

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр  
Сибирского отделения Российской академии наук»

*На правах рукописи*

Володько Ольга Станиславовна

**АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЙ В ОЗЕРЕ ШИРА В ЛЕТНИЙ ПЕРИОД  
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
И НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доцент  
Компаниец Лидия Алексеевна

Красноярск — 2021

## Оглавление

Введение.....	5
ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ .....	16
1.1. Математическая модель трехмерного ветрового течения жидкости в замкнутом водоеме .....	17
1.2. Аналитические решения для модели Экмана ветрового движения жидкости.....	21
1.2.1 Решение с условием прилипания на дне при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена .....	23
1.2.2 Решение с условием проскальзывания на дне при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена .....	25
1.2.3. Решение с условием проскальзывания на дне при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена .....	28
1.3. Аналитические решения для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (течение в вертикальной плоскости).....	29
1.3.1. Решение при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ ).....	30
1.3.2. Решение при линейном распределении $K_z$ по глубине .....	34
1.3.3. Решение при экспоненциальном изменении $K_z$ по глубине.....	37
1.4. Аналитические решения для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (трехмерный случай).....	40
1.4.1. Решение при постоянном коэффициенте горизонтального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ ).....	40
1.4.2. Решение при переменном коэффициенте горизонтального турбулентного обмена (дрейфовая составляющая) .....	44

1.5. Заключение по Главе 1 .....	49
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКОГО РЕЖИМА ОЗЕРА ШИРА .....	51
2.1 Численная модель ROMS .....	52
2.2 Адаптация кода ROMS к расчету течений в озере Шира.....	54
2.2.1 Построение цифровой модели рельефа дна .....	54
2.2.2 Верификация модели ROMS.....	68
2.3. Сравнительный анализ разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса-диффузии на аналитических решениях.....	69
2.3.1. Одномерный случай.....	70
2.3.2. Двумерный случай .....	86
2.4. Расчеты в модели ROMS .....	94
2.4.1 Методические расчеты .....	96
2.4.2 Расчеты с метеорологическими данными .....	102
2.5. Спектральные оценки .....	104
2.6. Заключение по Главе 2 .....	108
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ДАННЫХ НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ОЗЕРЕ ШИРА МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ...	110
3.1. Анализ данных измерений температуры.....	112
3.1.1. Натурные измерения температуры в озере Шира .....	112
3.1.2. Анализ долговременных измерений температуры методом эмпирических ортогональных функций.....	113
3.1.3. Анализ поверхностной температуры .....	116
3.2. Анализ долговременных измерений скорости.....	119

3.2.1. Натурные измерения скорости в озере Шира .....	119
3.2.2. Анализ изменения силы и направления ветра и скорости течения .....	120
3.2.3. Анализ длительных измерений скорости комплексным методом эмпирических ортогональных функций.....	123
3.2.4. Анализ коэффициента вертикального турбулентного обмена...	130
3.3. Заключение по Главе 3 .....	131
Заключение .....	133
Список литературы .....	136
Приложение 1. Описание акустических доплеровских профилографов течений	155

## Введение

Начало двадцать первого века ознаменовано рядом экологических катастроф на водных объектах, временами связанных с последствиями необратимого характера.

Некоторые из этих катастроф имеют антропогенный характер. К таким можно отнести загрязнение р. Енисей в результате аварии на Саяно-Шушенской ГЭС, аварию с разливом топлива в Норильске, разлив нефти в Мексиканском заливе, попадание нефтепродуктов в р. Ангара. Другие имеют природный характер и, например, могут быть связаны с неконтролируемым размножением водорослей в результате климатических изменений (такова одна из версий загрязнения побережья Камчатки). Поэтому состояние окружающей среды вызывает тревогу мирового сообщества как на уровне сохранения природы в отдельно взятом месте, так и в контексте решения этой проблемы в целом на Земле.

Озера часто являются важными народно-хозяйственными и рекреационными объектами, и от них зависит экономико-социальное состояние регионов.

Прогноз качества воды и биологического разнообразия представляет собой важнейшую задачу, которая не может быть решена без исследования динамики озер. Гидрофизика озер представляет собой значительную и важную часть исследования природных водоемов. При том, что в этой области достигнут значимый прогресс, вопросов остается больше, чем ответов.

При различных способах исследования динамики озер: теоретические исследования, натурные измерения, численный эксперимент – ни один из этих методов исследования не может привести к абсолютно достоверным результатам и требуется их применение в совокупности.

Теоретические оценки скорости течения для конкретного водоема делают как правило, только в упрощенных случаях, но подобного рода исследования необходимы, так как они дают априорные оценки, позволяя отбросить заведомо ошибочные результаты, получающиеся в результате исследования.

Качество натурального эксперимента зависит от того, насколько технически совершенна приборная база и от применяемых методов обработки данных. Как правило, измерения могут быть проведены только в нескольких конкретных точках с возможным обобщением полученных результатов на всю акваторию и глубину.

Численное моделирование позволяет получить решение в узлах расчетной сетки, но здесь большое значение имеют выбор метода построения разностной сетки, точность и эффективность численного алгоритма. То, насколько подробную и достоверную картину течения можно получить, зависит от того, насколько удачно выбран подходящий численный метод и способы его реализации.

Главный объект нашего исследования – уникальное соленое озеро Шира, которое является центром рекреационной зоны. Увеличение в последние годы антропогенной нагрузки на озеро создало угрозу уменьшения лечебных свойств воды и, соответственно, поставило задачу комплексного изучения экологического состояния этого озера. В последние годы исследования продолжались как по направлению изучения физических, биологических и химических свойств озера [61], так и по математическому моделированию гидрофизического режима озера [64, 85, 18, 25–27], что позволило уточнить картину течений в озере Шира в осенне-весенний и летний периоды. В летний период озеро стратифицировано по температуре и солености, поэтому важным фактором его функционирования является наличие внутренних волн и обусловленные ими процессы перемешивания в прибрежной зоне.

При комплексном изучении динамики озера в летний период применялись следующие методы.

Для теоретического изучения течений использовались аналитические решения упрощенных моделей стационарного ветрового движения жидкости, полученные автором.

Для численного моделирования течений в озере использовалась свободно распространяемая система моделирования с открытым кодом Regional Ocean Modeling System (ROMS) [121], которая ранее применялась для расчета течений как

в глубоких, так и в неглубоких водоемах. Например, описаны исследования течений в Мексиканском заливе (R. Varkan, [70]) и в прибрежной части полузамкнутого неглубокого соленого водоема Бохо в Китае (F. Zhou, [148]).

При анализе данных измерений скорости и температуры в озере применялся метод главных компонент (эмпирических ортогональных функций), который позволил выделить самое энергонесущее течение и провести отдельно анализ его пространственного и временного поведения.

Таким образом, для того чтобы сохранить благоприятное состояние озера необходим комплексный подход в исследовании динамики гидрофизических параметров: температуры и солености воды, скорости, направлении течения. Кроме того, результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы для исследования течений в других водоемах.

**Объект исследования.** Озеро Шира представляет собой бессточное озеро без островов, в которое впадает одна речка Сон. В силу малости притока все влияние реки сосредоточено в приустьевой зоне, основным внешним фактором, определяющим течение в озере, является ветровое воздействие.

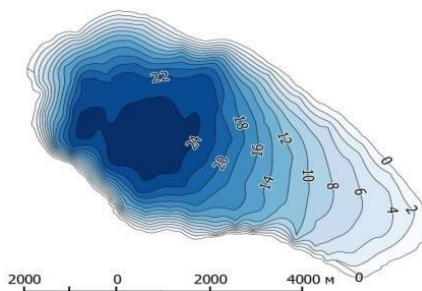


Рисунок В.1 – Батиметрия озера Шира

Основные характеристики озера: озеро имеет овальную форму, длина – 9,4 км, ширина – 5 км, площадь водного зеркала – 34,7 км<sup>2</sup>, средняя глубина – 11,2 м, максимальная глубина – 25 м. Батиметрия озера представлена на рисунке В.1.

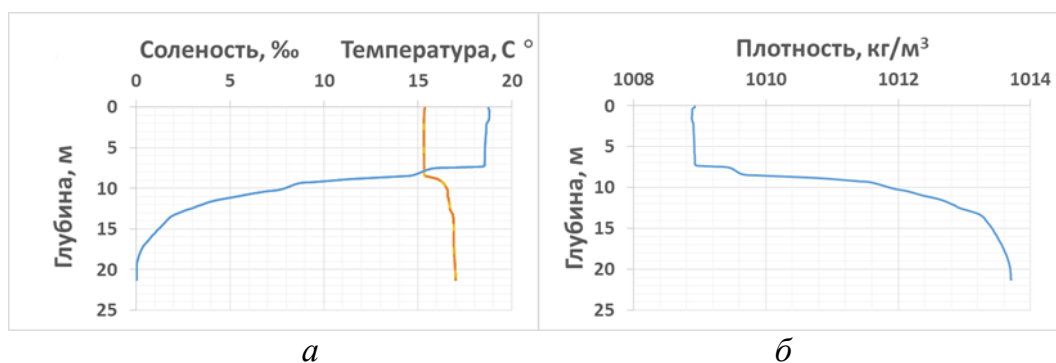


Рисунок В.2 – Температура – сплошная синяя линия, соленость – штриховая красная линия (а), график плотности по формуле Буссинеска (б). Профили построены по измерению 13.07.2015 в географической точке, глубина озера в которой составляет 22 м

На рисунке В.2, а приведены типичные профили температуры и солености в озере Шира в летний период. На рисунке В.2, б представлен график зависимости плотности от глубины, полученный на основании обработки локальных измерений температуры и кондуктивности, который наглядно демонстрирует сильную стратификацию воды в озере Шира в течение всего летнего периода (зависимость плотности от температуры и солености найдена по формуле Буссинеска [74]).

В летний период на озере Шира наблюдается изменчивая ветровая картина, когда периоды сильного воздействия ветра чередуются с периодами его ослабления. На рисунке В.3 представлены скорость и направление ветра по данным метеостанции, расположенной на расстоянии 12 км от озера в пос. Шира.

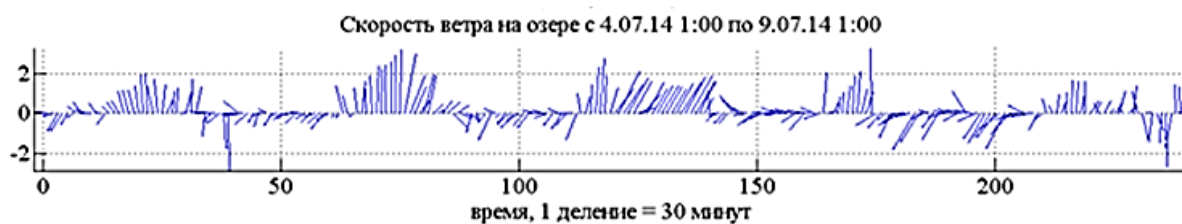


Рисунок В.3 – Сила и направление ветра на озере в 2014 г. Данные с метеостанции, расположенной в пос. Шира

В летний период озеро стратифицировано по температуре и солености, при переменном ветре важным фактором его функционирования является наличие внутренних волн и обусловленные ими процессы перемешивания в прибрежной зоне.



Озеро последние сто лет является меромиктическим, т.е. в циркуляции участвует только поверхностный слой жидкости, что приводит к специфическому составу донных отложений.

При смене меромиктического режима на голомиктический (хотя бы один раз за год происходит перемешивание воды до дна) может также происходить нарушение баланса биоты, что приводит к вспышкам цветения фитопланктона и ухудшению качества воды [61]. Процесс перемешивания воды в озере до дна произошел в озере Шира осенью 2014 г. – зимой 2015 г., что было определено по косвенным признакам весной 2015 года.

Пока сложно сказать почему меромиктическое озеро изменило свой тип функционирования на голомиктический. Одно из возможных объяснений через анализ глубины залегания весеннего термоклина приведено в книге Д. Ю. Рогозина [61].

**Методы исследования.** При решении сложной задачи исследования течения в озере применялся комплексный подход, включающий в себя решения уравнений математической физики с использованием метода разделения переменных, метод конечных разностей для решения системы уравнений трехмерного течения неоднородной жидкости, обработку натуральных данных с помощью спектрального анализа и метода главных компонент.

**Основные результаты, выносимые на защиту.** В работе присутствуют результаты, соответствующие трем областям исследования паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам.

*Область исследования 2* (Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей):

1. Новые аналитические решения для модели стационарного ветрового движения однородной жидкости в двумерном и трехмерном случае.

*Область исследования 3* (Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий):

2. Разработка методики построения цифровой модели рельефа дна по нерегулярным данным измерений батиметрии.
3. Поэтапная адаптация численной модели ROMS к исследованию динамики гидрофизических характеристик в озере Шира, включающая в себя: выбор численного алгоритма для решения уравнения переноса-диффузии с использованием созданной системы тестов; построение равномерной разностной сетки; задание начального профиля температуры и солености, подключение метеорологических данных.
4. Верификация численного алгоритма на полученных аналитических решениях упрощенной модели стационарного ветрового движения однородной жидкости.
5. Валидация математической модели путем качественного и количественного сравнения полученных результатов численных расчетов с данными натурных измерений в летний период.

*Область исследования 5* (Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента):

6. Результаты комплексного исследования динамики основных гидрофизических характеристик озера Шира в летний период с применением математического моделирования, вычислительного эксперимента и анализа данных натурных измерений.

**Научная новизна проведенного диссертационного исследования состоит в следующем:**

1. Получены новые аналитические решения для оценки ветрового движения жидкости в модели Экмана и в модели с учетом горизонтального обмена стационарного ветрового движения жидкости в двумерном и трехмерном случае.
2. Выполнен сравнительный анализ разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса-диффузии, применяемых для расчетов в модели ROMS, на аналитических решениях.
3. Разработана методика построения цифровой модели рельефа дна по нерегулярным данным батиметрии.
4. Определена динамика основных гидрофизических характеристик озера Шира по результатам численных расчетов и результатам анализа данных натурной измерений. В частности, определены условия возникновения, вид и периоды внутренних волн в зависимости от силы и направления ветра.
5. На основе численного моделирования и спектрального анализа внутренних волн в озере Шира сделан вывод об устойчивости гидрофизических характеристик в период потери озером свойства меромиктичности.
6. Впервые на основе анализа данных долговременных измерений скоростей течения в озере Шира методом эмпирических ортогональных функций определена структура течения в эпилимнионе (верхнем прогретом слое) и проведена оценка величины коэффициента вертикального турбулентного обмена.

**Теоретическая значимость.** Полученные аналитические решения могут быть применены для верификации численных моделей ветрового движения жидкости в других водоемах. Созданная система тестов может применяться для тестирования разностных схем и сложных численных алгоритмов решения задач течения неоднородной жидкости.

**Практическая значимость.** Комплексное исследование динамики основных гидрофизических характеристик озера Шира позволяет сделать прогноз его экологического состояния с целью сохранения лечебных свойств воды и рекреационного потенциала озера.

Разработанная технология построения цифровой модели рельефа дна по нерегулярным данным батиметрии может быть использована при построении цифровой модели дна в других водоемах.

Технология построения численной модели неглубокого стратифицированного водоема может быть использована при расчете течений в стратифицированных водоемах, имеющих аналогичные характеристики, например, при исследовании Балтийского моря.

Результаты работы были использованы в проекте РФФИ № 15-05-04198 «Наблюдение и моделирование инерционных колебаний в Балтийском и Черном морях».

**Личный вклад.** Получение аналитических решений модели ветрового движения однородной жидкости для двумерной модели с учетом горизонтального турбулентного обмена и трехмерной модели для дрейфовой составляющей модели Экмана в случае частных ветровых воздействий сделаны автором лично. Вклад автора в нахождение аналитического решения для трехмерной модели ветрового движения жидкости с учетом горизонтального турбулентного обмена совместно с к.ф.-м.н. Т. В. Якубайлик заключается в их численной реализации.

Численное моделирование течений в озере выполнено на основе свободно распространяемой под лицензией GNU системы моделирования ROMS, разработанной Hernan G. Arango и Alexander F. Shchepetkin. Личный вклад автора заключается в адаптации модели для расчетов течений в озере Шира с помощью данных натуральных измерений; верификации модели на полученных аналитических решениях; разработке методики построения цифровой модели рельефа дна по нерегулярным данным батиметрии; в выборе численного алгоритма расчета течений с по-

мощью созданной системы тестов; в создании программ для задания ветрового воздействия и учета тепловых потоков (созданных совместно с А. С. Богатиковым); в проведении численных расчетов для озера Шира на весь летний период с учетом модельного и реального ветра; в интерпретации результатов численного моделирования; в валидации, полученных численных решений, на натуральных наблюдениях.

Натурные измерения скоростей в озере Шира с помощью акустических доплеровских профилографов течения проводились как автором лично, так и совместно с к.ф.-м.н., н.с. ИВМ СО РАН Т. В. Якубайлик. Натурные измерения температуры и солености проводились совместно с к.б.н., с.н.с ИБФ КНЦ СО РАН А. П. Толмеевым. Анализ натуральных данных с использованием метода главных компонент проведен как автором лично, так и совместно с к.ф.-м.н. Л. В. Гавриловой. Всем им автор выражает глубокую благодарность.

**Достоверность и обоснованность** основных результатов обеспечивается: строгостью математических выкладок; количественными и качественными совпадениями с результатами других авторов; совпадением спектральных характеристик численных расчетов течений в озере Шира и спектральных характеристик данных натуральных измерений.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на 27-ми мероприятиях:

- Международные семинары «Dynamics of Coastal Zone of Non-Tidal Seas (school-seminar)» (Балтийск, 2010; Геленджик, 2014);
- Всероссийская конференция «Математика в приложениях» (Новосибирск, 2009);
- Международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (Москва, 2009);
- Международная конференция «The 14th General Meeting of EWM, 2009» (Нови Сад, Сербия, 2009);
- Всероссийская конференция «Динамика и термика рек, водохранилищ и прибрежной зоны морей» (Москва, 2009);

- Всероссийская конференция «Прикладные вопросы технологии гидроакустики и гидродинамики» (Санкт-Петербург, 2010);
- Международные конференции «Всесибирский конгресс женщин-математиков» (Красноярск, 2010, 2016);
- Международные научно-практические конференции, посвященные Памяти генерального конструктора ракетно-космических систем акад. М. Ф. Решетнева (Красноярск, 2018, 2020);
- Конференции молодых ученых ИВМ СО РАН (Красноярск, 2011, 2018, 2019, 2020);
- Международная конференция «IEEE/OES Baltic Symposium 2014» (Tallinn, Estonia, 2014);
- Всероссийские семинары «Нейроинформатика, её приложения и анализ данных» (Красноярск, 2017, 2018, 2019, 2020),
- Всероссийские конференции с международным участием «Обработка пространственных данных в задачах мониторинга природных и антропогенных процессов» (Бердск, Россия, 2017, 2019);
- Международный симпозиум «Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере» (Москва, 2018),
- Всероссийская конференция, посвященная 100-летию акад. Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2018);
- Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2019, 2020);
- Международная конференция, посвященная 95-летию со дня рождения акад. Г. И. Марчука (Новосибирск, 2020).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 27 работах, в том числе: 1 монография [40]; 3 публикации в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК [39, 41, 42]; 5 публикаций проиндексировано в базе данных Scopus [96, 140-142]; 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ [23, 28]; 3 статьи в рецензируемых научных журналах [46, 47, 126]; 13 публикаций в трудах и тезисах всероссийских и международных конференций [15, 16, 18–22, 24–27, 44, 45].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка (148 наименований) и приложения. Текст диссертации содержит 72 рисунка, 5 таблиц. Объем текста составляет 157 страниц.

# ГЛАВА 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Наблюдающееся в настоящее время углубленное изучение явлений и процессов в водной толще естественных природных водоемов с применением современных экспериментальных и теоретических методов исследования связано с необходимостью решения задач экологии и охраны водоемов в условиях их растущего хозяйственного освоения.

Для решения задач о расчете течений в водоемах необходимо иметь соответствующую математическую модель, состоящую из системы уравнений, граничных и начальных условий.

Большинство систем уравнений записывается в декартовой системе координат и применительно к северному полушарию. Основой для получения моделей движения неоднородной жидкости являются уравнения Рейнольдса [29, 30, 52, 58, 90].

На практике применяются различного рода упрощения. Они могут осуществляться по различным направлениям. Рассматриваются нестационарные и стационарные течения, с учетом нелинейных членов и линейные модели, модели, где скорости определяются в зависимости от глубины или определяются усредненные по глубине значения скорости.

Самой простой и широко применяемой моделью гидрофизики озер является одномерная модель динамики солёности и температуры по глубине. Здесь сразу делается предположение, что скорости течения нулевые, поэтому удается посчитать только усредненные за сезон значения [13, 73].

Двумерные в вертикальной плоскости модели не учитывают влияние такого важного фактора течения как силы Кориолиса [5, 4, 14, 33]. Используются также трехмерные модели без учета сил Кориолиса [62].



Трехмерные модели изначально конструировались как предназначенные для конкретного водоема, например, модели для водоемов-охладителей, озера Байкал, Ладожского озера, что отражено в работах [1–3, 6–10, 36–38, 59, 63].

В настоящей Главе представлена математическая модель ветрового движения неоднородной жидкости, приведены новые аналитические решения задачи ветрового движения однородной жидкости и на их основе определено взаимодействие между моделями различного уровня сложности.

В параграфе 1.1 приведена математическая модель течения неоднородной жидкости в замкнутом водоеме, на основе которой в дальнейшем выполнено аналитическое и численное моделирование течений в озере Шира.

Параграф 1.2 посвящён аналитическим решениям для модели Экмана ветрового движения жидкости с условием прилипания и проскальзывания на дне. Представлены полученные автором решения в случае более часто используемого в численных расчетах условия проскальзывания на дне при постоянном и переменном коэффициентах вертикального турбулентного обмена. Соответствующие решения сравниваются с известными решениями для модели Экмана с условиями прилипания на дне.

В параграфах 1.3 и 1.4 приведены аналитические решения для модели с учетом горизонтального обмена в двумерном случае (течение в вертикальной плоскости) и трехмерном случае соответственно. Решения найдены при постоянном и переменном коэффициентах вертикального турбулентного обмена.

В трехмерном случае решение при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена найдено для дрейфовой составляющей течения.

### **1.1. Математическая модель трехмерного ветрового течения жидкости в замкнутом водоеме**

В качестве математической модели для озера Шира была выбрана модель трехмерного течения жидкости в замкнутом водоеме в приближении Буссинеска и предположении о гидростатичности давления [54, 49].

Система уравнений содержит следующие уравнения:

уравнения движения –

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - lv = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h \frac{\partial u}{\partial y} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_z^0 \rho dz, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + lv = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h \frac{\partial v}{\partial y} \right) - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_z^0 \rho dz, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

уравнение неразрывности несжимаемой жидкости –

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (1.1.3)$$

уравнения переноса тепла и солей –

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h^T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h^T \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^T \frac{\partial T}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h^S \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_h^S \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z^S \frac{\partial S}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

уравнение состояния в общем случае –

$$\rho = \rho(T, S). \quad (1.1.6)$$

Здесь  $x, y, z$  – прямоугольная система координат, ось  $Ox$  направлена на восток, ось  $Oy$  – на север, ось  $Oz$  – вертикально вверх;  $(u, v, w)$  – вектор скорости течения,  $u = u(x, y, z, t)$  – восточная компонента,  $v = v(x, y, z, t)$  – северная компонента,  $w = w(x, y, z, t)$  – вертикальная компонента;  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  – отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения;  $T$  – температура воды,

отсчитываемая от некоторого среднего значения  $T_0$ ;  $S$  – соленость воды;  $K_h$  – коэффициент горизонтального турбулентного обмена для скорости;  $K_h^T$ ,  $K_h^S$  – коэффициенты горизонтальной диффузии для температуры и солености соответственно;  $K_z$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена для скорости;  $K_z^T$ ,  $K_z^S$  – коэффициенты вертикальной диффузии для температуры и солености соответственно;  $l$  – параметр Кориолиса;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho$  – плотность воды в точке с координатами  $(x, y, z)$ ;  $\rho_0$  – некоторое среднее значение плотности.

Система уравнений дополняется граничными условиями.

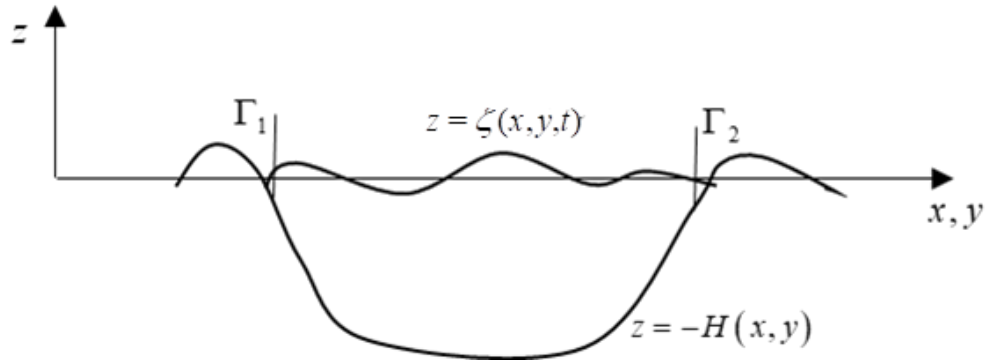


Рисунок 1.1.1 – Границы водоема

На поверхности водоема при  $z = \zeta(x, y, t)$  (рисунок 1.1.1)

$$\rho_0 K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \tau_x^w, \quad \rho_0 K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \tau_y^w, \quad (1.1.7)$$

или граничные условия ставятся на невозмущенной свободной поверхности

$$\rho_0 K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_x^w, \quad \rho_0 K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_y^w. \quad (1.1.7')$$

Для вертикальной скорости

$$w \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (1.1.8)$$

или в линейной постановке

$$w|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.1.8')$$

Или граничные условия ставятся на невозмущенной свободной поверхности

$$w|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (1.1.9)$$

$$w|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (1.1.9')$$

Для температуры и солености ставятся условия

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = Q_T, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = Q_S. \quad (1.1.10)$$

Здесь  $\tau_x^w, \tau_y^w$  – компоненты вектора касательного напряжения ветра на водной поверхности;  $Q_T, Q_S$  – потоки тепла и солености через свободную поверхность, в общем случае не равные нулю.

