об упруго–пластическом поведении армированного слоя // Журн. прикл. механики и техн. физики, 1969. № 6. — С. 81–89.

[6]Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров, 1972. № 5. — С. 861–873.

пряжений и деформаций в компонентах композита, для каждого из которых принимается тот или иной критерий прочности[1,7].

В § 3.2 дан сравнительный анализ расчетных характеристик однонаправленно и перекрестно армированных КМ с известными экспериментальными данными. Показано, что результаты получаемые по МДВ и МБ, достаточно хорошо соотносятся с экспериментальными данными, что позволяет эффективно использовать эти модели при исследовании НДС армированных конструкций. Модель с одномерными волокнами дает заниженные значения для эффективных жесткостей армированных материалов, что позволяет использовать их для оценки прочности конструкционных элементов с запасом.

В § 3.3 выписаны исходные системы уравнений классической теории оболочек Кирхгофа—Лява[8] и теории типа Тимошенко[9], описывающие неосесимметричное НДС оболочки вращения осесимметричного строения. Изложен способ получения и приведены разрешенные относительно производной по меридиональному направлению системы, состоящие из 8–ми и 10–ти дифференциальных уравнений с частными производными соответственно. Пренебрежение нелинейными слагаемыми позволяет получить уравнения линейных теорий, пригодные для изучения НДС пластин и оболочек при малых деформациях. С помощью метода разделения переменных получены одномерные краевые задачи для определения коэффициентов в разложении решения в ряд Фурье по окружной координате.

Четвертая глава посвящена моделированию поведения главного зеркала параболической антенны. Исследовано влияние структурных и механических характеристик КМ на НДС параболического рефлектора, выполненного в виде тонкой композитной оболочки и подверженного действию собственного веса, ветровой и температурной нагрузок.

В § 4.1 приведена постановка задачи. Системы ОДУ, полученные из исходной системы с частными производными методом разделения переменных, имеют высокий порядок и содержат малые и большие параметры, что приводит к большому разбросу собственных чисел матрицы Якоби этих систем. На степень этого "разброса" существенно влияют механические и структурные параметры материала, номера рассчитываемых гармоник в разложении решения в ряды Фурье, кроме того, он переменный вдоль меридиана оболочки.

---

[7] Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986. — 165 с.

[8] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1951. — 344 с.

[9] Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. — 321 с.

Так, при изменении структуры материала, величина

$$\Lambda^* = \max_r \frac{\max_j |\lambda_j(\tilde{\mathbf{A}}(r))|}{\min_j |\lambda_j(\tilde{\mathbf{A}}(r))|},$$

характеризующая указанный "разброс" собственных чисел λ_j матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ системы ОДУ, возникающей при расчете антисимметричного НДС углепластикового рефлектора, изменяется почти в 6 раз.

В § 4.2 рассмотрено деформирование рефлектора антенны, находящегося в условиях осесимметричного нагружения действием собственного веса и температуры, а в § 4.3 — неосесимметричного нагружения действием собственного веса и давления ветра, что создает, наряду с осесимметричными компонентами решения, антисимметричное НДС.

Проведены параметрические исследования влияния структуры КМ на характер поведения рефлектора, показавшие, в частности, что армирование высокомодульными волокнами может как улучшить, так и ухудшить жесткостные и прочностные характеристики конструкции. Это является существенным аргументом в пользу проведения предварительных исследований перед применением КМ. Показано, что при изменении структуры армирования может происходить перераспределение напряжений между материалами связующего и армирующих волокон. В целом меняя структуру КМ можно добиться изменения уровня интесивностей напряжений в материале армирующих волокон до 10 раз, в материале связующего — до 3 раз и более;

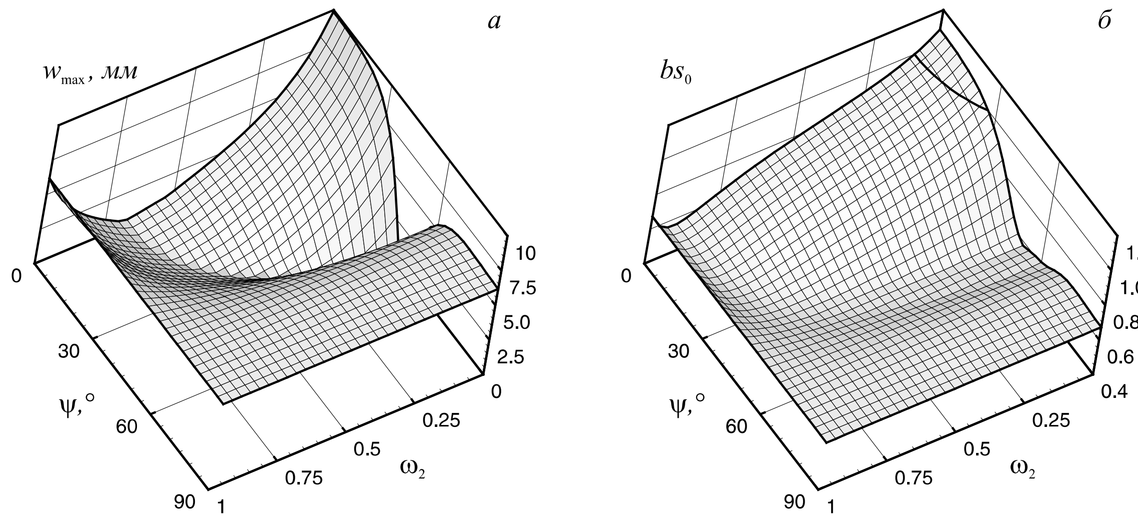

Рис. 2.

прогибы могут меняться более чем в 3 раза, а в случае термонагруженного алюминиево–углеродного рефлектора, находящегося под действием собственного веса — до 30 раз, как на рис. 2. Здесь $w_{\max}$ — максимальные по всей поверхности рефлектора прогибы, bs_0 — максимальные приведенные интенсивности напряжений в материале связующего, ψ, $-\psi$ — углы укладки спиральных семейств волокон, ω_2 — удельная интенсивность армирования окружного семейства волокон. Выбор удачной схемы армирования углеродными волокнами алюминиевого рефлектора, находящегося в условиях сложного нагружения действием собственного веса и давления ветра, позволяет уменьшить прогибы на 50% в сравнении с изотропной конструкцией тогоже веса, при этом предпочтение нужно отдавать схемам, когда вся арматура уложена вдоль меридианов.

Анализ влияния вида нагружения на НДС рефлектора показал, что при изменении углов наклона оси антенны и направления ветра прогибы меняются более чем в 10 раз, а максимальные интенсивности напряжений — в 6 раз; максимальных значений напряжения и прогибы достигают в случаях, когда направление ветра перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось рефлектора и вертикаль.

В § 4.4 рассмотрено комбинированное нагружение рефлектора антенны собственным весом, ветровой и температурной нагрузками.

Параметрические расчеты показали, что характер зависимостей максимальных прогибов и интенсивностей напряжений в связующем для титаноуглеродного и алюминиево–углеродного рефлекторов качественно схож. При этом диапазон значений, принимаемых максимальными прогибами титаноуглеродного рефлектора существенно меньше, однако минимальные значения $w_{\max}$ достигаются при использовании менее жесткой, алюминиевой матрицы.

В зависимости от структурных параметров прогибы в алюминиево–углеродном рефлекторе изменяются более чем в 6 раз, а при использовании титановой и кремний–органической матриц интенсивности напряжений в армирующих волокнах изменяются более чем в 10 раз.

В § 4.5 приведено сравнение результатов расчетов методами дискретной ортогонализации и сплайн–коллокации на задаче определения НДС зеркала параболической формы отдельно по гармоникам, показавшее, что относительные разности компонент решения не превосходят 0.05%. При уменьшении шага сетки для метода дискретной ортогонализации и увеличении требований к точности для метода сплайн-коллокации результаты сближаются, и относительные разности компонент решения достигают значений порядка 10^{-8} %.