На дне водоема (рисунок 1.1.1), которое рассматривается как твердая поверхность, придонное напряжение трения определяется через скорость придонного течения и часто задается по квадратичному закону [17]

$$K_z \left. \frac{\partial V_h}{\partial z} \right|_{z=-H} = k_b |V_h| V_h, \quad (1.1.11)$$

где  $V_h = (u, v)$  – вектор горизонтальной скорости  $k_b$  – коэффициент придонного трения, при  $k_b = \infty$  получаем условие прилипания

$$u = v = 0. \quad (1.1.12)$$

В некоторых ситуациях можно считать, что напряжение трения и скорость связаны линейной зависимостью [17]

$$K_z \left. \frac{\partial V_h}{\partial z} \right|_{z=-H} = k_b V_h, \quad (1.1.13)$$

при этом для вертикальной составляющей скорости на дне всегда выполняется

$$w|_{z=-H} = -u|_{z=-H} \frac{\partial H}{\partial x} - v|_{z=-H} \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (1.1.14)$$

Для случая ровного дна ( $H = \text{const}$ ) это условие переходит в условие  $w = 0$ .

Для температуры и солености на дне задаются условия

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=-H} = Q_T, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=-H} = Q_S. \quad (1.1.15)$$

Выбор того или иного варианта граничных условий осуществляется в зависимости от постановки конкретной задачи.

На вертикальных стенках (рисунок 1.1.1) ставятся условия прилипания

$$u = v = 0 \quad (1.1.16)$$

или непротекания: равенство нулю нормальной составляющей вектора горизонтальной скорости  $V_h$ .

Для температуры и солености на вертикальных границах  $\Gamma_1, \Gamma_2$  полагаем

$$\frac{\partial T}{\partial N} = Q_T, \quad \frac{\partial S}{\partial N} = Q_S, \quad (1.1.17)$$

где  $N$  – нормаль к вертикальным границам.

Из (1.1.7) и (1.1.14) находится уравнение для возвышения свободной поверхности

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (1.1.18)$$

где

$$U = \int_{-H}^{\zeta} u dz, \quad V = \int_{-H}^{\zeta} v dz.$$

Если считать, что возвышение свободной поверхности мало, используется приближенная формула

$$U = \int_{-H}^0 u dz, \quad V = \int_{-H}^0 v dz. \quad (1.1.18')$$

## 1.2. Аналитические решения для модели Экмана ветрового движения жидкости

Система уравнений (1.1.1) – (1.1.5) допускает различные модификации и упрощения. Модели, в которых опущены члены горизонтальной турбулентного

обмена в уравнениях движения, называются моделями экмановского типа (модели без учета горизонтального турбулентного обмена) и ранее они часто использовались в численных расчетах [35–38, 8].

В работах [35–38] в уравнениях движения опущены члены горизонтального турбулентного обмена, а в уравнениях для температуры – члены горизонтальной диффузии.

В работе [8] члены горизонтальной турбулентного обмена опускаются в уравнениях движения, но члены горизонтальной диффузии остаются в уравнениях для температуры.

Наличие аналитических решений для частных случаев системы (1.1.1)–(1.1.5) имеет неоценимое значение, поскольку позволяет проводить априорный анализ возможных течений и является основой для верификации численных моделей.

В настоящем параграфе приведены аналитические решения модели ветрового движения однородной жидкости с условиями прилипания [145] и найденные автором аналитические решения с условием проскальзывания.

Наиболее известны результаты для системы уравнений Экмана, которая получается из системы уравнений (1.1.1) – (1.1.5) в приближении медленных течений для однородной жидкости. Кинематическое граничное условие  $\zeta_t = w$  рассматривается на невозмущенной свободной поверхности, т.е. при  $z = 0$ .

Уравнения для горизонтальных составляющих скорости стационарного течения можно в этом случае рассматривать независимо от вертикальной составляющей и система уравнений (1.1.1) – (1.1.5) сводится к системе уравнений Экмана.

В комплексных обозначениях

$$w = u + iv, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \tau^w = \tau_x^w + i \tau_y^w$$

запишем уравнения и граничные условия по вертикали для этой задачи

$$\frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial w}{\partial z} - ilw = g \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (1.2.1)$$

$$K_z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho_0}, \quad (1.2.2)$$

$$w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (1.2.3)$$

На вертикальных стенках  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ставятся условия равенства нулю нормальной составляющей полного потока скорости.

Решение, которое получается при  $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ , называется дрейфовым.

Первое решение для дрейфовой составляющей уравнения (1.2.1) получено для комплексной скорости Экманом в 1905 г. [79] для случая  $K_z = \text{const}$  и бассейна бесконечной глубины.

Для бесконечно глубокого водоема дрейфовое течение на поверхности отклоняется вправо от направления ветра на угол  $45^\circ$  в северном полушарии и влево в южном. С глубиной компоненты скорости убывают (по экспоненциальному закону) и вектор скорости делает поворот по часовой стрелке в северном полушарии и против часовой стрелки в южном. Глубина, на которой вектор дрейфовой скорости принимает направление, противоположное направлению на поверхности, называется глубиной слоя Экмана ( $d = \pi / \sqrt{l / 2K_z}$ ).

### 1.2.1 Решение с условием прилипания на дне при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена

Локальное решение (зависящее от  $x, y$  параметрически) для модели Экмана для бассейна конечной глубины при условии прилипания на дне имеет вид

$$w = u + iv = \frac{1}{\sqrt{ilK_z}} \frac{\sinh(\alpha(z+H))}{\cosh(\alpha H)} \frac{\tau^w}{\rho_0} - \frac{ig}{l} \left( \frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial n}. \quad (1.2.4)$$

Здесь  $\alpha = \sqrt{\frac{il}{K_z}}$ ,  $\tau^w = \tau_x^w + i\tau_y^w$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + i \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ .

Решение состоит из двух слагаемых, первое из которых – дрейфовая составляющая и определяется направлением ветра, а второе – геострофическая составляющая, определяется наклоном свободной поверхности.

Решение выписано в [145], там же выписан алгоритм для нахождения наклонов свободной поверхности, который заключается в следующем.

Наличие уравнения неразрывности позволяет ввести функцию тока для проинтегрированных по глубине горизонтальных скоростей. Для неё выписывается эллиптическое уравнение, которое решается в области, ограниченной береговой линией, с нулевыми граничными условиями. На береговой линии ставится условие равенства нулю нормальной составляющей полного потока.

Из уравнения неразрывности в стационарном случае следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^0 u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^0 u dz = 0$$

или в терминах полных потоков  $U$  и  $V$  (1.1.18')

$$\frac{\partial}{\partial x} U + \frac{\partial}{\partial y} V = 0,$$

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y),$$

что позволяет ввести функцию тока  $-\frac{\partial \Phi}{\partial y} = U$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V$ .

Используя (1.2.4), имеем соотношение

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{l} \left( C \frac{\tau_x^w}{\rho_0} - D \frac{\tau_y^w}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( E \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{l} \left( D \frac{\tau_x^w}{\rho_0} + C \frac{\tau_y^w}{\rho_0} \right) + \frac{gH}{l} \left( F \frac{\partial \zeta}{\partial x} + E \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{2 \sin\left(\pi \frac{H}{d}\right) \operatorname{sh}\left(\pi \frac{H}{d}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{H}{d}\right) + \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)}, \quad D = \frac{2 \cos\left(\pi \frac{H}{d}\right) \operatorname{ch}\left(\pi \frac{H}{d}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{H}{d}\right) + \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)} - 1, \\ E &= \frac{1}{2\pi \frac{H}{d}} \frac{\sin\left(2\pi \frac{H}{d}\right) - \operatorname{sh}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{H}{d}\right) + \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)}, \quad F = -\frac{1}{2\pi \frac{H}{d}} \frac{\sin\left(2\pi \frac{H}{d}\right) + \operatorname{sh}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)}{\cos\left(2\pi \frac{H}{d}\right) + \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{H}{d}\right)} + 1. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$



Дифференцируя в (1.2.5) второе уравнение по  $x$ , а первое по  $y$  и взяв их разность, можно получить уравнение для функции тока  $\Phi$ . Считаем, что  $H = \text{const}$ .

Тогда

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{l} \frac{1}{\rho_0} \left( \left( C + D \frac{F}{E} \right) \text{rot}(\tau^w) + \left( D - \frac{F}{E} C \right) \text{div}(\tau^w) \right), \quad (1.2.7)$$

$$\text{rot}(\tau^w) = \frac{\partial \tau_y^w}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x^w}{\partial y}, \quad \text{div}(\tau^w) = \frac{\partial \tau_x^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y^w}{\partial y}.$$

Это уравнение Пуассона решается в области, ограниченной береговой линией, на которой ставятся нулевые граничные условия [145].

Используя найденные значения функции тока, можно найти наклоны свободной поверхности  $\partial \zeta / \partial x$ ,  $\partial \zeta / \partial y$  из системы уравнений (1.2.5).

### 1.2.2 Решение с условием проскальзывания на дне при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена

Рассмотрим случай, когда граничные условия на дне являются условиями проскальзывания, что чаще применяется в численных расчетах.

Для уравнения (1.2.1) при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ ) и условии проскальзывания на дне

$$K_z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b w,$$

решение выписывается в комплексной форме:

$$w = u + iv = \frac{\tau^w \cosh(\alpha(z+H)) + \frac{k_b}{K_z \alpha} \sinh(\alpha(z+H))}{\rho_0 (K_z \alpha \sinh(\alpha H) + k_b \cosh(\alpha H))} - \frac{ig}{l} \left( \frac{k_b \cosh(\alpha z)}{K_z \alpha \sinh(\alpha H) + k_b \cosh(\alpha H)} - 1 \right) \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{il}{K_z}}. \quad (1.2.8)$$

Для нахождения геострофической составляющей, используя решение (1.2.8), получим уравнение для функции тока (1.2.7), в котором коэффициенты  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  имеют следующий вид

$$C = k_b \frac{K_z \frac{a}{H} (\operatorname{sh}(a) \cos(a) + \operatorname{ch}(a) \sin(a)) + k_b \operatorname{sh}(a) \sin(a)}{K_z^2 \frac{a^2}{H^2} (\operatorname{ch}(2a) - \cos(2a)) + K_z \frac{a}{H} k_b (\operatorname{sh}(2a) - \sin(2a)) + \frac{k_b^2}{2} (\operatorname{ch}(2a) + \cos(2a))},$$

$$D = k_b \frac{K_z \frac{a}{H} (\operatorname{sh}(a) \cos(a) - \operatorname{ch}(a) \sin(a)) + k_b \operatorname{ch}(a) \cos(a)}{K_z^2 \frac{a^2}{H^2} (\operatorname{ch}(2a) - \cos(2a)) + K_z \frac{a}{H} k_b (\operatorname{sh}(2a) - \sin(2a)) + \frac{k_b^2}{2} (\operatorname{ch}(2a) + \cos(2a))} - 1,$$

$$E = -\frac{k_b}{2a} \frac{K_z \frac{a}{H} (\operatorname{ch}(2a) - \cos(2a)) + \frac{k_b}{2} (\operatorname{sh}(2a) - \sin(2a))}{K_z^2 \frac{a^2}{H^2} (\operatorname{ch}(2a) - \cos(2a)) + K_z \frac{a}{H} k_b (\operatorname{sh}(2a) - \sin(2a)) + \frac{k_b^2}{2} (\operatorname{ch}(2a) + \cos(2a))},$$

$$F = -\frac{k_b}{2a} \frac{\frac{k_b}{2} (\operatorname{sh}(2a) + \sin(2a))}{K_z^2 \frac{a^2}{H^2} (\operatorname{ch}(2a) - \cos(2a)) + K_z \frac{a}{H} k_b (\operatorname{sh}(2a) - \sin(2a)) + \frac{k_b^2}{2} (\operatorname{ch}(2a) + \cos(2a))} + 1,$$

где  $a = H \sqrt{\frac{l}{2K_z}}$ .

Коэффициенты  $C, D, E, F$  представляют собой выражения, зависящие только от  $l, K_z, k_b$ .

При коэффициенте трения  $k_b \rightarrow \infty$  значения коэффициентов для случая проскальзывания на дне стремятся к значениям коэффициентов для случая прилипания на дне (рисунок 1.2.1).

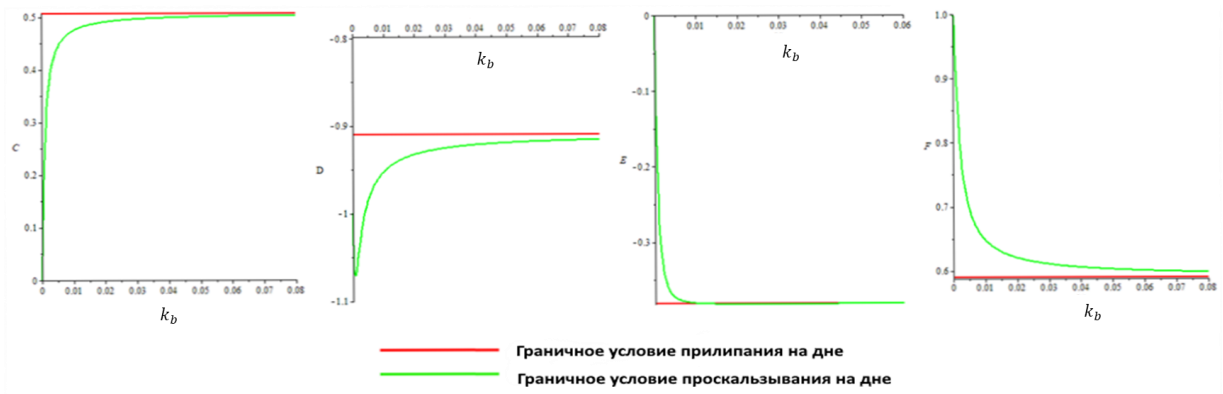


Рисунок 1.2.1 – Коэффициенты  $C, D, E, F$  при  $l = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $H = 20 \text{ м}$ ,  $K_z = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ . Сплошной красной линией показаны значения коэффициентов для случая прилипания на дне, сплошной зеленой линией – для случая проскальзывания на дне

Решить уравнение Пуассона (1.2.7) аналитически удастся только в некоторых частных случаях, но для случая дрейфового течения ( $\partial\zeta/\partial n = 0$ ) можно легко проанализировать решения для случая прилипания и проскальзывания на дне (рисунок 1.2.2).

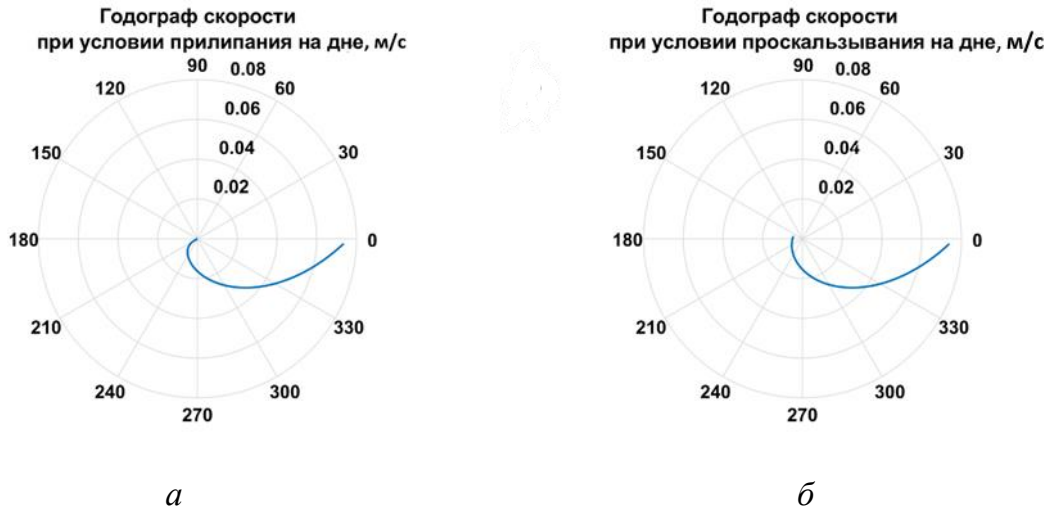


Рисунок 1.2.2 – Годографы скорости для модели Экмана: *a* – решение с условием прилипания на дне (1.2.4); *б* – решение с условием проскальзывания на дне (1.2.8). Глубина бассейна  $H = 40$  м,  $l = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $k_b = 7 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ ,  $K_z = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ . Ветер юго-западный 7 м/с

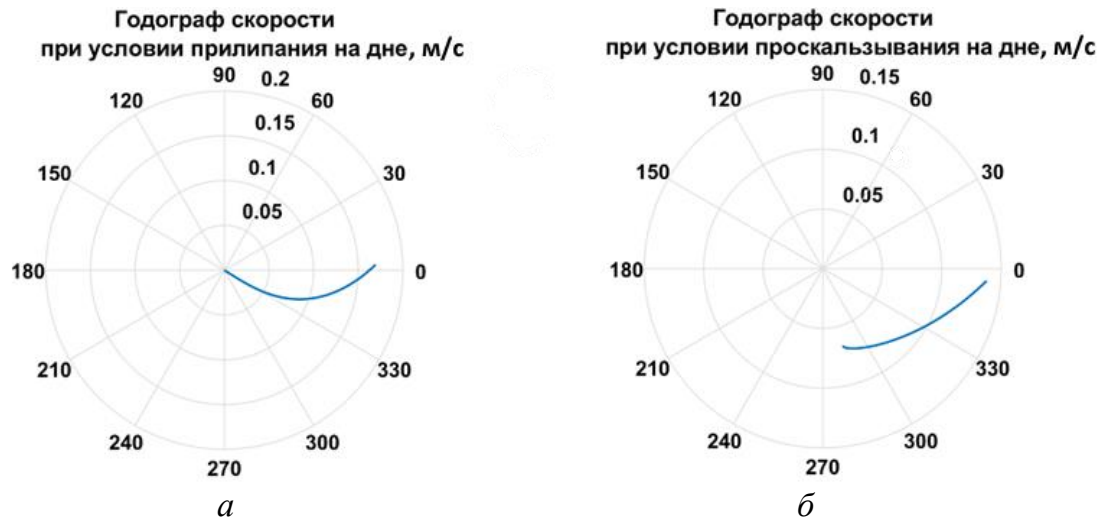


Рисунок 1.2.3 – Годографы скорости для модели Экмана: *a* – решение с условием прилипания на дне (1.2.4); *б* – решение с условием проскальзывания на дне (1.2.8). Глубина бассейна  $H = 8$  м,  $l = 1.18 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $k_b = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ ,  $K_z = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

При сравнении рисунка 1.2.2 и рисунка 1.2.3 видно, что для глубин порядка 40 м (рис 1.2.2) аналитическое решение с условием проскальзывания на дне (1.2.8)

отличается от решения модели Экмана (1.2.4) только вблизи дна, а для глубин порядка 8 м (рисунок 1.2.3) отличие существенно и на поверхности бассейна.

### 1.2.3. Решение с условием проскальзывания на дне при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена

Если коэффициент вертикального турбулентного обмена есть величина переменная, распределенная, например, по линейному закону  $K_z = cz + d$ , то для дрейфовой составляющей имеем уравнение [147]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( (cz + d) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - ilw = 0, \quad (1.2.9)$$

или

$$c \frac{\partial w}{\partial z} + (cz + d) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ilw = 0, \quad (1.2.10)$$

Тогда граничные условия записываются в виде:

$$d \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho_0}, \quad (1.2.11)$$

$$(d - cH) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b w \Big|_{z=-H}. \quad (1.2.12)$$

В работе [147] рассматривались условия прилипания на дне.

Для решения уравнения (1.2.9) сделаем замену переменных:

$$\xi = cz + d, \quad w(z) = \chi(\xi),$$

$$\xi c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - il\chi = 0.$$

Делим обе части уравнения на  $c^2$  и умножаем на  $\xi$ :

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\xi}{c^2} il\chi = 0. \quad (1.2.13)$$

Тогда граничные условия преобразуются следующим образом:

$$\xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d} = \frac{\tau^w}{\rho_0},$$

$$\xi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d-cH} = k_b \chi \Big|_{z=d-cH}.$$

Уравнение (1.2.13) представляет собой однородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается в виде

$$\chi = Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{il\xi} \right), \quad Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{il\xi} \right) = C_1 J_0(\xi) + C_2 K_0(\xi), \quad (1.2.14)$$

где  $J_0(\xi)$ ,  $K_0(\xi)$  – функции Бесселя.

Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  находятся из граничных условий на поверхности и на дне.

В случае, когда коэффициент вертикального турбулентного обмена изменяется по экспоненциальному закону  $K_z = \delta e^{\lambda z}$ , решение ищется в виде

$$C_1 \xi I_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{il}{\delta}} \xi \right) + C_2 \xi K_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{il}{\delta}} \xi \right), \quad \xi = e^{\frac{\lambda}{2} z}. \quad (1.2.15)$$

### 1.3. Аналитические решения для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (течение в вертикальной плоскости)

Сделаем ряд упрощающих предположений, позволяющих найти аналитическое решение системы уравнений (1.1.1) – (1.1.6) для горизонтальных составляющих вектора скорости как при постоянном, так и при переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена.

*Предположение 1.* Жидкость является однородной, течение является медленным, и нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

*Предположение 2.* Коэффициент горизонтального турбулентного обмена – величина постоянная.

*Предположение 3.* Отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения малó, и влияние ветра рассматривается на невозмущенной поверхности бассейна.

*Предположение 4.* На дне задано условие, линейно связывающее касательное напряжение и горизонтальную скорость течения.

Получить решение для модели с учетом горизонтального обмена в трехмерном случае довольно сложно, поэтому сначала продемонстрируем способ нахождения решения в более простом случае течения в вертикальной плоскости в бассейне прямоугольной формы.

В этом случае система уравнений (1.1.1) – (1.1.3) решается в области  $0 < x < L$ ,  $-H < z < 0$ ,  $H = \text{const}$  и имеет следующий вид:

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = K_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.3.2)$$

со следующими граничными условиями:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta(x), \quad (1.3.3)$$

где  $\beta(x) = \tau(x) / \rho_0$ .

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u \Big|_{z=-H}, \quad (1.3.4)$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=L} = 0, \quad (1.3.5)$$

$$w \Big|_{z=0} = w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (1.3.6)$$

### 1.3.1. Решение при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ )

Найдем решение системы (1.3.1), (1.3.2) при граничных условиях (1.3.3) – (1.3.6). Исключим из уравнения (1.3.1) величину  $\partial \zeta / \partial x$ , для чего проинтегрируем уравнения (1.3.1), (1.3.2) по  $z \in [-H, 0]$ :

$$Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x} = K_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-H}^0 u dz + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0, \quad (1.3.7)$$

$$w|_{-H}^0 = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^0 u dz.$$

С учетом граничных условий (1.3.5), (1.3.6) при любых  $x \in (0, L)$  справедливо:

$$\int_{-H}^0 u dz = 0.$$

Таким образом, соотношение (1.3.7) преобразуется к виду

$$Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x} = K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0,$$

а уравнение (1.3.1)

$$K_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\beta - k_b u|_{z=-H}}{H}. \quad (1.3.8)$$

Получили неклассическое уравнение Пуассона для прямоугольной области. Отметим, что для модели экмановского типа (когда горизонтальным турбулентным обменом можно пренебречь) уравнение для горизонтальной составляющей скорости можно записать следующим образом:

$$K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\beta - k_b u|_{z=-H}}{H}, \quad (1.3.9)$$

т.е. получили неклассическое обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого выписывается в явном виде [40]

$$u = \frac{\beta(x)}{K_z} \left( \frac{1 + \frac{k_b}{2} \cdot \frac{H}{K_z}}{2 + 2 \cdot \frac{k_b}{3} \cdot \frac{H}{K_z}} \frac{z^2}{H} + z + \frac{\frac{2}{3} + \frac{k_b}{6} \cdot \frac{H}{K_z}}{2 + 2 \cdot \frac{k_b}{3} \cdot \frac{H}{K_z}} \cdot H \right). \quad (1.3.10)$$

Решение уравнения (1.3.8) ищем в виде:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n e^{\frac{\pi n \mu}{L} z} + B_n e^{-\frac{\pi n \mu}{L} z} + D_n \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right). \quad (1.3.11)$$

С учетом граничных условий (1.3.3), (1.3.4) коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$  определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{K_z \pi n}{L} \mu (A_n - B_n) = \beta_n,$$

$$\frac{K_z \pi n}{L} \mu \left( A_n e^{-\frac{\pi n \mu H}{L}} - B_n e^{\frac{\pi n \mu H}{L}} \right) = k_b \left( A_n e^{-\frac{\pi n \mu H}{L}} + B_n e^{\frac{\pi n \mu H}{L}} + D_n \right),$$

$$-HK_h \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 D_n = \beta_n - k_b \left( A_n e^{-\frac{\pi n \mu H}{L}} + B_n e^{\frac{\pi n \mu H}{L}} + D_n \right),$$

где  $\mu = \sqrt{K_h/K_z}$ , а  $\beta_n$  – коэффициенты разложения функции  $\frac{\tau^w}{\rho_0}$  в ряд по синусам:

$$\frac{\tau^w}{\rho_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad \beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\tau^w(\xi)}{\rho_0} \sin \left( \frac{\pi n}{L} \xi \right) d\xi. \quad (1.3.12)$$

Если ветер постоянен вдоль всей акватории бассейна, то

$$\beta_n = -2.0 \frac{\beta(-1 + \cos(n\pi))}{n\pi}$$

и ненулевые  $\beta_n$  для больших значений  $n$  имеют порядок  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Докажем в этом случае сходимость ряда (1.3.11).

Коэффициенты  $u_n(z)$  имеют вид  $r/q$ , где

$$r = -\beta_n L \left( -\cosh \left( \frac{\pi n z \mu}{L} \right) K_z \mu k_b L^2 + \cosh \left( \frac{\pi n \mu (z + H)}{L} \right) K_z \mu k_b L^2 - \right.$$

$$\left. -\cosh \left( \frac{\pi n \mu (z + H)}{L} \right) \pi^2 n^2 K_z \mu HK_h - \sinh \left( \frac{\pi n \mu (z + H)}{L} \right) k_b LHK_h \pi n + \right.$$

$$\left. + \sinh \left( \frac{\pi n \mu H}{L} \right) L \mu^2 K_z^2 \pi n + \cosh \left( \frac{\pi n \mu H}{L} \right) K_z \mu k_b L^2 - K_z \mu k_b L^2 \right);$$

$$q = \pi n \mu K_z \left( \sinh \left( \frac{\pi n \mu H}{L} \right) K_z \mu k_b L^2 - \sinh \left( \frac{\pi n \mu H}{L} \right) \pi^2 n^2 K_z \mu HK_h + \right.$$

$$\left. + \cosh \left( \frac{\pi n \mu H}{L} \right) k_b LHK_h \pi n \right).$$



Разделим  $r$  и  $q$  на  $e^{\frac{\pi n \mu H}{L}} n^2 \pi^2$ . Так как  $-H \leq z \leq 0$ , то все члены, содержащие  $e^{\frac{\pi n(z-H)\mu}{L}}$ ,  $e^{\frac{\pi n H \mu}{L}}$ ,  $e^{\frac{\pi n(z+2H)\mu}{L}}$ ,  $e^{\frac{\pi n 2H \mu}{L}}$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , а величины  $e^{\frac{\pi n z \mu}{L}}$ ,  $e^{\frac{\pi n(z+H)\mu}{L}}$  для диапазона изменения переменной  $z$  остаются ограниченными, и с учетом оценки для  $\beta_n$  величины  $u_n$  убывают с возрастанием  $n$  не медленнее, чем  $1/n^2$ , что гарантирует абсолютную сходимость ряда (1.3.11).

В двумерном случае можно сравнить стационарное течение экмановского типа (1.3.10) и стационарное течение для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (1.3.11).

Особенностью течения с учетом горизонтального турбулентного обмена является то, что скорости течения обращаются в нуль на концах отрезка  $x \in [0, L]$ , в то время как течение, полученное по модели Экмана (1.3.10), удовлетворяет на границах условию обращения в нуль полного потока скорости. На рисунке 1.3.1, 1.3.2 сплошной линией изображено решение (1.3.11), а ромбиками – решение для модели Экмана (1.3.10), которое не зависит от точки  $x$ .

Для расчетов рассматривался водоем длиной  $L = 1000$  м, при этом  $\tau^w / \rho_0 = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, коэффициент придонного трения  $k_b = 2$  м/с, коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0,02$  м<sup>2</sup>/с, глубина  $H = 20$  м. Расчеты проводились для различного количества членов ряда (1.3.11) и было найдено такое значение  $n_0$ , начиная с которого сопоставляемые решения уже практически не отличаются друг от друга (в данном случае  $n_0 = 40$ ).

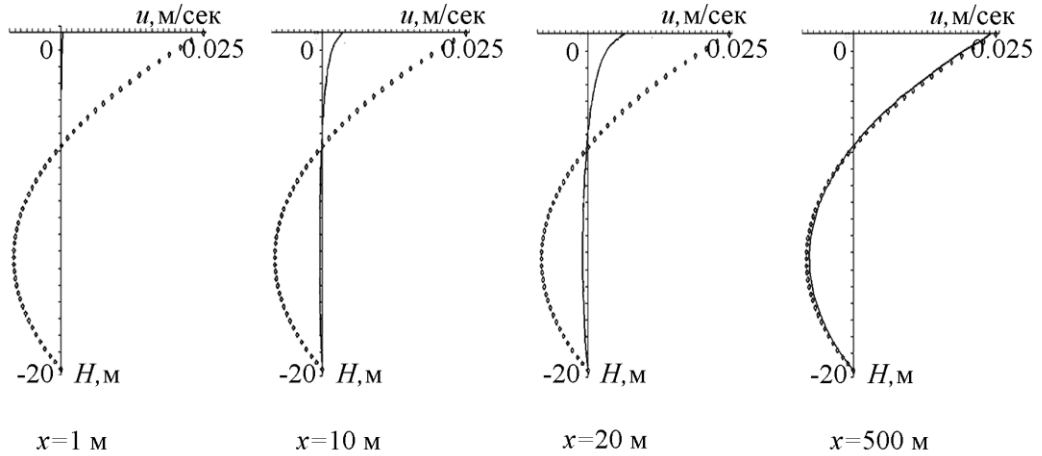


Рисунок 1.3.1 – Распределение скоростей при  $K_z = \text{const}$ ,  $K_h = 20 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $L = 1000 \text{ м}$

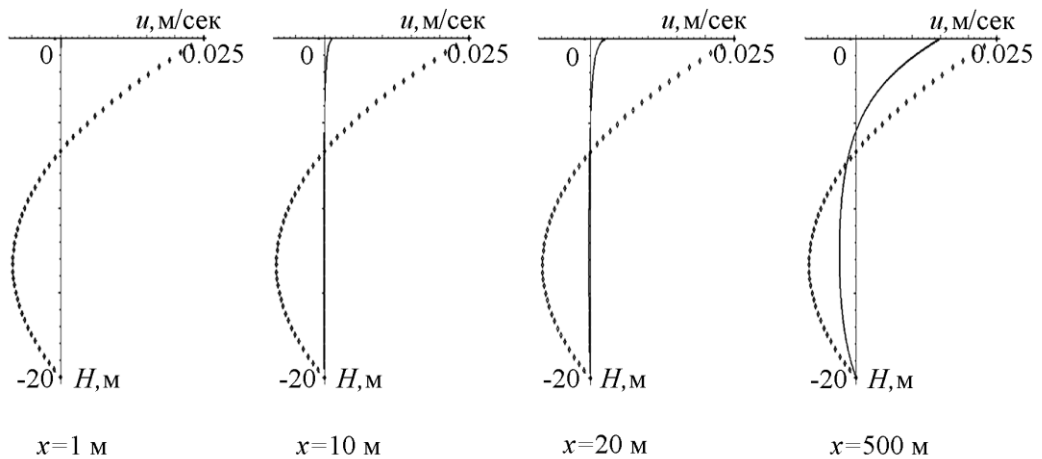


Рисунок 1.3.2 – Распределение скоростей при  $K_z = \text{const}$ ,  $K_h = 200 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $L = 1000 \text{ м}$

Видно, что в области, достаточно удаленной от берегов, решения будут близки. При увеличении коэффициента горизонтального турбулентного обмена  $K_h$  различие между решением (1.3.11) для модели с учетом горизонтального обмена и решением для модели Экмана (1.3.10) становятся все более существенными. Например, на расстоянии 20 м от берега при  $K_h = 20 \text{ м}^2/\text{с}$  решение (1.3.11) в пять раз меньше, чем экмановское решение (1.3.10), при  $K_h = 200 \text{ м}^2/\text{с}$  решения различаются в десять раз.

### 1.3.2. Решение при линейном распределении $K_z$ по глубине

Известно, что распределение скорости по глубине существенно зависит от выбора величины коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Рассмотрим случай, когда коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z$  линейно убывает по глубине.

Найдем решение для модели с учетом горизонтального обмена при  $K_z = cz + d$ . В этом случае уравнение (1.3.7) примет вид:

$$K_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( (cz + d) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\beta - k_b u|_{z=-H}}{H}. \quad (1.3.13)$$

Будем искать решение в виде ряда:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(z) \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (1.3.14)$$

Подставим это выражение в уравнение (1.3.13):

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} (cz + d) + c \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} - K_h \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \Phi_n(z) = \frac{\beta_n - k_b \Phi_n|_{z=-H}}{H}.$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi = cz + d, \quad \Phi_n(z) = \chi_n(\xi).$$

Получим уравнение:

$$\xi c^2 \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial \chi_n}{\partial \xi} - K_h \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \chi_n = \frac{\beta_n - k_b \chi_n|_{\xi=-cH+d}}{H}. \quad (1.3.15)$$

Поделив обе части в (1.3.15) на  $c^2$  и умножив на  $\xi$ , получим:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \chi_n}{\partial \xi} - \xi K_h \left( \frac{n\pi}{Lc} \right)^2 \chi_n = \xi \frac{\beta_n - k_b \chi_n|_{\xi=-cH+d}}{Hc^2}. \quad (1.3.16)$$

Это уравнение представляет собой неоднородное модифицированное уравнение Бесселя с граничными условиями:

$$\xi \frac{\partial \chi_n}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d} = \beta_n, \quad (1.3.17)$$

$$\xi \frac{\partial \chi_n}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d-cH} = k_b \chi_n|_{\xi=d-cH}. \quad (1.3.18)$$

Тогда решение имеет вид [34]

$$\Phi_n(\xi) = A_n I_0 \left( 2\sqrt{K_h \xi} \frac{n\pi}{La} \right) + B_n K_0 \left( 2\sqrt{K_h \xi} \frac{n\pi}{La} \right) + D_n, \quad (1.3.19)$$

где  $I_0(\eta)$ ,  $K_0(\eta)$  – обобщенные функции Бесселя. Коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $D_n$  находятся из уравнения (1.3.16) и граничных условий (1.3.17) – (1.3.18) и зависят от  $n$  и функций Бесселя  $K_0$ ,  $I_0$ . При больших значений аргумента  $\eta$  эти функции ведут себя подобно экспоненциальным функциям соответствующего вещественного отрицательного  $K_0$  и вещественного положительного  $I_0$  аргументов [48], и доказательство сходимости ряда (1.3.14) аналогично доказательству сходимости ряда (1.3.11).

Для модели Экмана в случае переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена алгоритм решения описан в [40] и заключается в том, что уравнение (1.3.1) два раза интегрируется по  $z$  и решение определяется с учетом граничных условий (1.3.3), (1.3.4) и проинтегрированного по глубине уравнения неразрывности.

На рисунке 1.3.3 сплошной линией изображено решение (1.3.14) при  $K_z = cz + d$ , ромбиками – решение для модели Экмана. Решение найдено для водоема длиной  $L = 1000$  м, при этом  $\tau^w / \rho_0 = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, коэффициент придонного трения  $k_b = 2$  м/с, для коэффициента вертикального турбулентного обмена  $d = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $c = 9 \cdot 10^{-4}$ , глубина  $H = 20$  м. Рисунки приведены для случая  $n_0 = 40$ .

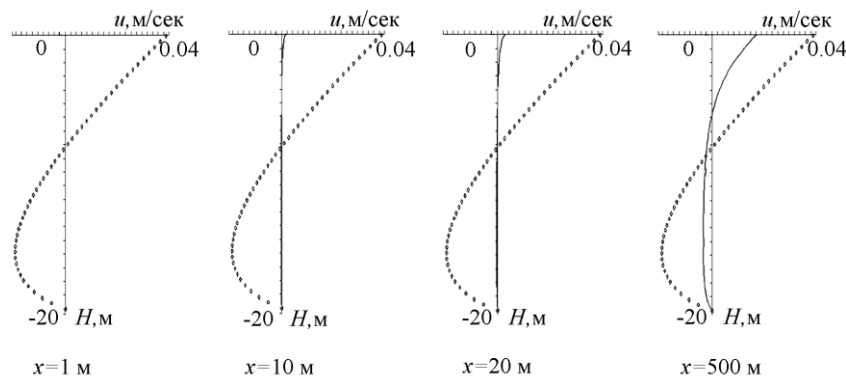


Рисунок 1.3.3 – Распределение скоростей при  $c = 9 \cdot 10^{-4}$ ,  $d = 0,02$ ,  $K_h = 200$  м<sup>2</sup>/с,  $L = 1000$  м

При сравнении решения при постоянным коэффициенте вертикального турбулентного обмена  $K_z = \text{const}$  (см. рисунок 1.3.2) и в случае его линейного изменения по глубине  $K_z = cz + d$  (рисунок 1.3.3), при прочих одинаковых параметрах, скорости движения жидкости на поверхности и ближе ко дну отличаются почти в 2 раза. В случае линейного изменения коэффициента вертикального турбулентного обмена по глубине  $K_z = cz + d$ , изменилось положение точки, в которой скорость движения становится нулевой – она сместилась вниз по сравнению со случаем, как для модели экмановского типа, так и для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена. Достичь такого эффекта при  $K_z = \text{const}$  невозможно. Для модели экмановского типа при  $K_z = \text{const}$ , например, в случае условия прилипания на дне, скорость течения становится нулевой в точке  $H_0 = -H/3$  независимо от величины  $K_z$ .

### 1.3.3. Решение при экспоненциальном изменении $K_z$ по глубине

Для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена при  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  из (1.3.1) получим уравнение:

$$K_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\beta - k_b u|_{z=-H}}{H}. \quad (1.3.20)$$

Ищем решение в виде (1.3.14),  $\tau^w / \rho_0$  представляем как разложение в ряд (1.3.12). Подставим выражения (1.3.14), (1.3.12) в (1.3.20):

$$-K_h \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \Phi_n + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = \frac{\beta_n - k_b \Phi_n|_{z=-H}}{H}.$$

Сделаем замену переменной  $\xi = e^{\frac{\lambda}{2} z}$ , после чего приходим к уравнению

$$-K_h \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \Phi_n - \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} = \frac{\beta_n - k_b \Phi_n|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2} H}}}{H} \quad (1.3.21)$$

с соответствующим образом преобразованными граничными условиями:

$$-\frac{d\lambda}{2\xi} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \beta_n, \quad -\frac{d\lambda}{2\xi} \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2}H}} = k_b \Phi_n \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2}H}}. \quad (1.3.22)$$

Умножим (1.3.22) на  $\xi^2$  и разделим на  $\delta\lambda^2/4$ :

$$-K_h \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{4}{\delta\lambda^2} \xi^2 \Phi_n - \xi \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial \xi^2} = \frac{4}{\delta\lambda^2} \xi^2 \frac{\beta_n - k_b \Phi_n \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2}H}}}{H}. \quad (1.3.23)$$

Это уравнение представляет собой неоднородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается в виде

$$\Phi_n(\xi) = A_n \xi I_1 \left( \frac{2n\pi}{L\lambda} \sqrt{\frac{K_h}{\delta}} \xi \right) + B_n \xi K_1 \left( \frac{2n\pi}{L\lambda} \sqrt{\frac{K_h}{\delta}} \xi \right) + D_n. \quad (1.3.24)$$

Подставляя решение (1.3.24) в уравнение (1.3.23) и граничные условия (1.3.22), находим коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$  и  $D_n$ . Сходимость ряда (1.3.14) с  $\Phi_n(\xi)$ , найденными по формулам (1.3.24), доказывается аналогично рассмотренным ранее случаям.

На рисунках 1.3.4, 1.3.5 сплошной линией изображено решение (1.3.14) при  $K_z = \delta e^{\lambda z}$ , ромбиками – решение для модели экмановского типа [40]. Рассматривался водоем длиной  $L = 1000$  м, при этом  $\tau^w / \rho_0 = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, коэффициент придонного трения  $k_b = 2$  м/с, глубина  $H = 20$  м.

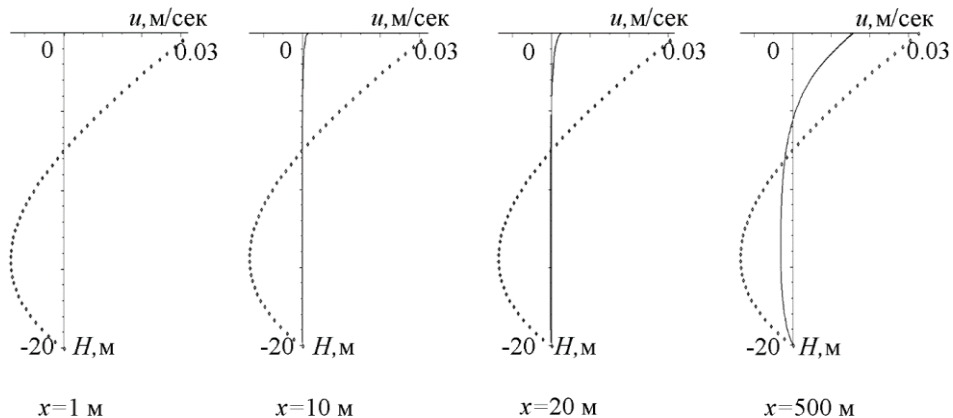


Рисунок 1.3.4 – Распределение скоростей при  $K_h = 200$  м<sup>2</sup>/с,  $\delta = 0,02$ ,  $\lambda = 0,05$ ,  $L = 1000$  м

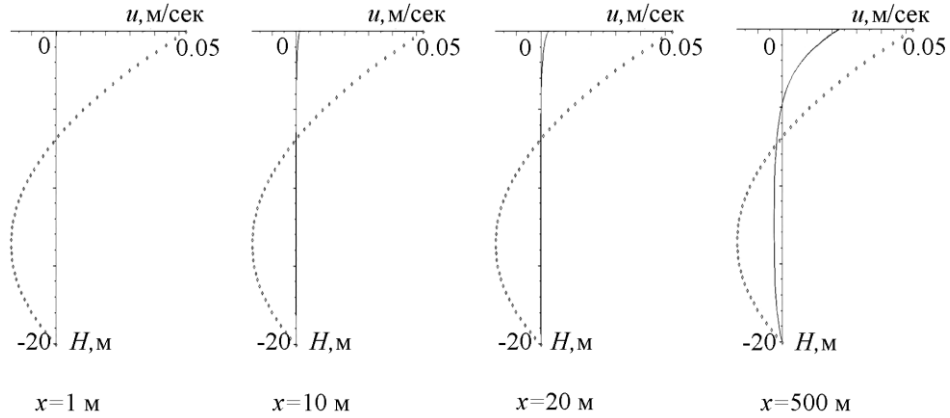


Рисунок 1.3.5 – Распределение скоростей при  $K_h = 200 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\delta = 0,01$ ,  $\lambda = 0,01$ ,  $L = 1000 \text{ м}$

При сравнении решения, соответствующего экспоненциальному распределению  $K_z$  (рисунок 1.3.4), с решением, соответствующим линейному распределению  $K_z$  (рисунок 1.3.3), видно что на поверхности их максимальные скорости совпадают, а ближе ко дну различаются. Это можно объяснить тем, что при заданных параметрах значение коэффициента турбулентного обмена  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  на поверхности практически совпадает со значением линейного коэффициента турбулентного обмена  $K_z = cz + d$ , а в нижней части они уже существенно различны (рисунок 1.3.6).

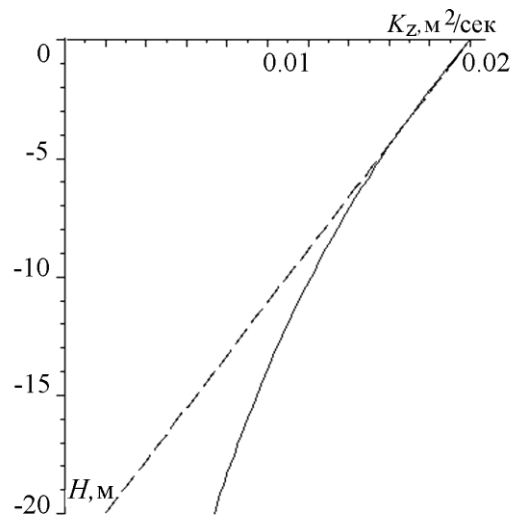


Рисунок 1.3.6 – Сравнение экспоненциального распределения (штриховая линия) и линейного распределения (непрерывная линия)  $K_z$  по глубине

## 1.4. Аналитические решения для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (трехмерный случай)

В трехмерном случае с учетом предположений 1–4, изложенных в параграфе 1.3, в области  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $-H < z < 0$ ,  $H = \text{const}$ , из системы уравнений (1.1.1) – (1.1.3) получаем следующую систему уравнений:

$$K_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + lv = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.4.1)$$

$$K_h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - lu = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.4.3)$$

со следующими граничными условиями:

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau_x^w}{\rho_0}, \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau_y^w}{\rho_0}, \quad (1.4.4)$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b u \Big|_{z=-H}, \quad K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b v \Big|_{z=-H}, \quad (1.4.5)$$

$$u \Big|_{y=0} = u \Big|_{y=b} = u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=a} = 0, \quad (1.4.6)$$

$$v \Big|_{x=0} = v \Big|_{x=a} = v \Big|_{y=0} = v \Big|_{y=b} = 0, \quad (1.4.7)$$

$$w \Big|_{z=0} = w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (1.4.8)$$

### 1.4.1. Решение при постоянном коэффициенте горизонтального турбулентного обмена ( $K_z = \text{const}$ )

Найдем решение системы уравнений (1.4.1) – (1.4.3) при  $K_z = \text{const}$  с граничными условиями (1.4.4) – (1.4.8).

В комплексной форме уравнения (1.4.1) – (1.4.3) запишутся следующим образом:

$$K_h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ilw = g \frac{\partial \zeta}{\partial n}, \quad (1.4.9)$$



а граничные условия (1.4.4) – (1.4.8) в таких обозначениях примут вид:

$$K_z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho_0}, \quad (1.4.10)$$

$$K_z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b w \Big|_{z=-H}, \quad (1.4.11)$$

на боковых стенках  $w = 0$ .

Решение с учетом наклонов свободной поверхности находится следующим образом [49]. Проинтегрируем уравнения (1.4.1) – (1.4.3) по  $z \in [-H, 0]$ :

$$K_h \int_{-H}^0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dz + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-H}^0 + l \int_{-H}^0 v dz = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.4.12)$$

$$K_h \int_{-H}^0 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) dz + K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{-H}^0 - l \int_{-H}^0 u dz = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (1.4.13)$$

$$\int_{-H}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (1.4.14)$$

Перепишем уравнения (1.4.12) – (1.4.14) в терминах функции тока  $\Phi$ :

$$K_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + K_h \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} -$$

$$-K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} + l \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.4.15)$$

$$K_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + K_h \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} -$$

$$-K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} + l \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Hg \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.4.16)$$

Продифференцируем (1.4.15) по  $y$  и умножим на  $(-1)$ , затем продифференцируем (1.4.16) по  $x$  и сложим получившиеся выражения. Получим уравнение для  $\Phi$ :

$$K_h \Delta \Delta \Phi + k_b \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=-H} - k_b \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=-H} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau_x^w}{\rho_0} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_y^w}{\rho_0}. \quad (1.4.17)$$

Решение уравнения (1.4.17) будем искать в виде:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (1.4.18)$$

а решение уравнения (1.4.9) в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( C_{nm}^1 e^{\sqrt{\alpha_{nm}}z} - C_{nm}^2 e^{-\sqrt{\alpha_{nm}}z} + C_{nm}^3 d\zeta_{nm} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (1.4.19)$$

где  $d\zeta_{nm}$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье величины  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$  и

$$\alpha_{nm} = \frac{il + K_h \left( \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right)}{K_z}.$$

С учетом граничных условий (1.4.10) – (1.4.11),  $C_{nm}^1$ ,  $C_{nm}^2$  и  $C_{nm}^3$  определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{\tau^w}{\rho_0} = \frac{\partial \tau_x^w}{\partial y \rho_0} - \frac{\partial \tau_y^w}{\partial x \rho_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{nm}}{\rho_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad (1.4.20)$$

$$K_z \sqrt{\alpha_{nm}} (C_{nm}^1 - C_{nm}^2) = \frac{\tau_{nm}}{\rho_0},$$

$$K_z \sqrt{\alpha_{nm}} (C_{nm}^1 e^{-\sqrt{\alpha_{nm}}H} - C_{nm}^2 e^{\sqrt{\alpha_{nm}}H}) = k_b (C_{nm}^1 e^{-\sqrt{\alpha_{nm}}H} + C_{nm}^2 e^{\sqrt{\alpha_{nm}}H} + C_{nm}^3 d\eta_{nm}),$$

$$K_h \left( \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) C_{nm}^3 + il C_{nm}^3 = -g.$$

С помощью уравнений (1.4.15), (1.4.16) исключим величины  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  из уравнений (1.4.1), (1.4.2).

$$K_h \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv = \quad (1.4.21)$$

$$\frac{1}{H} K_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + K_h \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} + l \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$K_h \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - l u = \quad (1.4.22)$$

$$\frac{1}{H} K_h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + K_h \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} - l \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right).$$

Подставим разложения (1.4.18), (1.4.19) в уравнения (1.4.21), (1.4.22), (1.4.17). С учетом разложения (1.4.20) получим систему алгебраических уравнений,

позволяющих найти коэффициенты, определяющие функции  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ .

На рисунке 1.4.1 представлены годографы скорости, полученные для модели с учетом горизонтального обмена (1.4.19) и годографы для модели Экмана (1.2.8) в центре бассейна и вблизи границы. Видно, что в центре годографы практически совпадают. Рассматривался водоем длиной и шириной 5000 м, при этом  $\tau^w / \rho_0 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ , коэффициент придонного трения  $k_b = 200 \text{ м}/\text{с}$ , коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0,02 \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициенты горизонтального турбулентного обмена  $K_h = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , глубина  $H = 50 \text{ м}$ .