С точки зрения эффективности по временным затратам, метод дискретной ортогонализации превосходит метод сплайн–коллокации, позволяя достигать такой же точности в $3 \div 10$ раз быстрее.

В пятой главе исследованы особенности деформирования, определены нагрузки начального разрушения армированных куполов, находящихся под действием собственного веса, ветровой и температурной нагрузок.

В § 5.1 приведена постановка задачи. Исследована структура матрицы системы ОДУ в зависимости от геометрии оболочки, структурных и механических характеристик КМ, номера рассчитываемой гармоники.

В §§ 5.2, 5.3 рассмотрен купол под действием собственного веса без учета и с учетом ветровой нагрузки. Исследовано влияние формы купола и его линейных размеров, структурных и механических характеристик КМ на запас прочности. Выявлены характерные зависимости оптимальной высоты купола от типа его геометрии, структурных и механических характеристик КМ.

Характер зависимостей максимальных интенсивностей напряжений от высоты купола существенно зависит от его геометрии и структурных параметров КМ, при этом влияние механических характеристик КМ лишь количественное. Для каждого типа геометрии и структуры армирования существуют характерная высота купола, при которой напряжения в материале связующего минимальны. При воздействии ветровой нагрузки можно выбором формы меридиана и высоты купола увеличить запас прочности конструкции более чем в 2 раза. Исследования показали, что при нагружении только собственным весом эффективнее использовать эллиптические, близкие к сферической форме купола и жесткую крышку в вершине купола, в то время как при наличии ветровой нагрузки больший запас прочности можно обеспечить при использовании гиперболических куполов со свободным краем в вершине.

В § 5.4 рассмотрено комбинированное нагружение купола собственным весом, температурной и ветровой нагрузками. Исследовано влияние структурных и механических характеристик КМ на прочность куполов различной формы. Определены нагрузки начального разрушения.

Малый вклад действия собственного веса в НДС куполов, нагруженных давлением ветра и температурой, позволяет строить гиперповерхности прочности в пространстве приращения температуры и давления ветра. На рис. 3 а представлены гиперповерхности прочности для железобетонного (кривая 1), стеклопластикового (кривая 2) и металлокомпозитного (кривая 3) параболических, а также для гиперболического (кривая 4) и эллиптического (кривая 5) металлокомпозитных куполов откуда, в частности, можно видеть, что стек-

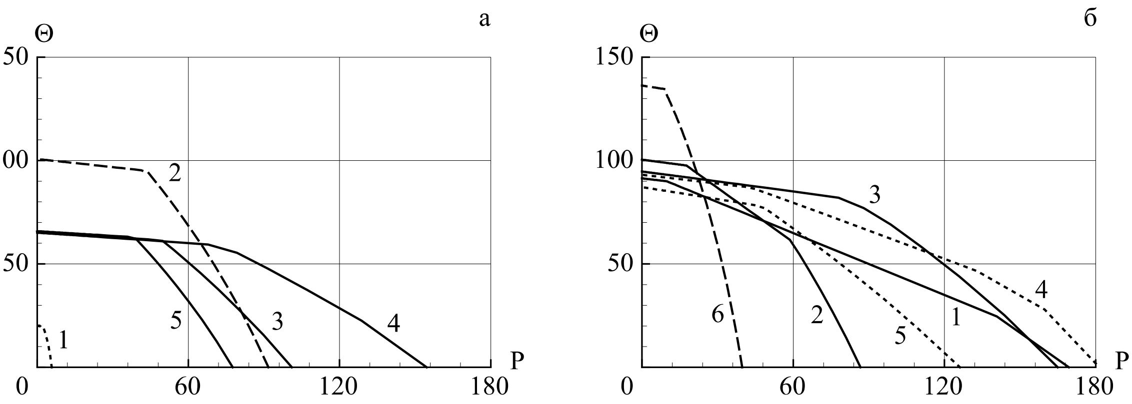

Рис. 3.