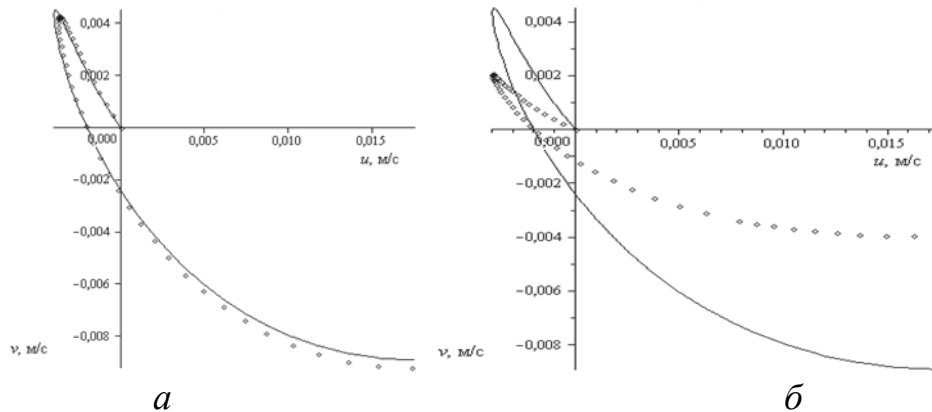


Рисунок 1.4.1 – Годографы скоростей для модели с учетом горизонтального обмена (ромбики), решение для модели Экмана (непрерывная линия): *a* – в центральной точке бассейна, *б* – вблизи границы

При увеличении коэффициента горизонтального турбулентного обмена  $K_h$  различие между решением для модели с учетом горизонтального обмена и решением для модели Экмана становится все более существенными.

### 1.4.2. Решение при переменном коэффициенте горизонтального турбулентного обмена (дрейфовая составляющая)

Получить решение для модели с учетом горизонтального обмена для случая переменного коэффициента турбулентного обмена при учете наклонов свободной поверхности довольно сложно, но это можно сделать в случае, если считать эти наклоны малыми (тогда правую часть уравнений можно считать близкой к нулю).

Если предположить, что градиенты отклонения свободной поверхности малы и ими можно пренебречь, то уравнение (1.4.9) будет иметь вид

$$K_h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - ilw = 0. \quad (1.4.23)$$

Если  $K_z = \text{const}$ , то будем искать решение в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(z) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.4.23), имеем:

$$K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 f_{nm} + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 f_{nm} - K_z f_{nm}'' + ilf_{nm} = 0.$$

Решениями этого уравнения являются функции

$$f_{nm} = C_{nm}^1 e^{\sqrt{\alpha_{nm}}z} + C_{nm}^2 e^{-\sqrt{\alpha_{nm}}z}, \quad \text{где } \alpha_{nm} = \frac{K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il}{K_z}.$$

Коэффициенты  $C_{nm}^1$  и  $C_{nm}^2$  находим из граничных условий (1.4.10) и (1.4.11).

Если  $K_z = cz + d$ , то уравнение (1.4.23) будет иметь вид:

$$K_h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( (cz + d) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - ilw = 0, \quad (1.4.24)$$

Следовательно, (1.4.24) переписывается как

$$K_h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + c \frac{\partial w}{\partial z} + (cz + d) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ilw = 0, \quad (1.4.25)$$

а граничные условия таковы:

$$d \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho_0}, \quad (1.4.26)$$

$$(d - cH) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-H} = k_b w \Big|_{z=-H}, \quad (1.4.27)$$

на всех боковых стенках

$$w = 0. \quad (1.4.28)$$

Будем искать решение (1.4.25) – (1.4.28) в виде:

$$F_{nm} = \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{nm}(z) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad (1.4.29)$$

учитывая, что

$$\frac{\tau^w}{\rho_0} = \frac{\tau_x^w}{\rho_0} + i \frac{\tau_y^w}{\rho_0} = \sum_{nm=1}^{\infty} \tau_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (1.4.30)$$

и, подставляя (1.4.29) в уравнение (1.4.25), имеем:

$$\frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial z^2} (cz + d) + c \frac{\partial f_{nm}}{\partial z} - \left( K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) f_{nm} = 0.$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi = cz + d, \quad f_{nm}(z) = \chi_{nm}(\xi),$$

$$\xi c^2 \frac{\partial^2 \chi_{nm}}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial \chi_{nm}}{\partial \xi} - \left( K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) \chi_{nm} = 0.$$

Делим обе части уравнения на  $c^2$  и умножаем на  $\xi$ :

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \chi_{nm}}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \chi_{nm}}{\partial \xi} - \frac{\xi}{c^2} \left( K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il \right) \chi_{nm} = 0. \quad (1.4.31)$$

Граничные условия преобразуются следующим образом:

$$\xi \frac{\partial \chi_{nm}}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d} = \tau_{nm},$$

$$\xi \frac{\partial \chi_{nm}}{\partial \xi} c \Big|_{\xi=d-cH} = k_b \chi_{nm} \Big|_{z=d-cH}.$$

Уравнение (1.4.31) представляет собой однородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается в виде

$$\chi_{nm} = Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{\alpha_{nm} \xi} \right), \quad (1.4.32)$$

$$Z_0 \left( \frac{2}{c} \sqrt{\alpha_{nm} \xi} \right) = C_{nm}^1 I_0^{nm}(\xi) + C_{nm}^2 K_0^{nm}(\xi), \quad \alpha_{nm} = K_h \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + il,$$

$I_0(\xi)$ ,  $K_0(\xi)$  – функции Бесселя.

В случае, когда коэффициент вертикального турбулентного обмена изменяется по экспоненциальному закону  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  уравнение (1.4.23) примет вид:

$$K_h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial w}{\partial z} + \delta e^{\lambda z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - ilw = 0. \quad (1.4.33)$$

Ищем решение в виде (1.4.29),  $\frac{\tau^w}{\rho_0}$  представляем как разложение в ряд

(1.4.30). Подставим выражения (1.4.29) в (1.4.33):

$$-\left( K_h \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + il \right) f_{nm} + \delta \lambda e^{\lambda z} \frac{\partial f_{nm}}{\partial z} + \delta e^{\lambda z} \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial z^2} = 0.$$

Сделаем замену переменной  $\xi = e^{\frac{\lambda}{2} z}$ ,  $\alpha_{nm} = K_h \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 + K_h \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + il$  после

чего приходим к уравнению

$$-\alpha_{nm} f_{nm} - \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial f_{nm}}{\partial \xi} + \delta \frac{\lambda^2}{4} \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (1.4.34)$$

с соответствующим образом преобразованными граничными условиями:

$$-\frac{\delta \lambda}{2\xi} \frac{\partial f_{nm}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \tau_{nm}, \quad -\frac{\delta \lambda}{2\xi} \frac{\partial f_{nm}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2} H}} = k_b f_{nm} \Big|_{\xi=e^{\frac{\lambda}{2} H}}. \quad (1.4.35)$$

Умножим (1.4.35) на  $\xi^2$  и разделим на  $\frac{\delta \lambda^2}{4}$

$$-\alpha_{nm} \frac{4}{\delta \lambda^2} \xi^2 f_{nm} - \xi \frac{\partial f_{nm}}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 f_{nm}}{\partial \xi^2} = 0.$$

Это уравнение представляет собой однородное модифицированное уравнение Бесселя, решение которого выписывается в виде

$$f_{nm} = C_{nm}^1 \xi I_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{nm}}{\delta}} \xi \right) + C_{nm}^2 \xi K_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{nm}}{\delta}} \xi \right). \quad (1.4.36)$$

Подставляя (1.4.36) в уравнение (1.4.34) и в граничные условия (1.4.35) находим коэффициенты  $C_{nm}^1$ ,  $C_{nm}^2$  и получаем решение:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_{nm}^1 e^{-\frac{\lambda}{2}z} I_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{nm}}{\delta}} e^{-\frac{\lambda}{2}z} \right) + C_{nm}^2 e^{-\frac{\lambda}{2}z} K_1 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha_{nm}}{\delta}} e^{-\frac{\lambda}{2}z} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{b}. \quad (1.4.37)$$

На рисунке 1.4.2 приведено сравнение скоростей для разных коэффициентов вертикального турбулентного обмена, как постоянного, так и переменного.

Расчеты были проведены при следующих значениях параметров:  $\tau^w/\rho_0 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ , параметр Кориолиса  $l = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ , коэффициент придонного трения  $k_b = 2 \text{ м/с}$ , бассейн со сторонами  $a = b = 5000 \text{ м}$  и глубиной  $H = 50 \text{ м}$ . Скорости выведены в центральной точке бассейна.

На рисунке 1.4.2, а приведены графики трех распределений коэффициента горизонтального турбулентного обмена  $K_z$  по глубине. При этом  $c = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $d = 3,75 \cdot 10^{-2}$  и  $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\delta = 3,16 \cdot 10^{-2}$  для линейного и экспоненциального распределения коэффициента вертикального турбулентного обмена по глубине соответственно. В случае постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена было взято  $K_z = 0,02 \text{ м}^2/\text{с}$ .

На рисунке 1.4.2, б изображены годографы скорости для трех случаев модели Экмана. Непрерывной линией (1) изображен годограф, построенный по формуле дрейфовой составляющей модели Экмана для постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена с условием проскальзывания на дне (решение вида (1.2.8) при  $\partial\zeta/\partial n = 0$ ); ромбиками (2) и штриховой линией (3) – годографы для

модели Экмана, в случае линейного  $K_z = cz + d$  – решение вида (1.2.14) и экспоненциального  $K_z = \delta e^{\lambda z}$  – решение вида (1.2.15) коэффициентов вертикального турбулентного обмена соответственно.

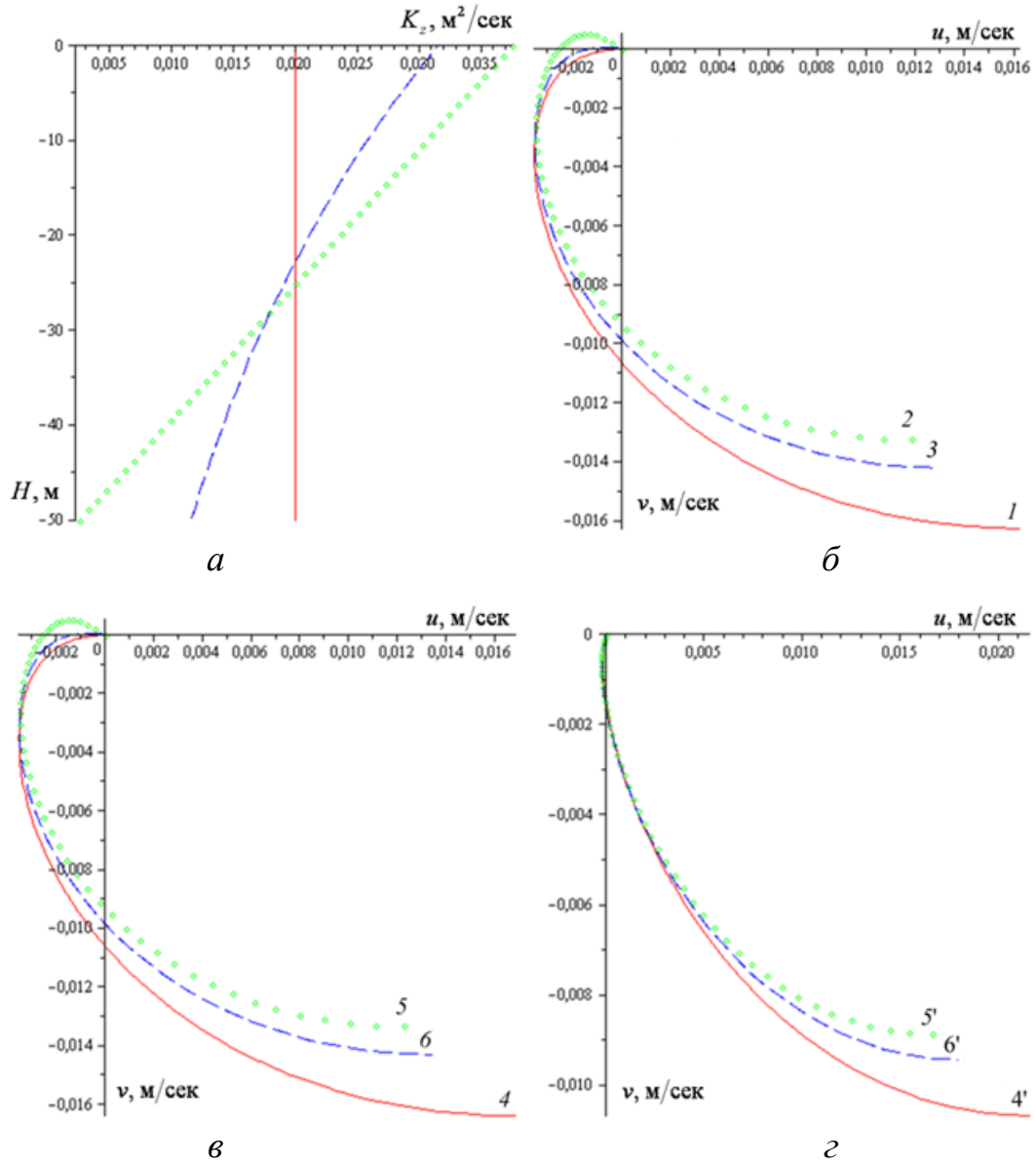


Рисунок 1.4.2 – Распределения трех видов коэффициентов вертикального турбулентного обмена по глубине (постоянного – непрерывная линия, линейного – ромбики и экспоненциального – штриховая линия) (а). Годографы скоростей, соответствующие этим распределениям: для модели Экмана (б), для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена (в, г)

На рисунке 1.4.2, в и г изображены годографы скорости для модели с учетом горизонтального обмена. Причем для в)  $K_h = 1$  м<sup>2</sup>/с, а для г)  $K_h = 200$  м<sup>2</sup>/с.



Непрерывной линией (4), (4') изображены годографы для решения (1.4.19) в случае постоянного распределения  $K_z = 0,02 \text{ м}^2/\text{с}$  по глубине, штриховой линией (5), (5') – для решения (1.4.32) при линейном изменении  $K_z = cz + d$ , ромбиками (6), (6') – для решения (1.4.37) при экспоненциальном распределении  $K_z = \delta e^{\lambda z}$ .

Видно, что при линейном распределении коэффициента турбулентного обмена по глубине бассейн становится «глубоким» в том смысле что появляется глубина, на которой скорость имеет знак, противоположный тому, который она имела на поверхности. Годографы скоростей, изображенные на рисунке 1.4.2, б и 1.4.2, в совпадают качественно и количественно, что соответствует тому факту, что при малых коэффициентах горизонтального турбулентного обмена в центральной части бассейна решения для модели Экмана и модели с учетом горизонтального турбулентного обмена совпадают.

## 1.5. Заключение по Главе 1

1. Найдены новые аналитические решения для упрощенных моделей ветрового движения неоднородной жидкости: для модели Экмана и модели с учетом горизонтального обмена.
2. Для модели Экмана при постоянном коэффициенте вертикального турбулентного обмена определено различие в поведении дрейфовой составляющей течения для условий прилипания и проскальзывания на дне.
3. Продемонстрирован принцип получения аналитического решения для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена на примере течения в вертикальной плоскости. Проведено сравнение решений, полученных по модели Экмана и по модели с учетом горизонтального обмена для случая постоянного и переменного коэффициентов вертикального турбулентного обмена. Во всех случаях область, где эти решения начинают отличаться друг от

друга, зависит от величины коэффициента горизонтального турбулентного обмена. При переменном коэффициенте вертикального турбулентного обмена (линейно или экспоненциально меняющемся по глубине) смещается точка, в которой горизонтальная скорость обращается в ноль.

4. Представлено решение в трехмерном случае для постоянного коэффициента вертикального турбулентного обмена, найдены дрейфовая и геострофическая составляющие модели с учетом горизонтального обмена и проведено сравнение с результатами для модели Экмана. Аналогично двумерному случаю определена область, в которой решения, полученные по двум моделям, совпадают. При анализе дрейфовой составляющей трехмерного течения с постоянным и переменным коэффициентом вертикального турбулентного обмена (линейном или экспоненциально убывающем по глубине) получено, что увеличение коэффициента горизонтального турбулентного обмена приводит к уменьшению различий между тремя полученными распределениями скорости по глубине.

## ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОФИЗИЧЕСКОГО РЕЖИМА ОЗЕРА ШИРА

В конце XX века появились численные модели, которые могут быть адаптированы к расчету течений в различных водоемах. Широко известны MITgcm [114], POM [119], GETM [83], ROMS [121], которые использовались для моделирования процессов в озерах и неглубоких водоемах [31, 62, 64, 85 148].

Две последние модели основаны на уравнениях, в которых выполняется предположение о гидростатичности давления.

В настоящей Главе обсуждаются результаты численных расчетов для озера Шира с использованием системы моделирования ROMS [121]. Трехмерные расчеты для озера Шира проводились ранее с использованием численных моделей GETM [64] и POM [85]. Эффективный численный алгоритм ROMS позволяет воспроизводить возможные ветровые сценарии и осуществлять расчеты на длительные промежутки времени с учетом реальных метеорологических данных, что позволило провести расчеты для озера Шира за весь летний период.

В параграфе 2.1 приведено краткое описание численной модели, реализованной открытым кодом ROMS.

В параграфе 2.2 изложена поэтапная адаптация численной модели, реализованной открытым кодом ROMS, к расчету течений в озере Шира, которая включала в себя: создание цифровой модели рельефа дна по пространственно-разбросанным данным измерений батиметрии с использованием метода интерполяции бигармоническими сплайнами; задание начального профиля температуры и солености; подключение метеорологических данных для учета ветрового воздействия и потоков тепла. Представлены результаты верификации численных алгоритмов ROMS на полученных аналитических решениях.

В параграфе 2.3 приведены результаты сравнительного анализа разностных схем повышенного порядка аппроксимации для одномерного и двумерного уравнения переноса-диффузии на аналитических решениях. В частности, схем, которые используются в численной модели ROMS.

В параграфе 2.4 представлены результаты расчетов гидрофизических характеристик озера Шира с использованием численной модели, с учетом модельного ветра и с учетом реальных метеорологических данных в летний период.

В параграфе 2.5 рассматриваются спектральные оценки компонент горизонтальных скоростей течения, полученных по результатам численных расчетов и по натурным измерениям.

## 2.1 Численная модель ROMS

Численное моделирование течений в озере выполнено на основе модели ROMS [121], разработанной Hernan G. Arango и Alexander F. Shchepetkin и свободно распространяемой под лицензией GNU.

Преимуществами ROMS [128, 129, 131] перед другими подобными программами (например, POM [119], GETM [83]), которые также могут быть адаптированы к особенностям конкретного водоема, можно считать применение аппроксимаций вплоть до четвертого порядка для адвективных членов, распараллеливание численного алгоритма, возможность использования различных способов построения расчетной сетки, различных формул для уравнения состояния и для расчета коэффициента вертикального обмена.

Алгоритмы кода ROMS реализуют математическую модель ветрового движения неоднородной жидкости, основанную на уравнениях (1.1.1) – (1.1.6), представленных в Главе 1 (1.1.1) – (1.1.6). На поверхности водоема при  $z = \zeta(x, y, t)$ , для компонент горизонтальной скорости ставятся условия (1.1.7), для вертикальной скорости используется линейное условие (1.1.8'). Для температуры и солености ставятся условия (1.1.10).

На дне водоема для компонентов горизонтальной скорости при  $z = -H(x, y)$  учет трения на дне может осуществляться по нелинейному закону (1.1.11) или по линейному (1.1.13). Для вертикальной скорости ставится условие (1.1.14). Для температуры и солёности на дне (1.1.15) потоки задаются равными нулю.

На вертикальных границах для горизонтальной скорости ставится условие непротекания, для температуры и солёности потоки задаются равными нулю (1.1.17).

В ROMS используется система вертикальных  $\sigma$  – координат, которая «выравнивает» неровное дно  $z = -H(x, y)$ . Такие системы давно используются с незначительными модификациями как в метеорологии, так и в океанографии например [116, 81]. Подробное описание вида  $\sigma$  – координат, применяемых в ROMS, приведено в [121, 131].

В качестве горизонтальной сетки используется известная сетка Аракава «С» [69]. Вертикальная компонента скорости считается в точках, сдвинутых на половину шага сетки по вертикали [121].

В коде ROMS для адвективных членов используются аппроксимации вида предиктор-корректор со схемой Leap-Frog в качестве предиктора и параметром  $\gamma$ , отвечающем за метод интерполяции значений на трех слоях по времени в корректоре. В предикторе можно выбрать способ аппроксимации первой производной по пространству: центральная разность 2-го или 4-го порядка.

В коде ROMS реализована адаптивно-неявная схема для вертикальных адвективных членов трехмерных скоростей и примесей (температуры, солёности), которая сохраняет устойчивость при превышении вертикального числа Куранта-Фридрихса-Леви [51], но при этом полностью эквивалентна исходной явной схеме и сохраняет её точность там, где число Куранта-Фридрихса-Леви не превышено. То есть, получаем плавное включение неявности, где это необходимо [127].

Код ROMS содержит ряд методов для задания коэффициентов вертикального турбулентного обмена для скорости и диффузии для температуры и солёности. Выбор варьируется от простого задания фиксированных значений до использования

моделей турбулентности: KPP [100],  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  [137], Меллора-Ямады уровня 2,5 [113].

## **2.2 Адаптация кода ROMS к расчету течений**

### **в озере Шира**

Для моделирования течений в озере Шира открытый код ROMS был модифицирован с учетом условий озера.

С помощью применения разработанной методики построения цифровой модели дна по нерегулярным данным измерений батиметрии, изложенной в п. 2.2.1, было получено непрерывное и непрерывно-дифференцируемое поле батиметрии озера Шира, которое использовалось для задания равномерной сетки в численной модели, реализованной открытым кодом ROMS.

В качестве начального распределения для численных расчетов были заданы вертикальные профили температуры и солености, полученные из натуральных измерений в озере Шира в летний сезон 2018 года.

Для проведения расчетов с учетом реальных метеорологических данных (ветрового воздействия, температуры и влажности воздуха, осадков) были созданы специальные программы [23, 27], позволяющие подключать такие данные в численные расчеты.

#### **2.2.1 Построение цифровой модели рельефа дна**

В данном пункте рассматривается методика построения цифровой модели рельефа дна озера Шира по нерегулярным данным измерений батиметрии [126].

Одна из первых задач при численном моделировании гидродинамики водоемов состоит в том, чтобы определить батиметрию дна, которая должна быть задана в виде непрерывного двумерного поля [71, 125].

Батиметрия озера Шира была измерена летом 2010 года с лодки, оснащенной GPS и эхолотом, сделавшей 9 параллельных проходов по озеру с расстоянием при-

мерно 1 км, а также некоторые случайные замеры по пути (рисунок 2.2.1). Береговая линия озера Шира определена с помощью обработки спутниковых снимков и содержит 578 точек данных, обеспечивая таким образом разрешение в 40 метров.

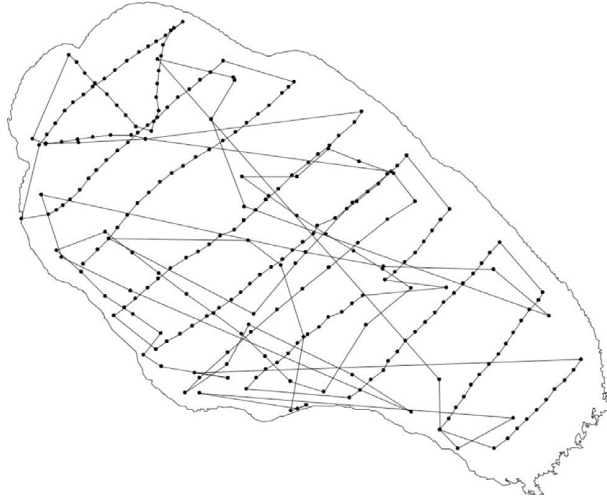


Рисунок 2.2.1 – Береговая линия озера Шира и расположение точек, где измерялась глубина озера. Точки соединены непрерывной линией, которая указывает на последовательность измерений

Задача восстановления непрерывного поля из пространственно-разбросанных точечных данных очень распространена в численном моделировании, что приводит к наличию многочисленных методов. Тем не менее, не существует одного или нескольких универсальных подходов. Обычно в дополнение к доступным данным следует использовать априорные знания о свойствах моделируемого объекта.

Наиболее распространенный метод для интерполяции пространственно-разбросанных данных – это триангуляция Делоне, за которой следует некоторый алгоритм интерполяции данных.

Непосредственное ограничение методов, основанных на триангуляции, заключается в том, что они не могут дать никаких значений вне выпуклой области. Кроме того, измерений слишком мало около берега, так что естественно дополнить имеющиеся батиметрические данные точками на береговой линии, где глубина считается нулевой (или устанавливается в соответствии с минимальным значением, указанным пользователем).

На данном этапе мы разработали алгоритм сканирования всего набора данных для выявления и исключения потенциально противоречивых данных: либо из-за ошибок GPS, либо из-за ошибок эхолота при повторном измерении глубины практически в одном и том же месте. Такие входные данные усреднялись (включая их координаты и измеренные значения) и объединялись в одну точку. Кроме того, одна измеренная точка оказалась на земле и была отброшена. Размещение комбинированных данных показано на рисунке 2.2.2. После расширения данных с помощью добавления точек береговой линии триангуляция может охватить все озеро.

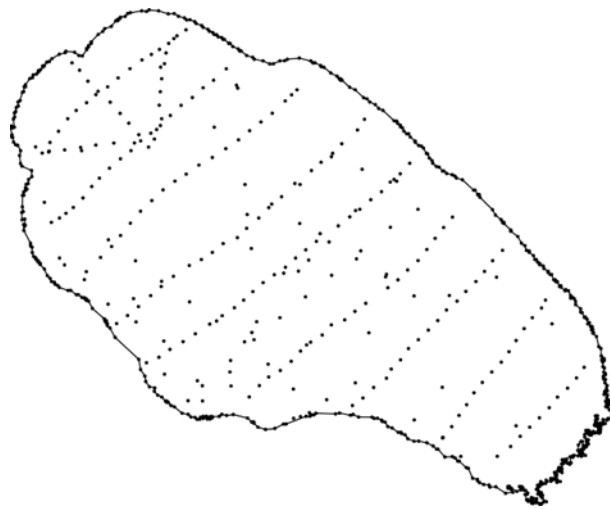


Рисунок 2.2.2 – Данные измерений глубины в озере Шира, дополненные береговой линией, где глубина предполагается нулевой. Точки данных были также проверены на предмет совпадений, и три из них были удалены. Всего здесь 839 точек, 578 из которых принадлежат береговой линии. Эти данные использовались для всех сравнений, представленных в этом параграфе

Перед тем как интерполировать данные измерений батиметрии на равномерную сетку, необходимо выполнить конформное преобразование исходных географических координат в плоские декартовы. В простейшем случае для небольшой области можно просто умножить долготу на косинус средней широты. Более тщательным способом было бы использование равноугольной конической проекции Ламберта с двумя стандартными широтами, оптимально выбранными для конкретной области моделирования (минимальное искажение) [132].



На рисунке 2.2.3 показаны результаты построения цифрового рельефа дна озера Шира с помощью линейной интерполяции нерегулярных измерений батиметрии на равномерную сетку.

Несмотря на то, что линейная интерполяция технически выполнена корректно, она явно неприемлема для целей численного моделирования. Она не является гладкой, имеет неровные контурные линии, и некоторые из ее особенностей – в частности, поворот рядом с береговой линией вблизи верхнего левого угла – сомнительны и потенциально ложны.

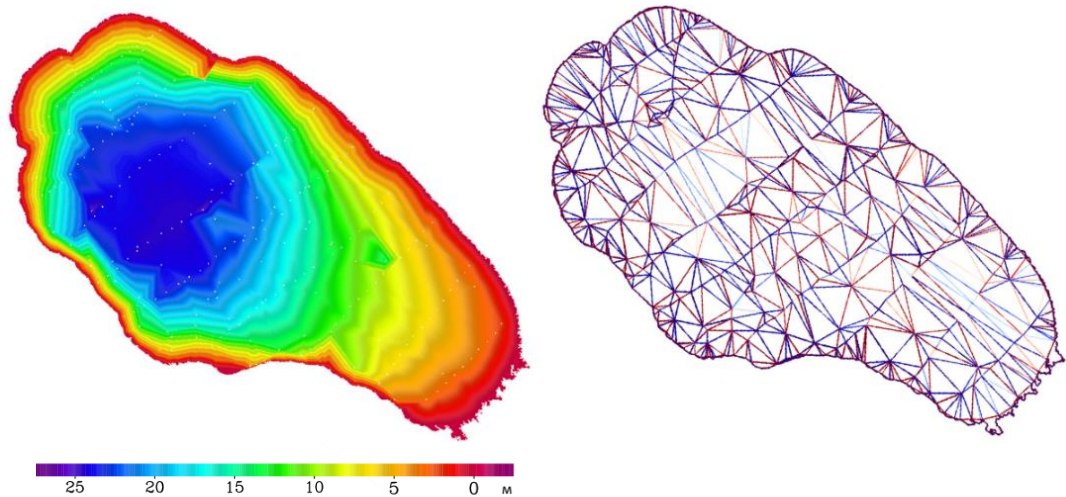


Рисунок 2.2.3 – Линейная интерполяция пространственно разбросанных данных, измеренной батиметрии озера Шира, на регулярную сетку. Слева – результирующая батиметрия, справа – точечный лапласиан поля, используемый для оценки качества гладкости поля. Белые точки на левой панели указывают местоположение фактических точек данных

Кроме линейной интерполяции, были также применены другие широко распространенные методы интерполяции пространственно разбросанных данных на регулярную сетку – кубическая интерполяция, «ближайшего соседа» и бигармоническая сплайн-интерполяция (рисунок 2.2.4).

На рисунках 2.2.3, 2.2.4 в каждой строке справа точечный лапласиан вычисляется из поля слева. Вычисление лапласиана применялось для выявления разрывов первого и второго рода, чтобы оценить качество интерполяции.

В случае линейной интерполяции (рисунок 2.2.3) лапласиан равен нулю внутри каждого треугольника, но из-за разрыва в первых производных на границах вычисление дискретного лапласиана даёт большие значения, обнажая саму триангуляцию – интенсивность цвета линии пропорциональна разрыву непрерывности в первых производных.

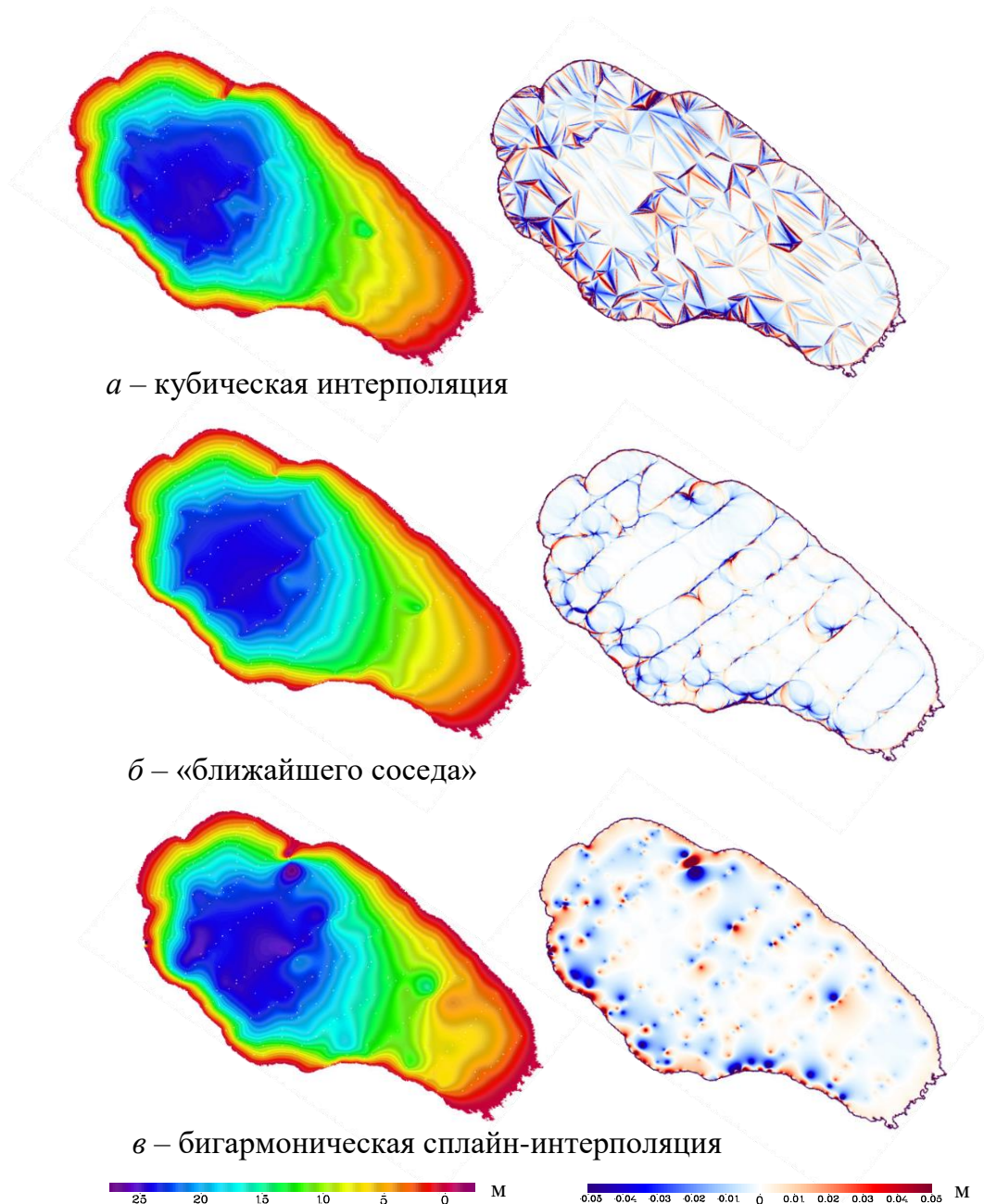


Рисунок 2.2.4 – Интерполяции пространственно разбросанных данных на регулярную сетку: *a* – кубическая; *б* – «ближайшего соседа»; *в* – бигармоническая сплайн-интерполяция. Слева – результирующая батиметрия, справа – точечный лапласиан поля, используемый для оценки качества гладкости поля. Белые точки на левой панели указывают местоположение фактических точек данных

В случае кубической интерполяции (рисунок 2.2.4, *а*) грани уже не плоские, но треугольные линии по-прежнему хорошо видны, что свидетельствует о разрывах в первых производных. В целом, по сравнению с линейной интерполяцией (рисунок 2.2.3) нет никаких заметных улучшений: контурные линии также имеют острые пики на линиях, соединяющих дискретные точки.

Метод «ближайшего соседа» (рисунок 2.2.4, *б*) – другой алгоритм, основанный на триангуляции, после применения которого к измеренным данным батиметрии результирующее поле непрерывно дифференцируемо за исключением самих точек данных. Один из очевидных артефактов заключается в том, что в точках данных возникают острые пики, а все девять проходов лодки в северо-восточном (юго-западном) направлении четко прослеживаются как в лапласиане, так и в самой батиметрии.

Последний рассмотренный вариант – это метод бигармонической сплайн-интерполяции (рисунок 2.2.4, *в*), позволяющий получить непрерывное и непрерывно дифференцируемое поле, которое является гладким везде, в том числе в точках данных. Недостаток этого метода в том, что по сравнению с другими методами интерполяции и в гораздо большей степени, чем они, метод бигармонической сплайн-интерполяции имеет тенденцию создавать искусственные выпуклости и вогнутости, которые, как мы считаем, являются ложными. На рисунке 2.2.4, *в* выпуклость и вогнутость рядом с северным побережьем являются более выраженными, чем на всех других участках, и тщательный анализ размещения точек данных (указанных белыми точками на всех рисунках с интерполированной батиметрией) показывает, что внутри этой выпуклости и вогнутости нет измерений, подтверждающих, что такие экстремумы реальны. Аналогичные наблюдения можно сделать в отношении некоторых других экстремумов, найденных на рисунке 2.2.4, *в*.

Таким образом, ни один из рассмотренных нами методов не дал приемлемого варианта интерполяции батиметрии на равномерную сетку, подходящего для гидродинамического моделирования озера Шира.

Далее рассмотрим метод бигармонической сплайн-интерполяции, чтобы понять причины возникновения ложных экстремумов и устранить их.

Метод бигармонической сплайн-интерполяции был успешно применен Сэндвеллом [123] для создания полей сетки на основе данных альтиметрии со спутников Geos-3 и Seasat altimeter. С некоторыми модификациями для контроля нежелательных колебаний этот метод был применен Смитом и Весселем [136] для получения батиметрических данных с координатной привязкой на основании данных судовых измерений.

Процедура Сандвелла [123] изложена следующим образом: двумерная интерполяция строится по двумерной функции  $f = f(\xi, \eta)$  такой, что она имеет минимальный возможный интеграл квадрата её лапласиана

$$\Phi = \iint_{\xi, \eta \in D} (\nabla^2 f)^2 d\xi d\eta, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

при этом  $f(x_k, y_k) = f_k, \quad \forall k = 1, \dots, K.$

Двумерный интеграл берется по всей вычислительной области. В свою очередь, вариационная производная такого интеграла по отношению к функции – билапласиан (лапласиан от лапласиана) самой функции (например, [75]).

$$\frac{\delta \Phi}{\delta f} = \nabla^4 f.$$

Полагаем, что билапласиан равен нулю везде, кроме точек данных, где он является дельта-функцией.

$$\nabla^4 f = 0, \quad (\xi, \eta) \neq (\xi_k, \eta_k), \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.2.1)$$

С учётом (2.2.1) приходим к функции Грина

$$G(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2) \left[ \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - 1 \right], \quad (2.2.2)$$

которая является непрерывной и имеет непрерывные первые производные в точках  $\xi = 0, \eta = 0$ :

$$G|_{(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)} \rightarrow 0.$$

Интерполяционная функция  $f$  строится как

$$f_k = \sum_{j=1}^K w_j \cdot G(\xi - \xi_j, \eta - \eta_j),$$

где  $(\xi_j, \eta_j)$  – точки данных. Веса  $w_j$  определяются из условия, что  $f_k = f(\xi_k, \eta_k)$ , следовательно

$$f_k = \sum_{j=1}^K G(\xi_k - \xi_j, \eta_k - \eta_j), \quad \forall k = 1, \dots, K.$$

Таким образом, задача сводится к решению линейной системы уравнений размера  $K \times K$ . Матрица системы симметрична. Ожидается, что некоторые из коэффициентов будут очень большими, а другие – очень малыми, в связи с чем необходимо проявлять особую осторожность для того чтобы избежать накопления ошибок при решении системы. Прямое решение системы требует  $O(K^3)$  операций. Сама интерполяция требует вычисления и сложения  $K$  функций Грина в каждой точке сетки моделирования (например, сетки ROMS), поэтому требуется больше операций –  $O(N_\xi, N_\eta, K)$ .

### **Применение метода бигармонической сплайн-интерполяции к предварительно обработанным данным нерегулярных измерений батиметрии**

В этом пункте мы пересматриваем подход Сандвелла [123] для выявления причин появления ложных экстремумов с намерением предотвратить их путем предварительной обработки пространственно-разбросанных данных измерений батиметрии.

При построении бигармонический сплайн принимает определенные значения в точках данных. Интерполированные значения представляют собой взвешенные суммы точек данных и, в силу пространственной структуры функции Грина, веса уменьшаются обратно квадрату расстояния. В результате, если существует пара точек данных, близко расположенных к друг другу, в то время как все остальные окружающие точки данных находятся дальше по сравнению с расстоянием между этими двумя точками, то локальный градиент равен отношению разницы между

значениями в этих двух точках к расстоянию между ними. Это может привести к весьма ошибочному градиенту, так как на расстояние между точками влияют ошибки в GPS-координатах, и чем меньше расстояние, тем менее надежны такие измерения. Линейные методы не дают ложных экстремумов, но в ответ на такие входные данные, как правило, создают разрывы – почти вертикальные стенки в интерполированном поле (рисунок 2.2.3).

Для решения этой проблемы мы ввели процедуру, которая выявляет пары точек данных, расположенные ближе друг к другу, чем установленное пользователем пороговое значение, и совмещает их: такие две точки заменяются одной точкой, имеющей средневзвешенные координаты и измеренное значение. На практике процедура несколько более деликатна из-за внутренней зависимости данных: если три или более точки слишком близки друг к другу, расположение усредненной точки может изменить состояние логического условия о том, следует ли усреднять некоторые исходные точки и в итоге усредненная точка может оказаться на некотором удалении от соседней точки. Чтобы этого избежать, процедура начинает с очень маленького порогового значения – только некоторой части от заданного пользователем значения – постепенно увеличивая его до значения, заданного пользователем. Таким образом, на любом этапе происходит усреднение лишь по двум точкам. Пример данных, предварительно обработанных таким образом, показан на рисунке 2.2.5. Возможно, результат визуально неотличим от представленного на рисунке 2.2.2, но сравнение близких точек показывает лишь несколько случаев, когда точки соприкосновения на рисунке 2.2.2 были заменены на единичные, и при этом очевидно, что общее прореживание данных отсутствует.

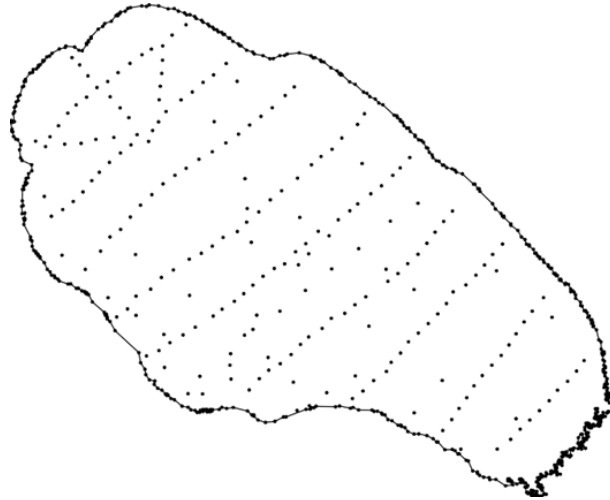


Рисунок 2.2.5 – Предварительно обработанные данные измерений батиметрии. Пороговое значение для минимального допустимого расстояния  $dL_{\min} = 150$  м и в результате было выполнено усреднение для 39 пар точек, что позволило исключить такое же количество точек из общего числа 264, в которых была измерена батиметрия (точки на береговой линии не были затронуты)

Эффект усреднения с постепенным увеличением порогового значения минимального допустимого расстояния  $dL_{\min}$  между точками данных проиллюстрирован на рисунке 2.2.6. Важно отметить, что выпуклости и вогнутости, которые мы считали ложными, исчезли. На рисунке 2.2.7 это показано более детально и с помощью сравнения расположения точек данных (указанных белыми точками), переходя от одного рисунка к другому, можно определить какая пара близких точек приводит к появлению ложного экстремума.

Однако после превышения  $dL_{\min} = 150$  м, также заметно удаление полезных точек данных, что, очевидно, нежелательно. Поэтому был разработан более избирательный критерий для выявления ненадежных данных: не только по расстоянию, но и по измеренным значениям. После некоторых экспериментов мы пришли к следующему комбинированному критерию:

$$\left( \frac{z_j - z_k}{dZ_{\max}} \right)^2 + dL_{\min}^2 > dL^2, \quad dL^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2, \quad (2.2.3)$$

где  $dL_{\min}$  – минимально разрешенное расстояние, а  $dZ_{\max}$  – максимально допустимый уклон дна.

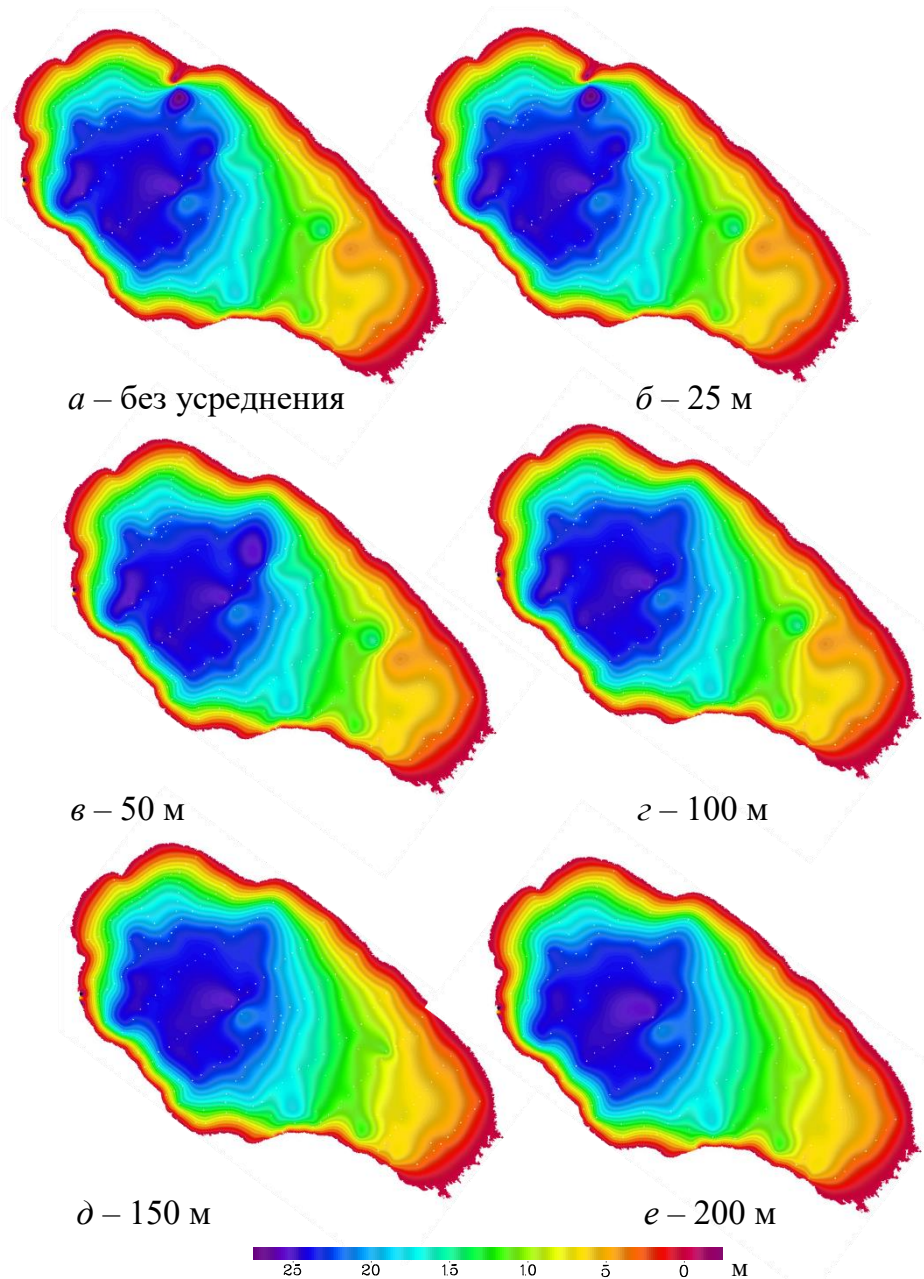


Рисунок 2.2.6 – Чувствительность реконструированной батиметрии дна к порогу минимального допустимого расстояния  $dL_{\min}$ , ниже которого точки данных объединяются: *a* – без усреднения, *b* –  $dL_{\min} = 25$  м, *в* –  $dL_{\min} = 50$  м, *г* –  $dL_{\min} = 100$  м, *д* –  $dL_{\min} = 150$  м, *е* –  $dL_{\min} = 200$  м

Таким образом, если для двух точек данных выполняется условие

$$\frac{|z_j - z_k|}{dL} > dZ_{\max}, \quad (2.2.4)$$

тогда такую пару точек следует заменить одной

$$x_j = (x_j + x_k)/2, \quad z_j = (z_j + z_k)/2, \quad (2.2.5)$$



то есть усреднить. Это не означает, что данные выбрасываются полностью – усредненная точка по-прежнему вносит вклад в расчет интерполированной батиметрии, но это больше не влияет на локальный градиент. Другое пороговое значение, минимально допустимое расстояние  $dL_{\min}$ , связано с точностью GPS и должно быть выбрано как минимум на порядок больше, чтобы обеспечить надежное вычисление относительных расстояний между точками данных. Комбинированный критерий по существу действует как штрафная функция, принимая во внимание как расстояние, так и уклон.

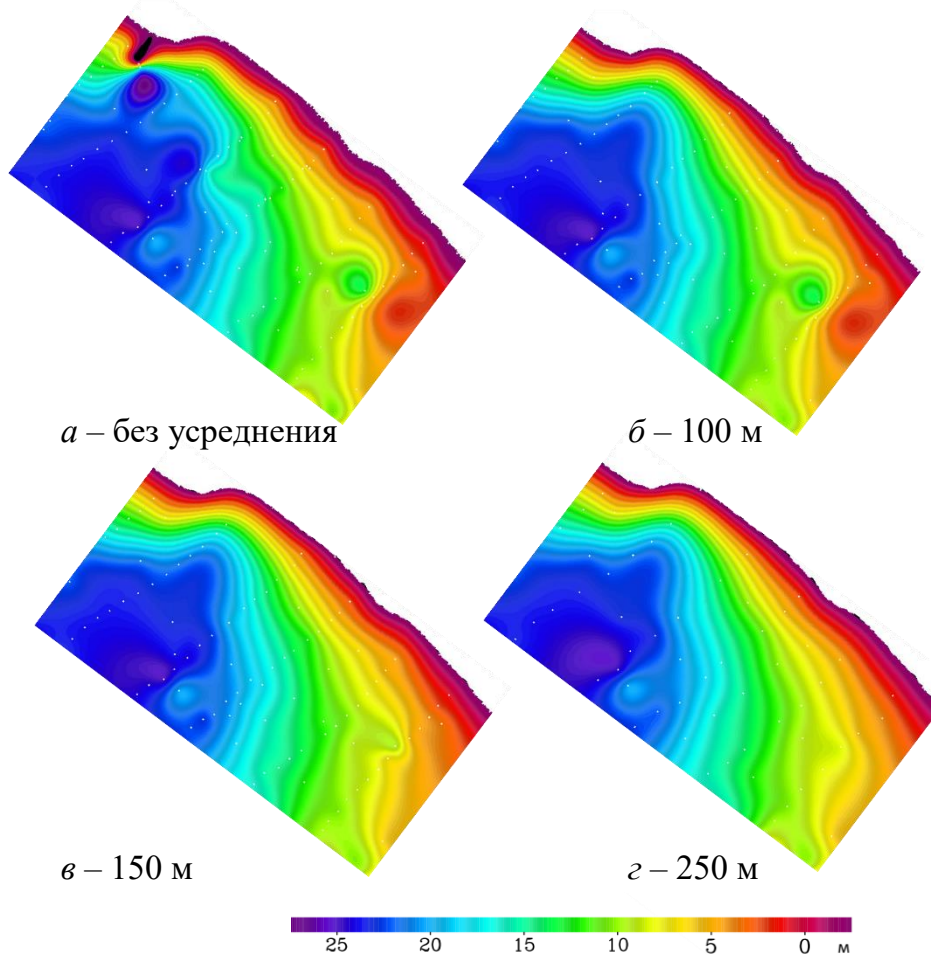


Рисунок 2.2.7 – Детальная батиметрия, поясняющая появление ложных экстремумов из-за близкого расположения точек данных при применении метода бигармонической сплайн-интерполяции:  $a$  – без усреднения,  $b$  –  $dL_{\min} = 100$  м,  $c$  –  $dL_{\min} = 150$  м,  $d$  –  $dL_{\min} = 250$  м. На всех рисунках белые точки указывают расположение фактических точек данных, которые использовались для реконструкции двумерного поля батиметрии

На рисунке 2.2.8 сверху показана версия реконструированной батиметрии дна, полученной с помощью комбинированного критерия (2.2.3). В сравнении с рисунком 2.2.6 можно заметить, что все ложные характеристики были удалены и это достигнуто при гораздо меньшем количестве удаленных потенциально нужных точек данных: установка  $dL_{\min} = 50$  м и  $dZ_{\max} = 0,04$  приводит к удалению только 13 точек из 264 исходных, в то время как использование только минимального критерия расстояния требует  $dL_{\min}$ , равное от 100 до 150 м для удаления ложных экстремумов из поля батиметрии, показанных на рисунке 2.2.7, *a*, и в этом случае прореживание полезных точек данных уже становится заметным.