лопластиковый купол (2) может быть более выносливым в отношении температурного нагружения, чем металлокомпозитный (3), что форма меридиана купола мало влияет на его выносливость в отношении температурного нагружения (кривые 3–4). На рис. 3 б показано влияние структуры армирования на область упругого поведения гиперболического стеклопластикового купола. Кривым соответствуют параметры армирования $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.2$, $\omega_3 = 0.6$, $\psi = 15^\circ$ (кривая 1), $\psi = 45^\circ$ (кривая 2), $\psi = 75^\circ$ (кривая 3), $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0.4$ (кривая 4), $\omega_1 = 0.4$, $\omega_2 = 0$ (кривая 5), $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 1$, $\psi = 45^\circ$ (кривая 6), где ω_1 — удельная интенсивность укладки спиральных семейств волокон, ω_3 — интенсивность армирования в меридиональном направлении. Очевидно, что изменением структуры армирования можно существенно влиять на прочность конструкции, исходя из вида ее нагружения.

В § 5.5 приведен анализ достоверности полученных численных решений, показавший удовлетворительную степень совпадения результатов, получаемых двумя принципиально разными численными методами.

В шестой главе, изучено влияние неоднородности и анизотропии КМ на деформирование резинокордной тороидальной оболочки. Исследовано влияние выбора модели КМ и теории оболочек, учета нелинейности на результаты расчетов напряженно–деформированного состояния оболочки. Рассмотрены схемы армирования оболочки с несимметричным, относительно меридиана, строением.

В § 6.1 исследовано влияние и показана необходимость учета нелинейных слагаемых при расчете резинокордных тороидальных оболочек, состоящих из разного числа слоев, при использовании различных материалов корда. Приведенные на рис. 4 результаты соответствуют расчетам с использованием линейной классической теории оболочек (сплошные кривые) и теориям Тимошенко: линейной (штриховые кривые) и нелинейной (штрихпунктир-

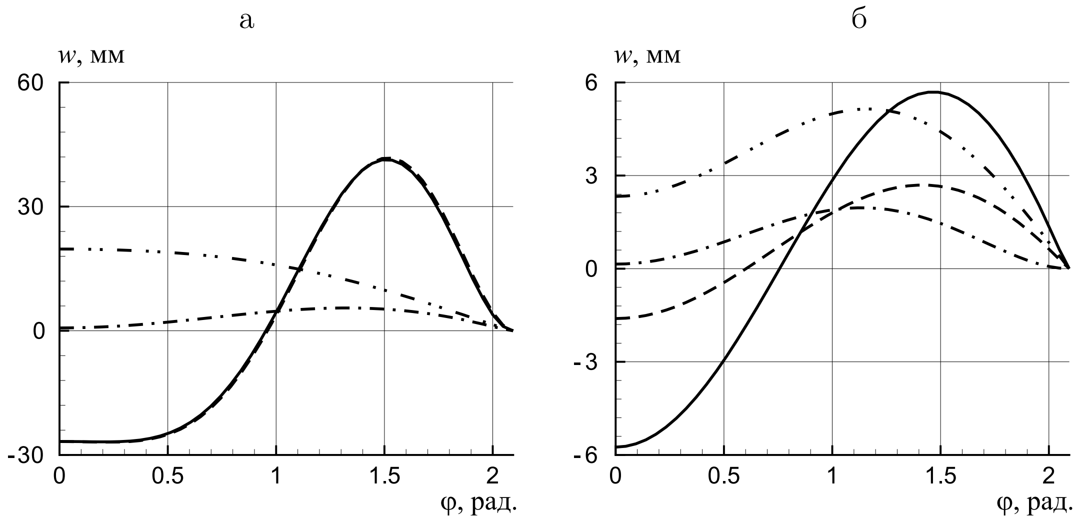

Рис. 4.

ные кривые). Рассчитывались двухслойные оболочки с вискозным кордом (рис. 4 а) и с металлокордом (рис. 4 б) при $P = 0.5$ атм. Для сравнения рассчитано НДС оболочек с использованием нелинейной теории Тимошенко при значении $P = 2$ атм. (штрихпунктирные кривые с двумя точками). Различие между результатами, Получаемыми в рамках классической теории оболочек Кирхгофа—Лява и в рамках теории Тимошенко проявляется при большой разнице между модулями упругости связующего и арматуры.

Показано существенное влияние на результаты расчетов выбора модели КМ. При этом МДВ и МБ показывают близкие результаты, а применение МОВ дает иную картину, как по максимальным значениям — отличие в прогибах может быть от 2–х до 4–х раз, так и по характеру — в частности, может принципиально меняться положение экстремумов для прогиба. При этом существуют параметры, когда отличие между результатами, получаемыми с применением МДВ и МОВ не столь значительно.

В § 6.2 изучено влияние неоднородности и анизотропии КМ на деформирование резинокордной тороидальной оболочки. Показано, что переход от перекрестно армированной 8-ми слойной к квазиоднородной по толщине тороидальной оболочке не вносит существенных погрешностей (не более 5 %) в величины интенсивностей напряжений в элементах КМ, а в случае 16-ти слойной оболочки они практически совпадают с квазиоднородной моделью. Так как использование квазиоднородности по толщине существенно упрощает расчеты, то можно сказать, что применение этой гипотезы оправдано при количестве перекрестно армированных слоев более 4-х, а при количестве слоев более 8 — целесообразно.

В § 6.3 рассмотрено применение несимметричных относительно меридиана схем укладки корда. Армирование по таким схемам приводит к необходимости учета поперечных сдвигов и усложняет разрешенную систему уравнений. В результате исследования удалось показать, что применение несимметричных схем армирования позволяет реализовать значительно более широкий спектр НДС в оболочке, в сравнении симметричными схемами укладки арматуры. В частности можно, сохраняя достаточную гибкость оболочки, изменять в широком диапазоне уровень максимальных интенсивностей напряжений в связующем материале и корде, и наоборот.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. Разработан эффективный алгоритм численного решения многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведено тестирование алгоритма на задачах с известными аналитическими решениями, показавшее, что его применение позволяет успешно решать краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, спектральные радиусы матрицы Якоби которых достигают значений на несколько порядков больше единицы.

2. Численно исследована проблема обеспечения устойчивости метода дискретной ортогонализации при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений с малыми и большими параметрами. Построены зависимости необходимого числа узлов ортогонализации от спектрального радиуса матрицы системы дифференциальных уравнений, обеспечивающие устойчивость расчетов. Выявлены характеристики, позволяющие контролировать и управлять устойчивостью вычислительного процесса. Выработаны критерии и предложены методики выбора шага интегрирования и расстояния между узлами ортогонализации для обеспечения устойчивости счета. Предложена методика обеспечения и повышения точности расчетов с применением неравномерных адаптивных сеток, применение которой позволяет на порядки повышать точность расчетов, либо в десятки раз уменьшать объем необходимых вычислений.

3. С помощью созданного программного комплекса решены новые краевые задачи расчета напряженно–деформированного состояния и проведено исследование особенностей деформирования композитных оболочечных элементов конструкций: параболических рефлекторов, гиперболических, параболических и эллипсоидальных куполов, тороидальной оболочки.

Проведен сравнительный анализ использования при этом классической и уточненной теорий оболочек в геометрически линейной и нелинейной постановках, различных структурных моделей композиционного материала. Указаны области параметров конструкций, при которых получаемые с использованием различных теорий оболочек и моделей композиционного материала результаты отличаются несущественно, параметры, при которых учет нелинейных слагаемых необходим.

4. Показано существенное влияние анизотропии материала, структурных и механических характеристик композита, вида и параметров нагружения на напряженно–деформированное состояние композитных конструкций: на величины прогибов и интенсивностей напряжений в элементах композита, на характеры их распределения. Обнаружено, что в зависимости от структурных и механических параметров композиционного материала в конструкции могут реализовываться различные механизмы начального разрушения. Показано, что, в сравнении с симметричными схемами армирования, применение несимметричных схем открывает более широкие возможности по управлению поведением оболочек.

Основные результаты диссертации отражены в следующих публикациях.