Оставшийся артефакт на рисунке 2.2.8, *a* – заметные волнообразные узоры в изолиниях, которые визуальнo коррелируют с местоположением точек данных. Это связано с неаналитическим поведением функции Грина (2.2.2) в точках данных, то есть, когда функция Грина  $G = G(\xi, \eta)$  и её первая производная являются непрерывными, а лапласиан – нет. Это можно предотвратить, применяя бигармоническое сглаживание

$$f^{(m+1)} = f^{(m)} - \tau^{(m)} \cdot \Delta \xi^4 \cdot \nabla^4 f^{(m)}, \quad (2.2.6)$$

где  $\Delta \xi$  – расстояние между узлами сетки по горизонтали (в нашем случае горизонтальные сетки спроектированы таким образом, что разрешение одинаково в обоих направлениях  $\Delta \xi = \Delta \eta$ ) и  $\nabla^4 f = \nabla^2(\nabla^2 f)$ , где  $\nabla^2$  – дискретный 9-точечный оператор Мерхтеллена-Лапласа

$$\Delta \xi^2 \cdot \nabla^2 = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 2/3 & -10/3 & 2/3 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}. \quad (2.2.7)$$

Результат применения бигармонического сглаживания (2.2.6) показан на рисунке 2.2.8, где мы выполнили 120000 итераций. Причина, по которой требуется так много итераций, прежде чем какое-либо изменение станет заметным, заключается в том, что билапласиан поля, реконструированный как сумма функций

Грина (2.2.1), имеет билапласиан равный нулю везде, кроме точек данных. В результате основной эффект сглаживания возникает вблизи точек данных, где сглаживание восстанавливает аналитичность поля за счет некоторого отклонения от измеренных значений. Поле батиметрии на рисунке 2.2.8 непрерывно дифференцируемо и его лапласиан больше не раскрывает местоположение точек данных.

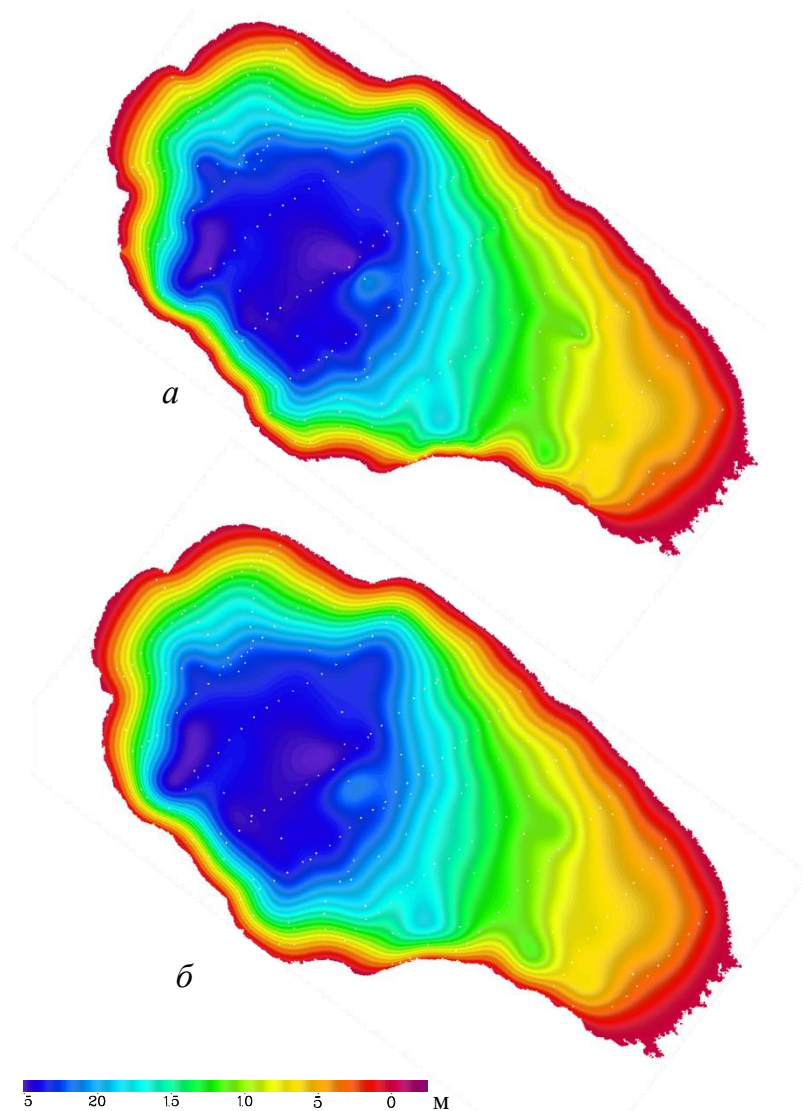


Рисунок 2.2.8 – Батиметрия озера Ши́ра, реконструированная из пространственно разбросанных данных с использованием комбинированного критерия (2.2.3) с минимально допустимым расстоянием  $dL_{\min} = 50$  м и максимальным уклоном дна  $dZ_{\max} = 0,04$ : *a* – без применения бигармонического сглаживания, *б* – после применения 120 000 итераций бигармонического сглаживания. Наиболее заметным отличием является меньшая волнообразная структура изолиний вдоль северо-восточного побережья

Таким образом, была разработана методика построения цифровой модели рельефа дна, которая включала в себя:

- предварительную обработку данных с использованием комбинированного критерия (2.2.3);
- интерполяцию данных батиметрии на равномерную сетку с использованием бигармонической сплайн-интерполяции [123];
- бигармоническое сглаживание функций Грина (2.2.6) в методе бигармонической сплайн-интерполяции.

Применение этой методики позволило получить непрерывно-дифференцируемое поле батиметрии озера Ши́ра.

### 2.2.2 Верификация модели ROMS

Проведена верификация численных алгоритмов ROMS на представленном в Главе 1 аналитическом решении (1.4.19) для модели с учётом горизонтального обмена (1.4.9) – (1.4.11).

Результаты верификации показаны на рисунке 2.2.9. Расчет был проведен при следующих значениях параметров: длина и ширина прямоугольного бассейна 10 000 м, ветер восточный  $\tau/\rho_0 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ , условие прилипания на дне, коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z = 0,02 \text{ м}^2/\text{с}$ , коэффициенты горизонтальной вязкости  $K_h = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ , глубина  $H = 50 \text{ м}$ .

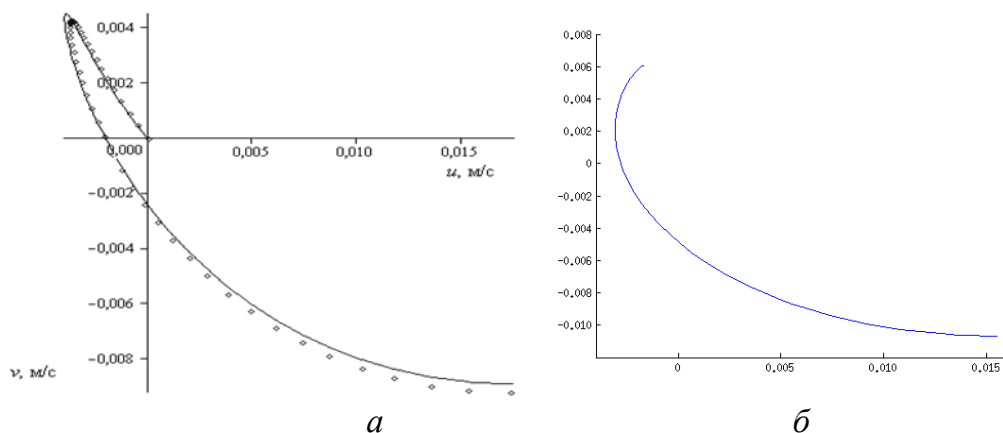


Рисунок 2.2.9 – Годографы скоростей в центральной точке бассейна: *a* – модель с учетом бокового обмена (ромбики), решение для модели Экмана (непрерывная линия); *б* – по результатам расчета в модели ROMS

Масштабы скоростей совпадают, различие в поведении на дне объясняется тем, что в модели ROMS скорости выводятся в точке, находящейся на расстоянии половина шага сетки в вертикальном направлении. Верификация показала хорошее совпадение результатов численных расчетов с аналитическим решением.

### **2.3. Сравнительный анализ разностных схем повышенного порядка аппроксимации для уравнения переноса-диффузии на аналитических решениях**

Возможность проведения расчетов на долговременные периоды (от 3 месяцев) в задачах гидрофизики во многом определяется выбором численной модели и используемых разностных алгоритмов.

Численное решение уравнения переноса-диффузии представляет собой очень важную задачу вычислительной гидрофизики, возникающую при моделировании трехмерных течений вязкой жидкости в открытых водоемах при решении уравнений движения и уравнений переноса-диффузии для температуры, солености, примеси. То, как существенно этот выбор влияет на окончательный результат, хорошо проиллюстрировано в [91].

Особенностью современных численных методов, предназначенных для расчетов течений в открытых водоемах, является возможность выбора варианта разностной аппроксимации членов переноса в уравнении переноса-диффузии.

Разностные аппроксимации первого порядка для уравнения переноса (например, известная разностная схема с противотоковой аппроксимацией первого порядка) монотонны, но обладают очень сильной диссипацией, что часто делает результаты расчетов неприемлемыми.

С другой стороны, использование аппроксимаций высокого порядка приводит к нефизическим осцилляциям, для уменьшения которых применяются различные монотонизаторы как универсальные [106], так и предназначенные для конкретных аппроксимаций [103, 108].

Большое число работ посвящено сравнению результатов расчетов для одномерного и двумерного уравнения переноса, что объясняется возможностью выбора вариантов разностной аппроксимации. Отметим один из последних обзоров [107].

В случае уравнения переноса с постоянными коэффициентами легко выписать аналитические решения, что позволяет сравнить не только результаты расчетов с различными вариантами аппроксимации между собой, но и с точным решением. Что касается уравнения переноса-диффузии, то выписать точное решение для него сложнее и в одномерном, и в двумерном случаях. Анализ разностных схем для уравнения переноса-диффузии в одномерном случае посвящена третья глава монографии [91].

В настоящем параграфе найдены аналитические решения для уравнения переноса-диффузии в одномерном и двумерном случае (для случая разрывных и гладких начальных данных), которые могут использоваться для тестирования численных алгоритмов. При этом аналитическое решение представляет собой формулу, которая определяет решение в каждый момент времени и в любой точке пространства через элементарные или специальные функции.

С использованием этих тестов анализируются явные разностные схемы, которые используются в современных численных моделях гидрофизики водоемов, в частности, в численной модели, реализованной кодом ROMS, а также некоторые другие широко известные разностные схемы.

### 2.3.1. Одномерный случай

Трехмерное уравнение переноса-диффузии примеси имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = K_h \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.$$

Здесь  $x, y, z$  – декартовы координаты,  $C(x, y, z, t)$  – концентрация примеси,  $K_h, K_z$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно. В общем случае скорости  $u, v, w$  являются заданными функциями времени и пространственных переменных.

В начальный момент времени задается распределение  $C_0(x, y, z, 0) = \phi(x, y, z)$ .

Как правило, для аппроксимации производных по пространству в горизонтальном направлении применяют явные разностные схемы, а в вертикальном – неявные [91, 107], поэтому мы не будем рассматривать трехмерный случай, а ограничимся анализом явных разностных схем для одномерного уравнения переноса-диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad C_0(x, 0) = \phi(x), \quad (2.3.1)$$

где  $u = \text{const}$  и двумерного уравнения переноса-диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = K_h \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad C_0(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad (2.3.2)$$

где  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ .

### Аналитические решения

Рассмотрим одномерный случай.

Уравнение (2.3.1) с помощью замены переменной  $\bar{x} = x - ut$  сводится к уравнению диффузии (черту над независимой переменной  $x$  опустим):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_h \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (2.3.3)$$

Известно, что решение задачи (2.3.3) в общем случае может быть найдено по формуле [60]:

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(\xi) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4at}\right) d\xi. \quad (2.3.4)$$

Есть несколько начальных конфигураций, для которых интеграл Пуассона (2.3.4) может быть выражен через элементарные или специальные функции [60]. Например, известны решения в случае, когда начальное распределение представляет собой «полочку» (2.3.9), «помост» (2.3.11) или функцию Гаусса (2.3.7).

Выпишем решения (2.3.3) для четырех начальных конфигураций через элементарные или специальные функции:

В случае, если начальное распределение представляет собой треугольник с высотой  $b$  и основанием  $2l$ :

$$C_{110}(x, x_0, b, l) = \begin{cases} 0, & x < x_0 - l \\ b + b \frac{x - x_0}{l}, & x_0 - l \leq x < x_0 \\ b - b \frac{x - x_0}{l}, & x_0 \leq x < x_0 + l \\ 0, & x \geq x_0 + l \end{cases}, \quad (2.3.5)$$

решение уравнения (2.3.1) имеет вид

$$C_{11t}(x, x_0, t, b, l, K_h) = \frac{b\sqrt{K_h t}}{l\sqrt{\pi}} \left( e^{-\frac{(l+\bar{x})^2}{4K_h t}} - 2e^{-\frac{\bar{x}^2}{4K_h t}} + e^{-\frac{(l-\bar{x})^2}{4K_h t}} \right) - \frac{b}{l} \bar{x} \operatorname{erf} \left( \frac{\bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right) + \\ + \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{\bar{x}}{l} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{l + \bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right) + \frac{b}{2} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{l} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{l - \bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right), \quad (2.3.6)$$

$$\bar{x} = x - x_0.$$

В случае распределения Гаусса

$$C_{120}(x, x_0, \alpha, b) = b e^{-\alpha(x-x_0)^2}, \quad b, \alpha > 0, \quad (2.3.7)$$

решение (2.3.1) находится по формуле

$$C_{12t}(x, x_0, t, b, \alpha, K_h) = \frac{b}{\sqrt{4\alpha K_h t + 1}} \exp \left( -\frac{\alpha(\bar{x})^2}{4\alpha K_h t + 1} \right). \quad (2.3.8)$$

В случае «полочки» высоты  $b$ :

$$C_{130}(x, x_0, b) = \begin{cases} b, & x < x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases}, \quad (2.3.9)$$

имеем

$$C_{13t}(x, x_0, t, b, K_h) = \frac{1}{2} b \left( \operatorname{erf} \left( \frac{-\bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right) + 1 \right). \quad (2.3.10)$$

Начальные данные в виде «помоста» шириной  $2l$  и высоты  $b$  в одномерном случае имеют вид



$$C_{140}(x, x_0, l, b) = \begin{cases} b, & |x - x_0| < l \\ 0, & |x - x_0| > l \end{cases} \quad (2.3.11)$$

решение, которое им соответствует:

$$C_{14t}(x, x_0, t, b, l, K_h) = \frac{b}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{l - \bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{l + \bar{x}}{2\sqrt{K_h t}} \right) \right). \quad (2.3.12)$$

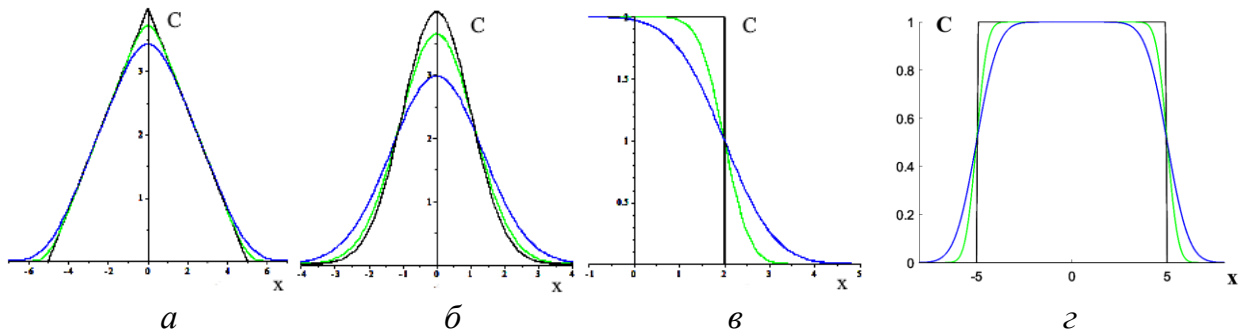


Рисунок 2.3.1 – Начальные распределения – черная линия, соответствующие им аналитические решения уравнения (2.3.1) при  $K_h = 0, 2$  – зелёная линия, при  $K_h = 0, 2$  – синяя линия,  $t = 0, 5$ : *a* – треугольник высоты  $b = 4$  и основанием  $2l = 10$ ,  $x_0 = 0$ , *б* – распределение Гаусса при  $b = 4$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\alpha = 0, 5$ , *в* – «полочка» с высотой  $b = 2$ ,  $x_0 = 2$ , *г* – «помост» с высотой  $b = 1$ ,  $2l = 10$ ;  $x_0 = 0$

### Разностные схемы

В разностном алгоритме, реализованном открытым кодом ROMS, при переходе на следующий шаг по времени используется специальный вариант метода предиктор-корректор. Вначале по трехслойной разностной схеме Leap-Frog вычисляется промежуточное значение, далее в корректоре используется полученное промежуточное значение и значение на  $n$  и на  $n - 1$  слое по времени. В корректоре возможно использование большего числа слоев по времени.

Детальное исследование подобных разностных схем для уравнения переноса проведено в работе [128].

В настоящем параграфе для таких разностных схем для уравнения переноса-диффузии проведено сравнение результатов расчетов с аналитическими решениями и сравнение результатов расчетов по известным разностным схемам.

Рассматривались два класса разностных схем: типа предиктор-корректор и явные двухслойные.

Однопараметрическое семейство трехслойных схем типа предиктор-корректор с центральными разностями второго порядка для аппроксимации производной по пространству в случае уравнения переноса-диффузии может быть записано в виде [131]

$$\frac{C^*(x) - C^{n-1}(x)}{2\Delta t} = -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} C^n(x); \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = & -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} \left( \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) C^*(x) + \left( \frac{1}{2} + 2\gamma \right) C^n(x) - \gamma C^{n-1}(x) \right) + \\ & + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \end{aligned}$$

где  $C^n(x)$  – значение неизвестной функции в момент времени  $n\Delta t$ ;  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  – шаги по пространству и времени соответственно. Операторы сдвига определяются стандартным образом:  $T_x C^n(x) = C^n(x + \Delta x)$ ,  $T_{-x} C^n(x) = C^n(x - \Delta x)$ ,  $E$  – тождественный оператор. Параметр  $\gamma$  отвечает за метод интерполяции значений на трех слоях по времени в корректоре. Параметр  $\gamma = 0$  соответствует методу трапеций,  $\gamma = 1/12$  – методу Адамса-Мултона,  $\gamma = 0,0804$  – случаю максимальной устойчивости схемы (2.3.13) для уравнения переноса.

В ROMS для аппроксимации членов адвекции также используется центральная разность четвертого порядка [130]

$$\frac{2/3(T_x - T_{-x}) - 1/12(T_{2x} - T_{-2x})}{\Delta x}. \quad (2.3.14)$$

Кроме того, были рассмотрены противопотоковые аппроксимации второго и третьего порядков:

$$\begin{aligned} \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}}{8\Delta x}, \quad u > 0, \\ \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{T_{2x} - 3T_x + 3E - T_x}{8\Delta x}, \quad u < 0, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}}{6\Delta x}, \quad u > 0, \\ \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{T_{2x} - 3T_x + 3E - T_{-x}}{6\Delta x}, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Для сравнения были рассмотрены двухслойные разностные схемы с разностями против потока различных порядков аппроксимации.

Известная разностная схема с противопотоковой аппроксимацией первого порядка первой производной по пространству:

$$\begin{aligned} \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \frac{E - T_{-x}}{\Delta x} C^n(x) + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u > 0; \\ \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \frac{T_x - E}{\Delta x} C^n(x) + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u < 0. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Схема QUICK [103] с вариантом (2.3.15) противопотоковой аппроксимации второго порядка первой производной по пространству:

$$\begin{aligned} \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \left( \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{1}{8\Delta x} (T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}) \right) C^n(x) + \\ + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u > 0, \\ \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \left( \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{1}{8\Delta x} (T_{2x} - 3T_x + 3E - T_{-x}) \right) C^n(x) + \\ + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u < 0, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

и с вариантом противопотоковой аппроксимации третьего порядка (2.3.16) для первой производной по пространству:

$$\begin{aligned} \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \left( \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{1}{6\Delta x} (T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}) \right) C^n(x) + \\ + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u > 0, \\ \frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} = -u \left( \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} - \frac{1}{6\Delta x} (T_{2x} - 3T_x + 3E - T_{-x}) \right) C^n(x) + \\ + K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u < 0. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Схема (2.3.18) обобщается до схемы третьего порядка аппроксимации в целом для уравнения переноса-диффузии QUICKEST [103].

$$\begin{aligned}
\frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} &= -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \Delta t u^2 \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x) \\
&+ \frac{1}{6} \frac{u}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta t^2 u^2}{\Delta x^2} - 6 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_h\right) (T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}) C^n(x) \\
&+ K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u > 0, \\
\frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} &= -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \Delta t u^2 \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x) \\
&+ \frac{1}{6} \frac{u}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta t^2 u^2}{\Delta x^2} - 6 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} K_h\right) (T_{2x} - 3T_x + 3E - T_{-x}) C^n(x) \\
&+ K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u < 0.
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Кроме того, была рассмотрена схема [106], которая имеет третий порядок аппроксимации по времени и пространству для уравнения переноса с добавлением диффузионного члена:

$$\begin{aligned}
\frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} &= -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \Delta t u^2 \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x) \\
&+ \frac{1}{6} \frac{u}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta t^2 u^2}{\Delta x^2}\right) (T_x - 3E + 3T_{-x} - T_{-2x}) C^n(x) \\
&+ K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u > 0, \\
\frac{C^{n+1}(x) - C^n(x)}{\Delta t} &= -u \frac{T_x - T_{-x}}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \Delta t u^2 \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x) \\
&+ \frac{1}{6} \frac{u}{\Delta x} \left(1 - \frac{\Delta t^2 u^2}{\Delta x^2}\right) (T_{2x} - 3T_x + 3E - T_{-x}) C^n(x) \\
&+ K_h \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x), \quad u < 0.
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Схема Мак-Кормака [111] использует попеременно правую и левую разности на двух шагах:

$$\begin{aligned} \frac{C^*(x) - C^n(x)}{\Delta t} &= -u \frac{T_x - E}{\Delta x} C^n(x), \\ C^{n+1}(x) &= 1/2(C^*(x) + C^n(x) - u\Delta t \frac{E - T_{-x}}{\Delta x} C^n(x)) \\ &+ K_h \Delta t \frac{T_x - 2E + T_{-x}}{\Delta x^2} C^n(x). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

### Условие устойчивости

Свойства устойчивости, рассмотренных в п. 2.3.2 разностных схем для уравнения переноса, исследованы в литературе, например в [131]. Рассмотрим вопрос устойчивости этих схем для уравнения переноса-диффузии.

Следующая серия рисунков дает представление об устойчивости рассмотренных разностных схем для уравнения переноса-диффузии в плоскости  $\lambda - \sigma$ , где  $\lambda = K_h \Delta t / \Delta x^2$ ,  $\sigma = |u| \Delta t / \Delta x$ .

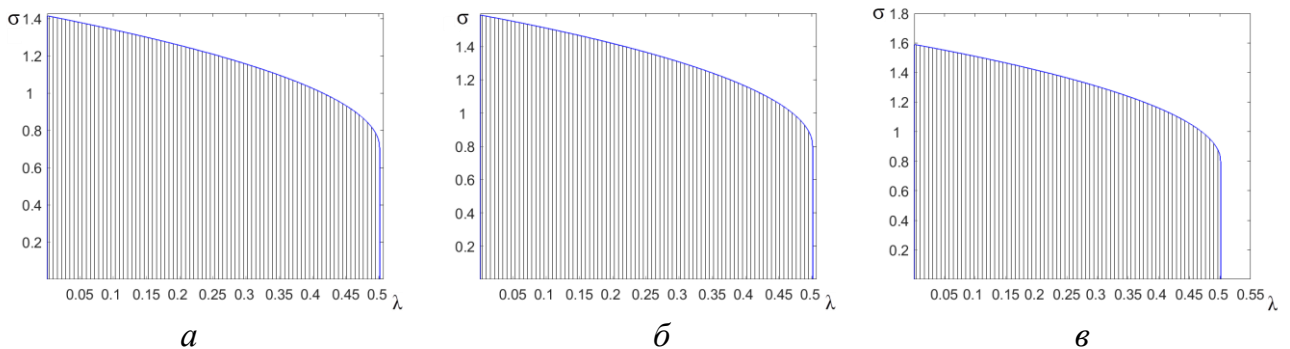


Рисунок 2.3.2 – Область устойчивости для схемы (2.3.13) в случае:  $\gamma = 0$  (а),  $\gamma = 1/12$  (б),  $\gamma = 0,0804$  (в)

На рисунке 2.3.2 показаны области устойчивости для схемы (2.3.13) при различных значениях параметра  $\gamma$ . Изменение параметра  $\gamma = (0, 1/12)$  соответствует выбору метода трапеции или метода Адамса-Мултона в интерполяционной формуле схемы (2.3.13), выбор  $\gamma = 0,0804$  соответствует условию максимальной устойчивости для уравнения переноса. Области устойчивости при параметрах  $\gamma = 1/12$  и

$\gamma = 0,0804$  будут аналогичными области устойчивости при  $\gamma = 0$  с той только разницей, что верхний предел по переменной  $\sigma$  совпадает с величиной устойчивости соответствующей схемы для уравнения переноса.

Такие же выводы можно сделать для схемы (2.3.14) (рисунок 2.3.3). Но область устойчивости становится более ограниченной по параметру  $\sigma$ .

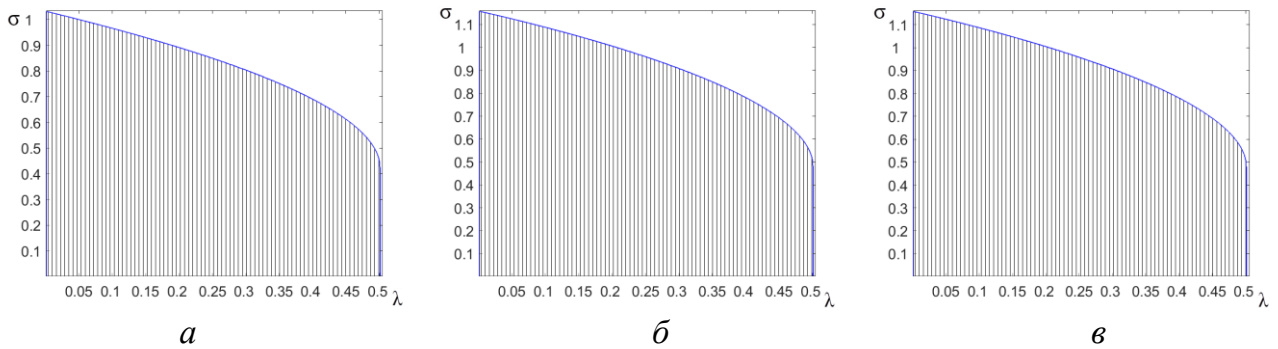


Рисунок 2.3.3 – Область устойчивости для схемы (2.3.14) в случае:  $\gamma = 0$  (а);  $\gamma = 1/12$  (б);  $\gamma = 0,0804$  (в)

В схемах (2.3.15), (2.3.16) область устойчивости перестает быть выпуклой (рисунок 2.3.4), следствием чего является тот факт, что схема, устойчивая при значениях  $(\lambda_0, \sigma_0)$ , может стать неустойчивой при уменьшении этих параметров.

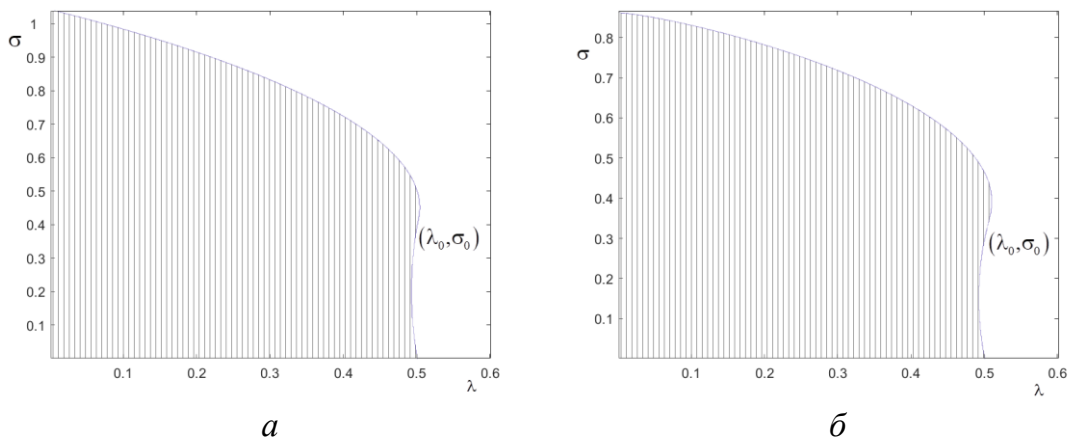


Рисунок 2.3.4 – Область устойчивости при  $\gamma = 1/12$  для схемы: (2.3.15) (а), (2.3.16) (б)

График области устойчивости для двухслойных разностных схем с противопотоковыми разностями первого порядка аппроксимации (2.3.17) показан на рисунке 2.3.5, а. Рисунок 2.3.5, б и рисунок 2.3.6, а для второго и третьего порядков

аппроксимации соответственно (схемы (2.3.18) и (2.3.19)) показывают, что для уравнения переноса такие схемы неустойчивы.

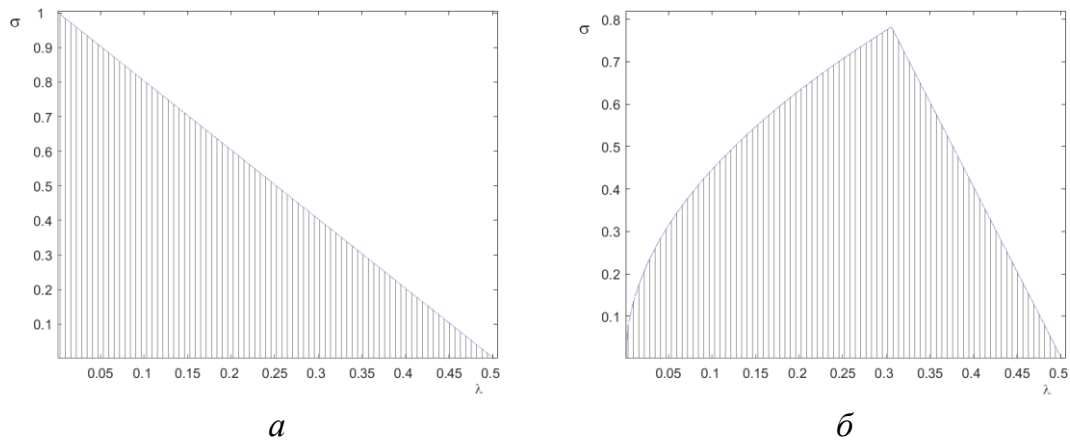


Рисунок 2.3.5 – Область устойчивости для схемы: (2.3.17) (а); (2.3.18) (б)

В схеме QUICKEST при  $\lambda = 0$  (для уравнения переноса) выполняется стандартное условие устойчивости  $\sigma \leq 1$  и есть одна изолированная точка  $\sigma \leq 1$  в которой выполняется условие устойчивости. Это объясняет специфическую область устойчивости схемы QUICKEST (рисунок 2.3.6, б).

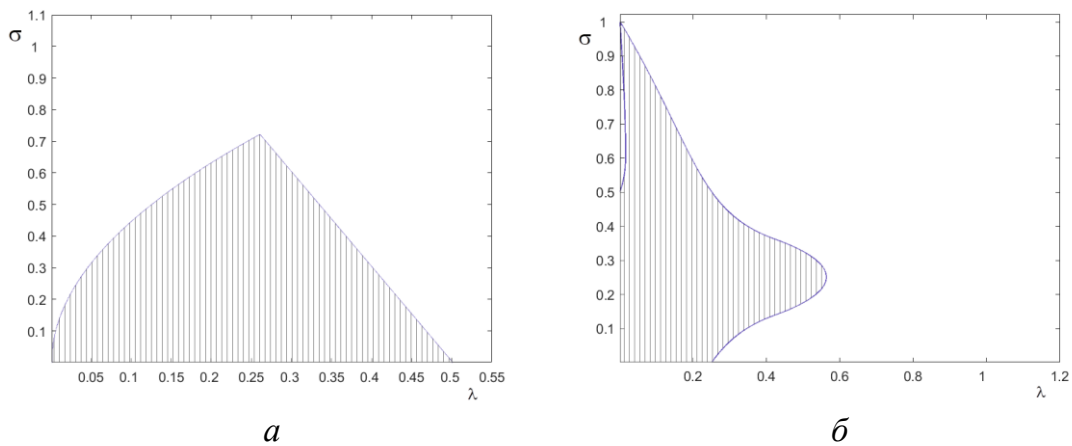


Рисунок 2.3.6 – Область устойчивости для схемы: (2.3.19) (а), QUICKEST (2.3.20) (б)

Схема (2.3.21) и схема с разностями против потока первого порядка (2.3.17) имеют практически совпадающие области устойчивости (рисунок 2.3.4, а и рисунок 2.3.6, а).

Область устойчивости схемы Мак-Кормака (рисунок 2.3.7) подобна области устойчивости в схемах Leap-Frog с центральными аппроксимациями для производной первого порядка по пространству (рисунок 2.3.2), но с различными пределами по параметру  $\sigma$ :

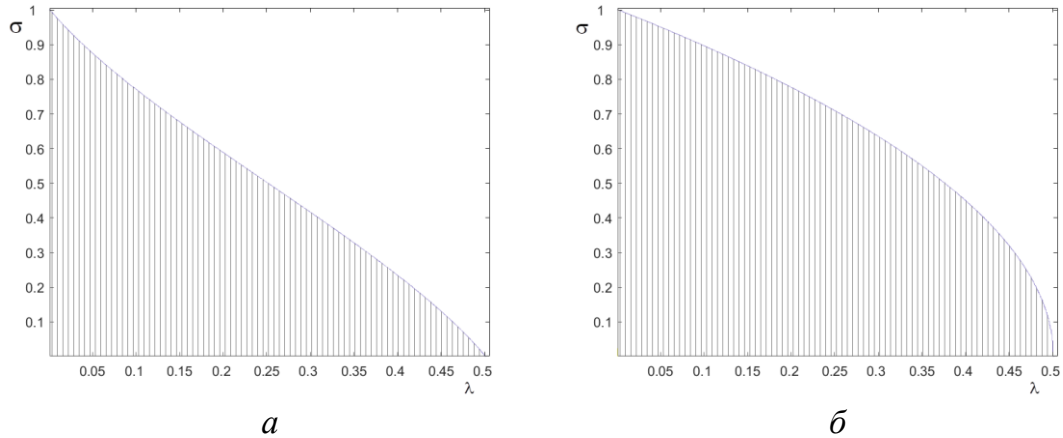


Рисунок 2.3.7 – Область устойчивости для схемы (2.3.21) (*a*), область устойчивости для схемы Мак-Кормака (2.3.22) (*б*)

Для всех схем при  $\sigma = 0$  получаем условие устойчивости для явной схемы уравнения диффузии.

### Результаты численных расчетов

Расчеты были проведены для начальных данных, при которых одномерное уравнение переноса-диффузии имеет аналитическое решение, и следующих значениях параметров:  $t = 35$ ,  $u = 1$ ,  $K_h = 0,05$ ,  $x_0 = 75$ ,  $\Delta x = 0,5$ ,  $\Delta t = 0,01$ . Результаты показаны на рисунках 2.3.8– 2.3.11.



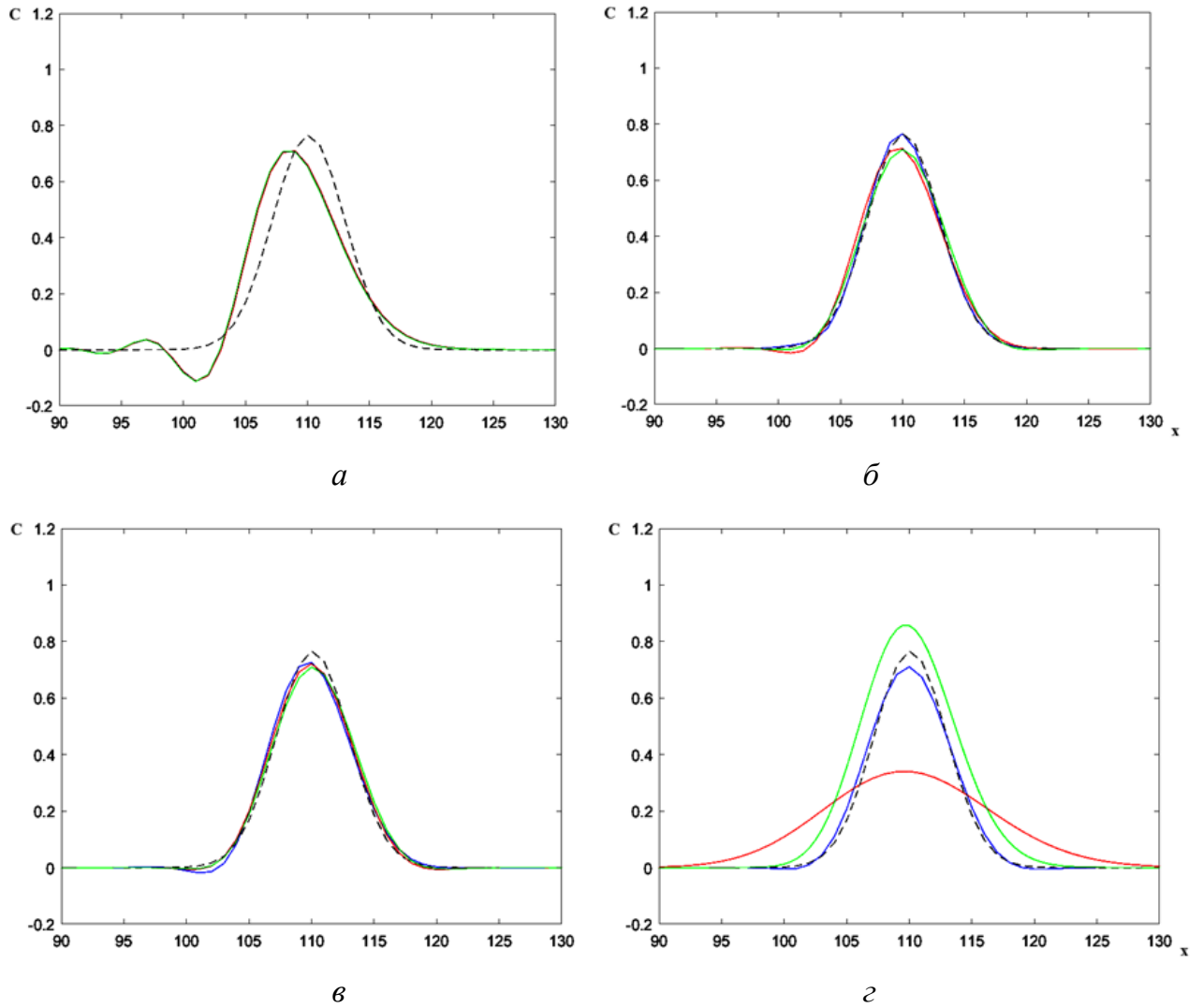


Рисунок 2.3.8 – Начальные данные заданы в виде функции Гаусса (2.3.7), черная пунктирная линия – аналитическое решение: *а* – схемы вида (2.3.13) при различных значениях параметра  $\gamma$ : синяя линия –  $\gamma = 0$ , красная линия –  $\gamma = 1/12$ , зеленая линия –  $\gamma = 0,0804$ , *б* – схемы при  $\gamma = 1/12$  (2.3.14) – синяя линия, (2.3.15) – красная линия, (2.3.16) – зеленая линия, *в* – схема (2.3.17) – синяя линия, (2.3.18) – красная линия, (2.3.19) – зеленая линия, *г* – схема (2.3.20) – синяя линия, (2.3.21) – красная линия, (2.3.22) – зеленая линия

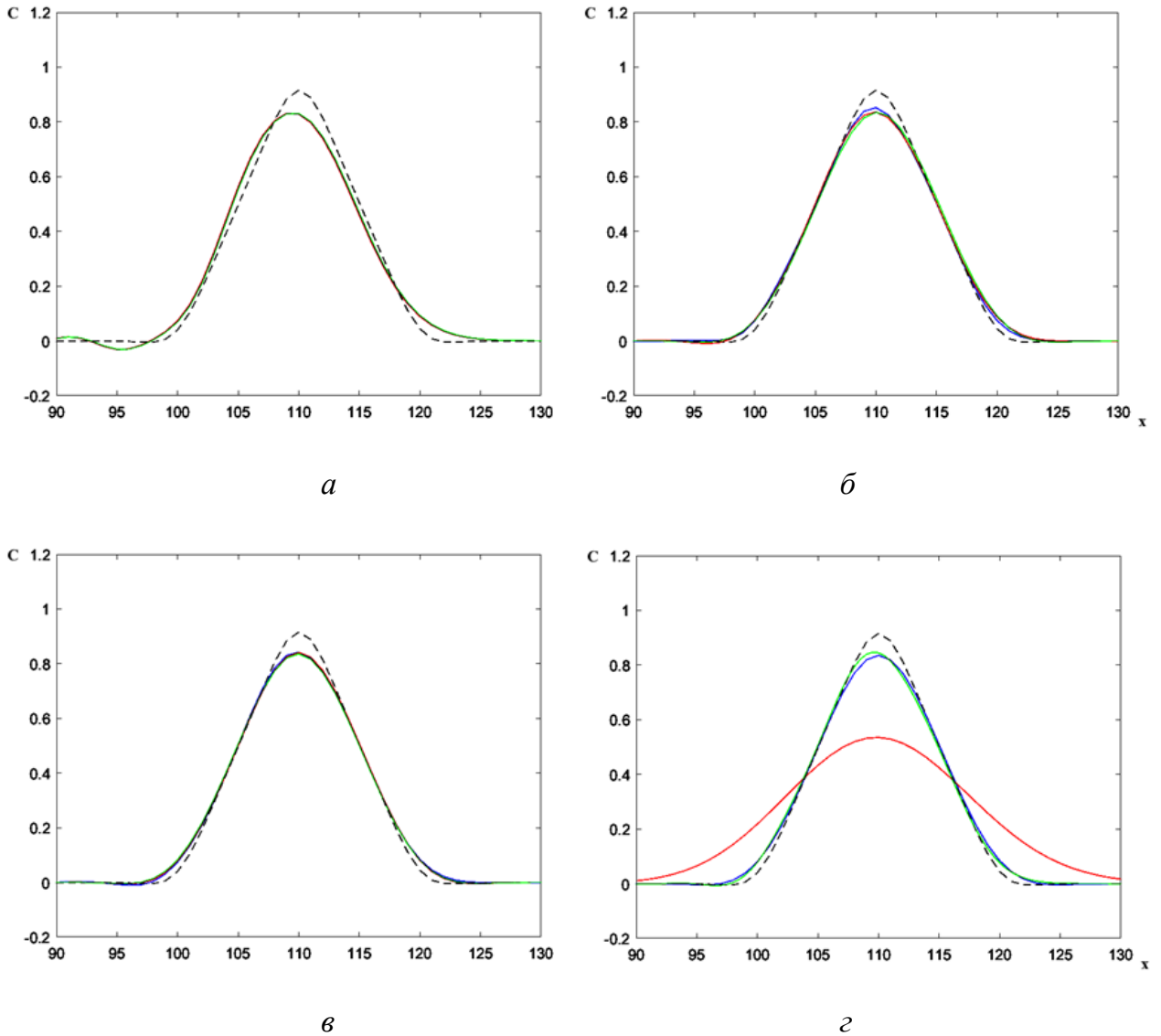


Рисунок 2.3.9 – Начальные данные заданы как треугольник высоты  $b$  с основанием  $2l$  (2.3.5), черная пунктирная линия – аналитическое решение:  $a$  – схемы вида (2.3.13) при различных значениях параметра  $\gamma$ : синяя линия –  $\gamma = 0$ , красная линия –  $\gamma = 1/12$ , зеленая линия –  $\gamma = 0,0804$ ,  $б$  – схемы при  $\gamma = 1/12$  (2.3.14) – синяя линия, (2.3.15) – красная линия, (2.3.16) – зеленая линия,  $в$  – схема (2.3.17) – синяя линия, (2.3.18) – красная линия, (2.3.19) – зеленая линия,  $г$  – схема (2.3.20) – синяя линия, (2.3.21) – красная линия, (2.3.22) – зеленая линия

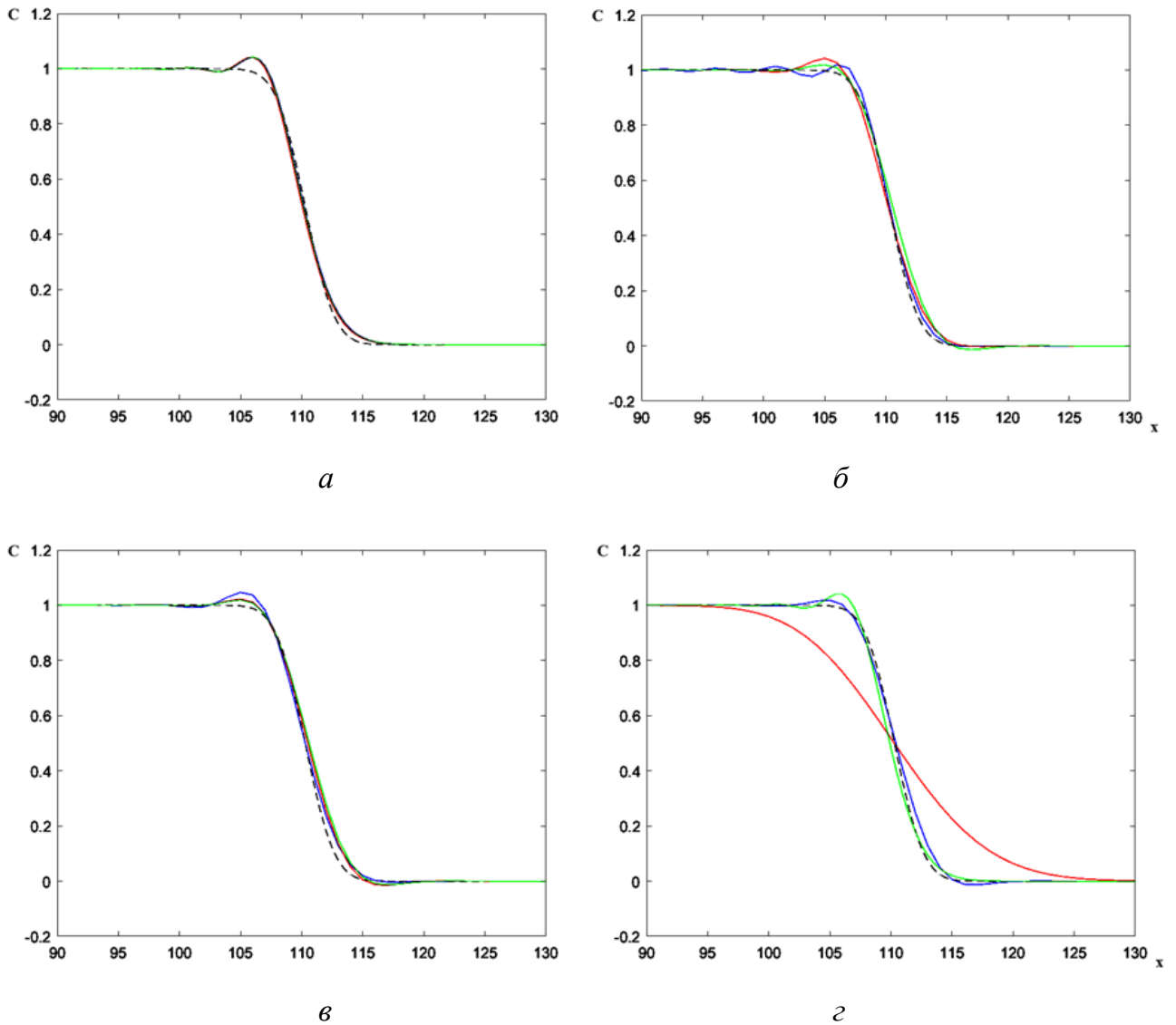


Рисунок 2.3.10 – Начальные данные заданы как «полочка» высоты  $b$  (2.3.9), черная пунктирная линия – аналитическое решение:  $a$  – схемы вида (2.3.13) при различных значениях параметра  $\gamma$ : синяя линия –  $\gamma = 0$ , красная линия –  $\gamma = 1/12$ , зеленая линия –  $\gamma = 0,0804$ ,  $б$  – схемы при  $\gamma = 1/12$ : (2.3.14) – синяя линия, (2.3.15) – красная линия, (2.3.16) – зеленая линия,  $в$  – схема (2.3.17) – синяя линия, (2.3.18) – красная линия, (2.3.19) – зеленая линия,  $г$  – схема (2.3.20) – синяя линия, (2.3.21) – красная линия, (2.3.22) – зеленая линия

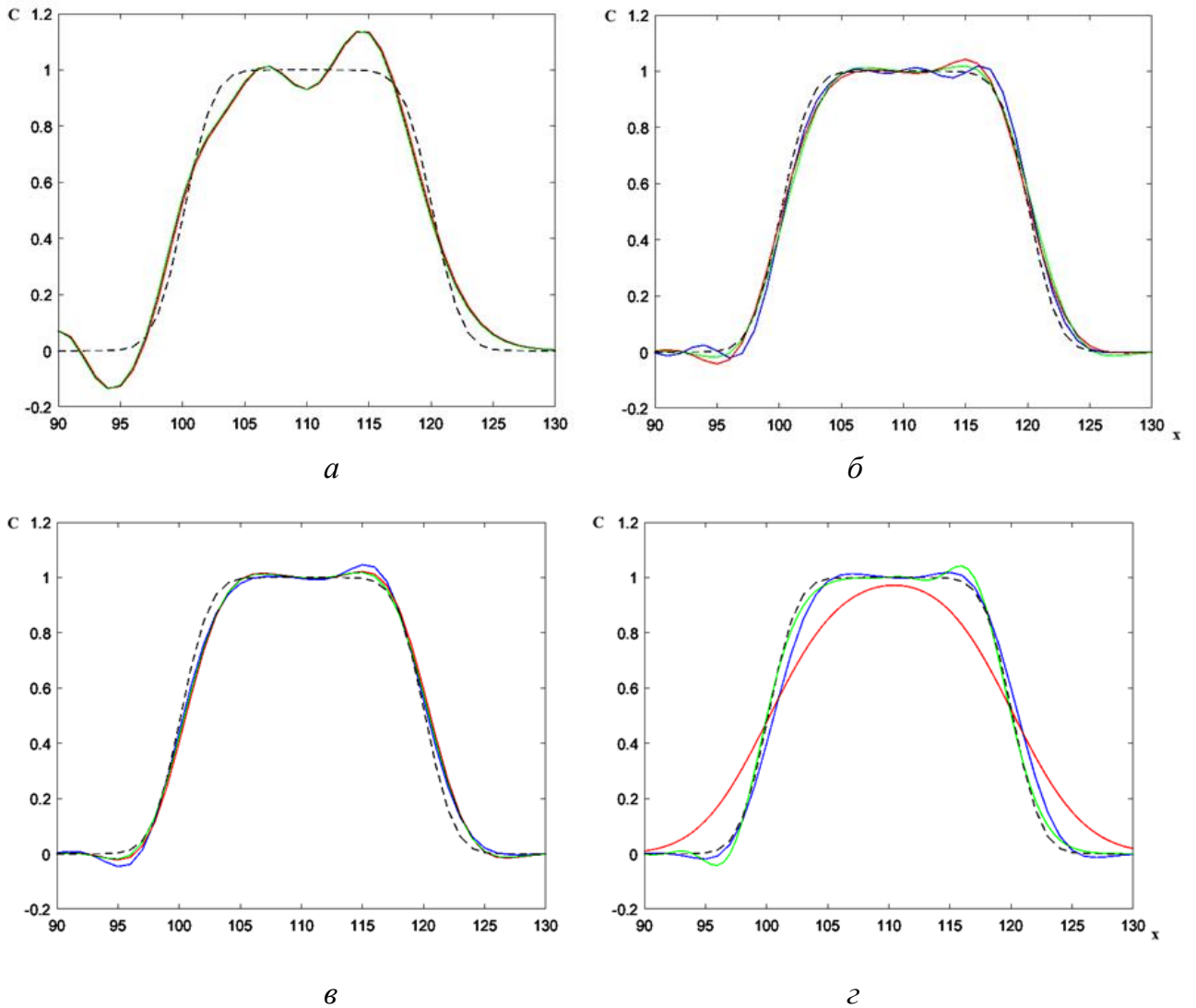


Рисунок 2.3.11 – Начальные данные заданы в виде «помоста» шириной  $2l$  (2.3.11), черная пунктирная линия – аналитическое решение: *а* – схемы вида (2.3.13) при различных значениях параметра  $\gamma$ : синяя линия –  $\gamma = 0$ , красная линия –  $\gamma = 1/12$ , зеленая линия –  $\gamma = 0,0804$ , *б* – схемы при  $\gamma = 1/12$  (2.3.14) – синяя линия, (2.3.15) – красная линия, (2.3.16) – зеленая линия, *в* – схема (2.3.17) – синяя линия, (2.3.18) – красная линия, (2.3.19) – зеленая линия, *г* – схема (2.3.20) – синяя линия, (2.3.21) – красная линия, (2.3.22) – зеленая линия

В Таблице 1 приведены значения ошибки  $e$ : модуля максимальной разности между разностным и аналитическим решением по всей разностной сетке на момент времени  $t = 35$ .