1. Голушко С.К., Горшков В.В., **Юрченко А.В**. Нелинейное поведение армированных сосудов давления // Механика летательных аппаратов и современные материалы: Доклады конференции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. С. 140–141.

2. Горшков В.В., **Юрченко А.В.** О двух численных методах расчета сопряженных композитных конструкций // Материалы XXXVII международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск, 1999. С. 30–31.

3. Голушко С.К., Горшков В.В., **Юрченко А.В.** О двух численных методах расчета сопряженных композитных конструкций // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф. Материалы V научной конференции, посвященной 275-летию Российской академии наук, Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999. С. 49–55.

4. Голушко С.К., Горшков В.В., **Юрченко А.В.** Анализ поведения армированного сосуда в геометрически нелинейной постановке // Динамика сплошной среды / Ин-т гидродинамики СО РАН. Новосибирск, 1999. Вып. 114. — С. 155–160.

5. **Юрченко А.В.** Исследование напряженно-деформированного состояния рефлектора антенны // Материалы XXXVIII международной научной студенческой конференции "Студент и научно–технический прогресс". Новосибирск, 2000. Ч. 1. С. 73–74.

6. Голушко С.К., **Юрченко А.В**. Расчет напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов зеркальных антенн // Труды конф. мол. уч., посвященной 10-летию ИВТ СО РАН. Новосибирск, 25-26 декабря 2000 г. / Т. II: Математическое моделирование. С. 28–31.

7. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Разрушение армированной параболической антенны при действии экстремальных нагрузок // Природно–техногенная безопасность Сибири. Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Тр. научн. мероприятий / Научн. ред. Ю.И. Шокин, Н.А. Махутов, В.В. Москвичев. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2001. — С. 193–198.

8. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Расчет напряженно–деформированного состояния армированных тонкостенных элементов зеркальных антенн // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика, 2001. Т. 1. Вып. 2. — С. 38–62.

9. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Моделирование поведения главного зеркала композитной параболической антенны // Вычислительные технологии, 2001. Т. 6. Ч. II. — С. 750–759.

10. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Влияние структурных и механических характеристик композиционного материала на деформирование зеркальной антенны // Прикладная механика и техническая физика, 2002. Т. 43. № 2. — С. 170–175.

11. Голушко С.К., Горшков В.В., **Юрченко А.В.** О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач // Вычислительные технологии, 2002. Т. 7. № 2. — С. 24–33.

12. **Юрченко А.В.** Применение адаптивных сеток при решении краевых задач для жестких систем ОДУ // Тезисы Международной научной конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 2002. С. 44–45.

13. Golushko S.K., **Yurchenko A.V.** Effect of Structural and Mechanical Characteristics of the Composite Material on the Deformation of a Reflector

Antenna // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2002. Vol. 43. No. 2. — P. 315–319.

14. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Расчет тонкостенных композитных куполов методом дискретной ортогонализации // Тр. XVIII Межреспубл. конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". Новосибирск, 2003. С. 55–62.

15. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** Анализ поведения композитного купола при действии экстремальных нагрузок // Тр. VII Всерос. науч. конф. "Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф". Красноярск, 2003. Т. 1. — С. 93–99.

16. Голушко С.К., Морозова Е.В., **Юрченко А.В.** О численном решении краевых задач для жестких систем дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика, 2005. № 2. — С. 12–26.

17. Голушко С.К., Горшков В.В., Морозова Е.В., **Юрченко А.В.** Многослойные цилиндрические оболочки: сравнение решений для различных оболочечных теорий и пространственной теории упругости // Тр. XIX Межреспубл. конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". Новосибирск, 2005. С. 77–84.

18. Голушко С.К., **Юрченко А.В.** О численном решении жестких краевых задач уточненных теорий пластин и оболочек // Там же. С. 92–100.

Подписано в печать 25.11.2005
Формат бумаги 60 × 84 1/16
Тираж 100 экз. Заказ № _____

ЗАО "РИЦ "Прайс-Курьер", 630090, г.Новосибирск, просп. ак. М.А. Лаврентьева, 6