Таблица 1 – Абсолютные ошибки разностных решений в одномерном случае

	Ошибка $e$			
	Начальное распределение:			
	функция Гаусса (2.3.7)	треугольник (2.3.5)	«полочка» (2.3.9)	«помост» (2.3.11)
1. Схема (2.3.13), $\gamma = 0$	0,035	0,074	0,056	0,057
2. Схема (2.3.13), $\gamma = 1/12$	0,035	0,074	0,056	0,057
3. Схема (2.3.13), $\gamma = 0,0804$ ;	0,035	0,074	0,056	0,057
4. Схема (2.3.14), $\gamma = 1/12$	0,001	0,064	0,045	0,045
5. Схема (2.3.15), $\gamma = 1/12$	0,009	0,067	0,036	0,036
6. Схема (2.3.16), $\gamma = 1/12$	0,004	0,068	0,049	0,049
7. Схема (2.3.17)	0,427	0,380	0,216	0,214
8. Схема (2.3.18)	0,014	0,061	0,032	0,032
9. Схема (2.3.19)	0,007	0,061	0,047	0,047
10. Схема (2.3.20)	0,027	0,071	0,044	0,044
11. Схема (2.3.21)	0,004	0,068	0,051	0,012
12. Схема (2.3.22)	0,036	0,074	0,056	0,056

В расчете с гладкими начальными данными в виде функции Гаусса (2.3.7) наилучший результат получен при применении схемы (2.3.14) с аппроксимацией четвертого порядка для первой производной. В расчете с начальными данными в виде треугольника (2.3.5) одинаково хорошо показала себя как схема (2.3.14), так и двухслойные схемы с разностями против потока второго и третьего порядков. В расчете с начальными данными вида «полочка» (2.3.9) наилучший результат получен

для схемы с противопотоковой аппроксимацией второго порядка, а при начальных данных вида «помост» (2.3.11) – схема (2.3.21).

Схема (2.3.17) дает самую большую ошибку  $e$ . Схемы типа предиктор-корректор с leap-frog в качестве предиктора и с аппроксимацией второго порядка для первой производной по пространству дают точно такую же ошибку, как и схема Мак-Кормака (2.3.22).

### 2.3.2. Двумерный случай

В двумерном случае рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = K_h \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad C_0(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad (2.3.23)$$

при скоростях переноса, заданных формулой

$$u = -py, v = px, p = \text{const.}$$

При этом происходят два процесса: поворот начальной конфигурации вокруг начала системы координат со скоростью  $p$  и диффузия. Заменой переменных

$$\tilde{x} = x \cos pt + y \sin pt,$$

$$\tilde{y} = -x \sin pt + y \cos pt$$

уравнение (2.3.23) сводится к двумерному уравнению диффузии. Опуская знак тильда над независимыми переменными, запишем его в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_h \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right), \quad C_0(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (2.3.24)$$

В качестве начальных данных рассматривались следующие функции:

1) Функция Бесселя

$$C_{200}(x, y, x_0, y_0, B, m) = A + BJ_0(m\sqrt{(\tilde{x})^2 + (\tilde{y})^2}), \quad (2.3.25)$$

$$\tilde{x} = x - x_0, \tilde{y} = y - y_0.$$

Здесь  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $B$  – произвольная константа,  $m$  – натуральное число.

Решение имеет вид

$$C_{20t}(x, y, x_0, y_0, t, A, B, m, K_h) = A + B \cdot J_0(m\sqrt{(\tilde{x})^2 + (\tilde{y})^2}) e^{-K_h m^2 t}. \quad (2.3.26)$$

Далее решения для двумерного уравнения (2.3.24) строятся с использованием одномерных решений, найденных в п. 2.3.1.

2) Пирамида высоты  $b$ , в основании которой лежит квадрат со стороной  $2l$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$C_{210}(x, x_0, y, y_0, b, l) = \frac{1}{b} C_{110}(x, x_0, b, l) C_{110}(y, y_0, b, l), \quad (2.3.27)$$

решение

$$C_{21t}(x, x_0, y, y_0, t, b, l, K_h) = \frac{1}{b} C_{11t}(x, x_0, t, b, l, K_h) C_{11t}(y, y_0, t, b, l, K_h). \quad (2.3.28)$$

3) Двумерное распределение Гаусса с параметрами  $b, \alpha$ :

$$C_{220}(x, x_0, y, y_0, b, \alpha) = b e^{-\alpha((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}, \quad (2.3.29)$$

имеет решение

$$C_{22t}(x, x_0, y, y_0, t, b, \alpha, K_h) = \frac{1}{b} C_{12t}(x, x_0, t, b, \alpha, K_h) C_{12t}(y, y_0, t, b, \alpha, K_h). \quad (2.3.30)$$

4) Двумерный «помост» высоты  $b$  длиной и шириной  $2l$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$C_{240}(x, x_0, y, y_0, l, b) = \frac{1}{b} C_{140}(x, x_0, l, b) C_{140}(y, y_0, l, b), \quad (2.3.31)$$

имеет решение

$$C_{24t}(x, x_0, y, y_0, t, l, b, K_h) = \frac{1}{b} C_{14t}(x, x_0, t, l, b, K_h) C_{14t}(y, y_0, t, l, b, K_h). \quad (2.3.32)$$

### Разностные схемы

Обобщение одномерных разностных схем, рассмотренных в п. 2.3.1, на двумерный случай проводится разными способами. Схема (2.3.21) в случае уравнения переноса в работе [120] обобщается на двумерный случай как многопараметрическое семейство явных двухслойных схем, в работе [104] рассматриваются схемы расщепления, в работе [105] рассматривается обобщение схемы (2.3.20) для уравнения переноса-диффузии, но численные расчеты везде приводятся только для уравнения переноса.

В системе моделирования ROMS используются двумерные варианты (2.3.13) и (2.3.14). Полученные в результате расчетов по этим схемам численные решения сравнивались с результатами расчетов по двумерным аналогам разностных схем типа предиктор-корректор (2.3.15) – (2.3.16), известными двумерными аналогами разностной схемы с противопотоковой разностью первого порядка (2.3.17) и Мак-Кормака (2.3.22) и двумерными аналогами разностных схем (2.3.18) – (2.3.19).

### **Результаты численных расчетов**

Расчеты для двумерного случая проводились при следующих значениях параметров: расчетная область со стороной квадрата  $L=10$ , с шагом по обоим направлениям  $\Delta x = \Delta y = 0,5$ , шаг по времени  $\Delta t = 0,01$ . Центр начального возмущения находился в точке  $x_0 = y_0 = 1$ , на всех границах ставилось условие отсутствия потока примеси,  $p = 2$ ,  $K_h = 0,05$ . Результаты показаны на рисунках 2.3.12– 2.3.15 на момент времени  $t = 3,14$ , что соответствует одному обороту начальной конфигурации вокруг начала координат.

В случае тестовой задачи 1, при указанных параметрах расчета, оценить характер решения затруднительно ввиду сильного влияния граничных условий. На рисунке 2.3.12 приведены наиболее характерные варианты расчетов для тестовой задачи 1.



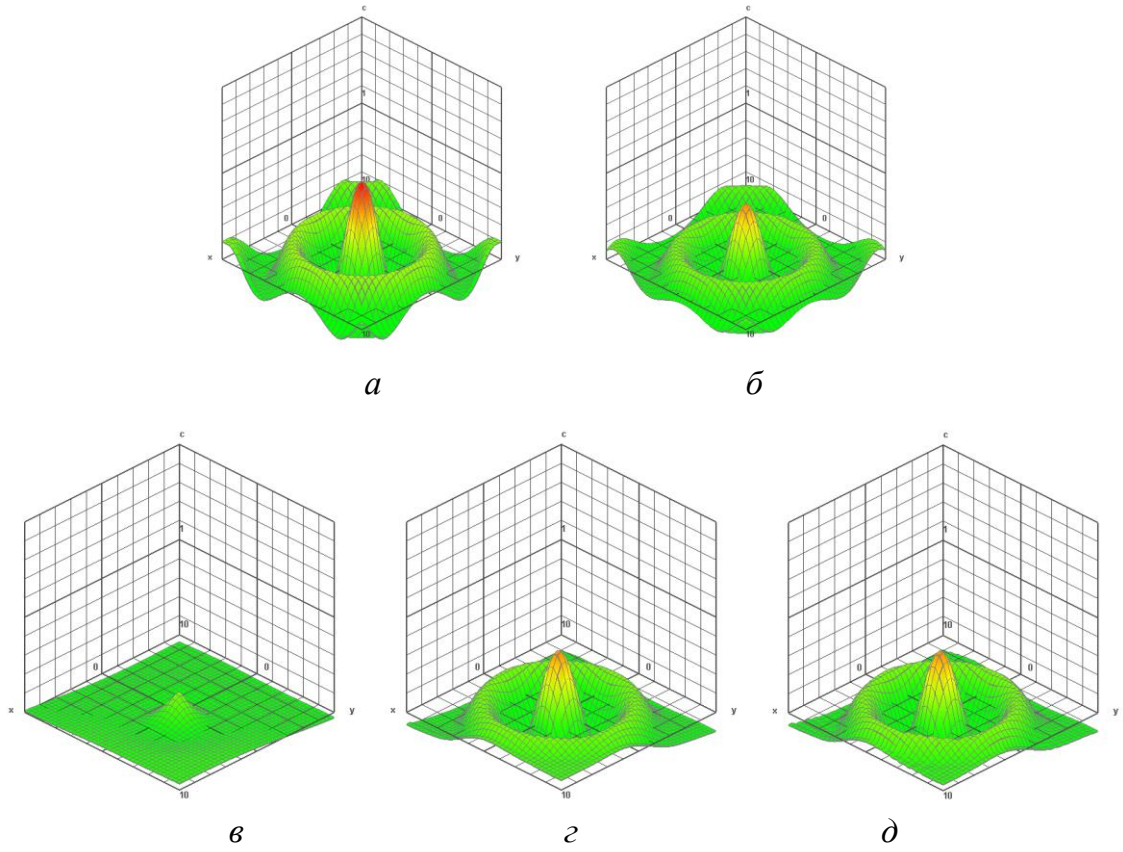


Рисунок 2.3.12 – Тестовая задача 1: *а* – начальные данные функция Бесселя (2.3.25) при  $m=1$ ,  $B=1$ , *б* – аналитическое решение на момент времени  $t=3,14$ , *в* – схема (2.3.17), *г* – схема (2.3.22), *д* – схема (2.3.13) при  $\gamma=1/12$

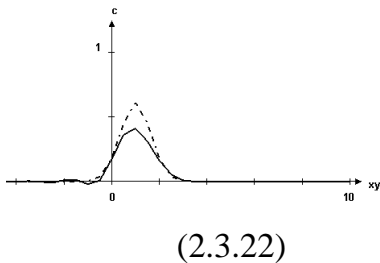
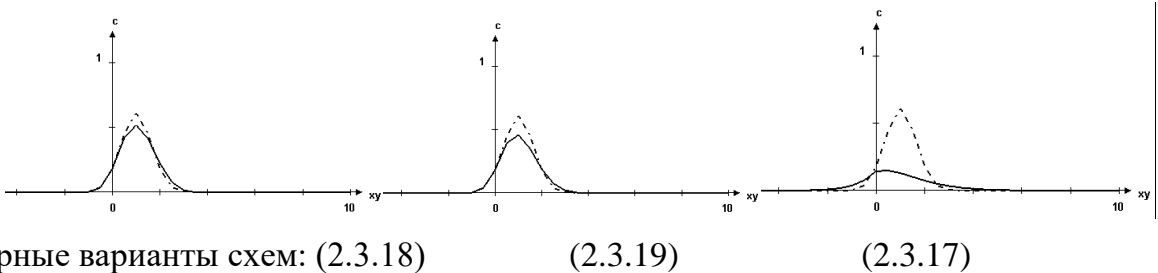
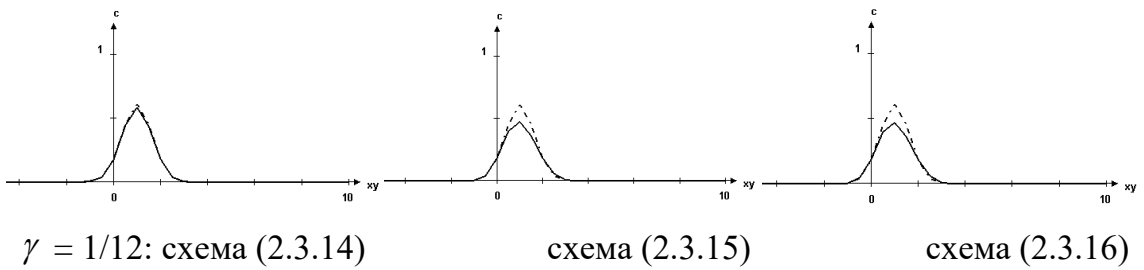
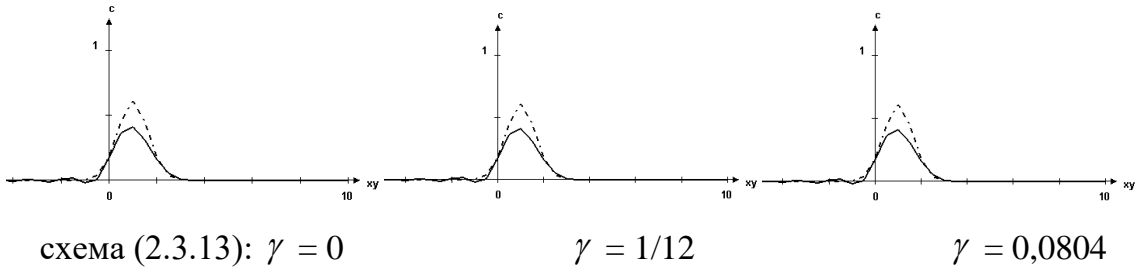
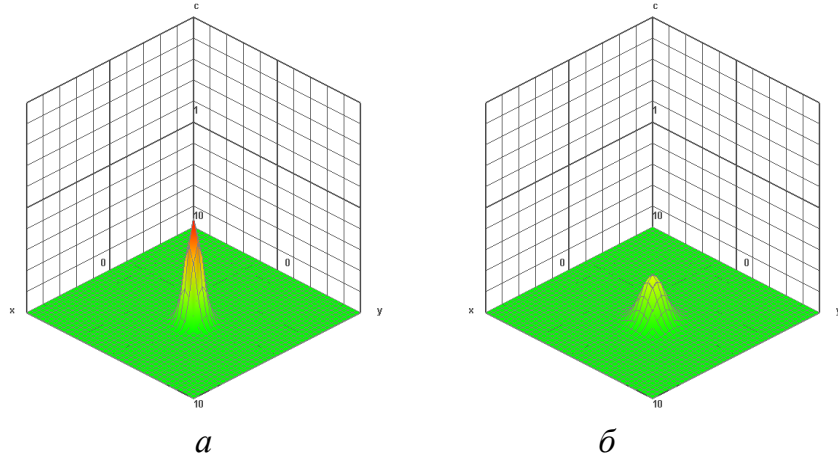


Рисунок 2.3.13 – Тестовая задача 2: *а* – начальные данные функция Гаусса с высотой  $b=1$  и  $\alpha=1$ , *б* – аналитическое решение на момент времени  $t=3,14$ . Далее – сечения точного решения (пунктирная линия) и разностного (сплошная линия) вертикальной плоскостью, проходящей через диагонали первого и третьего квадранта плоскости  $Oxy$ , масштаб по горизонтальной оси  $1:\sqrt{2}$

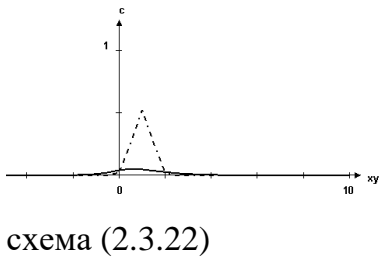
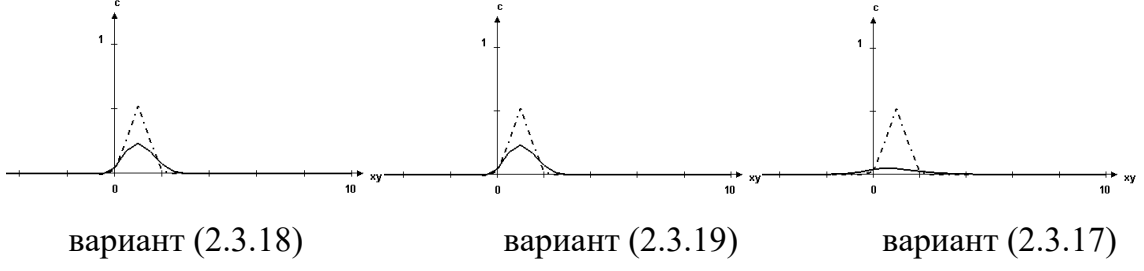
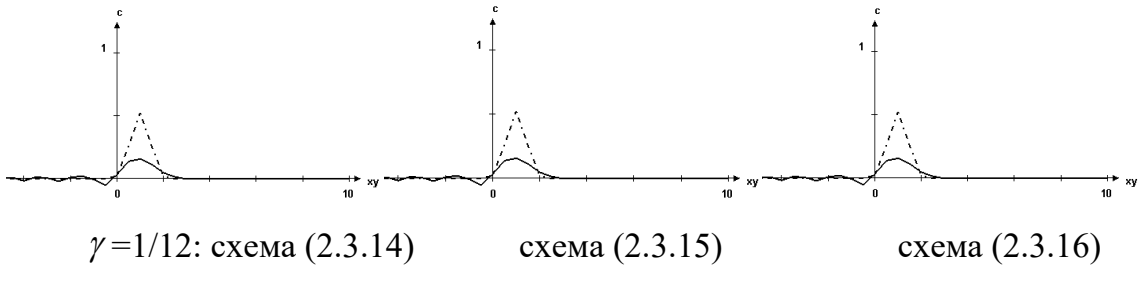
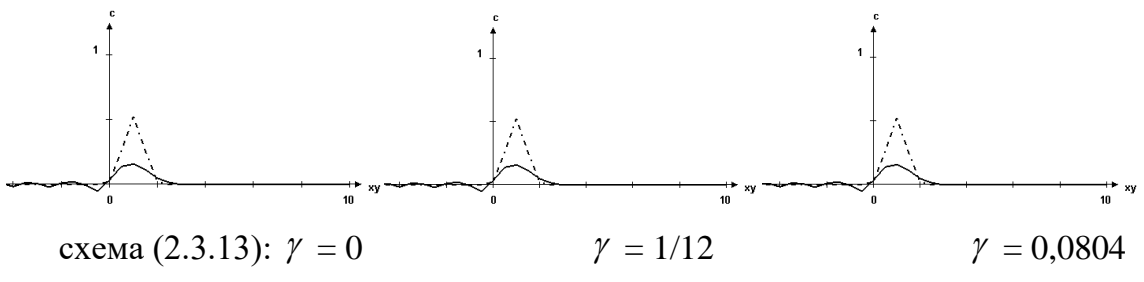
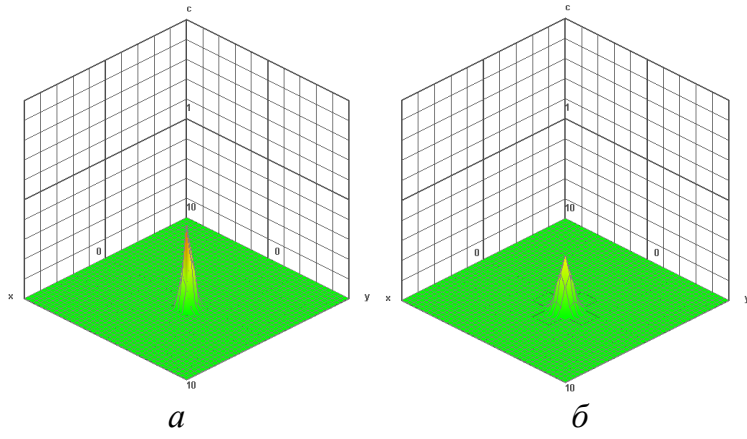


Рисунок 2.3.14 – Тестовая задача 3: *а* – начальные данные «пирамида» при  $b = 1, l = 1$  с центром в точке  $x_0 = 1, y_0 = 1$ ; *б* – аналитическое решение на момент времени  $t = 3,14$ . Далее – сечения точного решения (штриховая линия) и разностного (сплошная линия) вертикальной плоскостью, проходящей через диагонали первого и третьего квадранта плоскости  $Oxy$ , масштаб по горизонтальной оси  $1:\sqrt{2}$

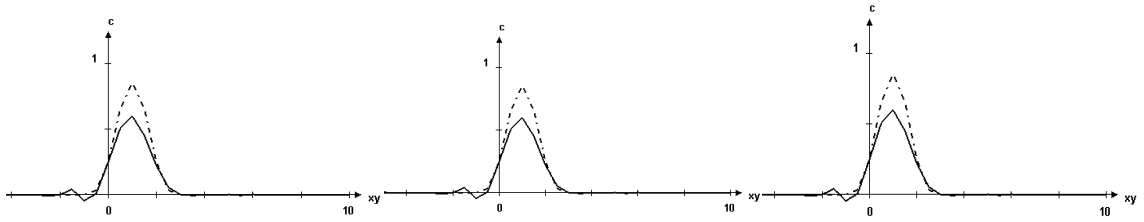
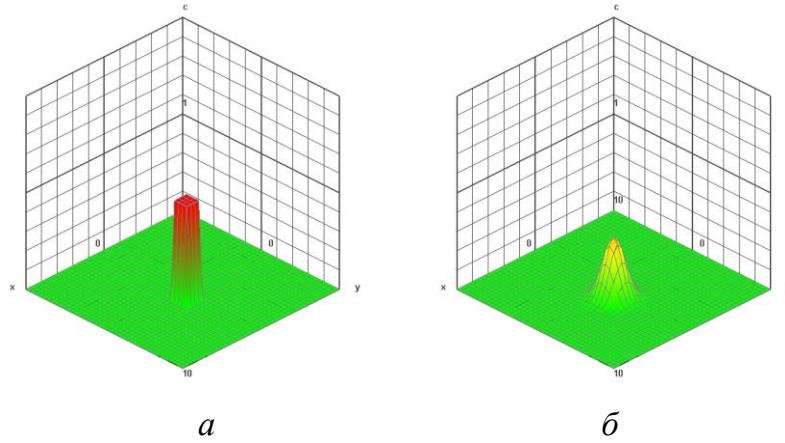
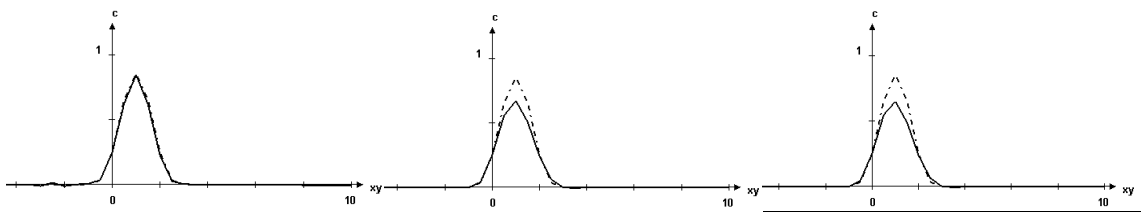


схема (2.3.13):  $\gamma = 0$

$\gamma = 1/12$

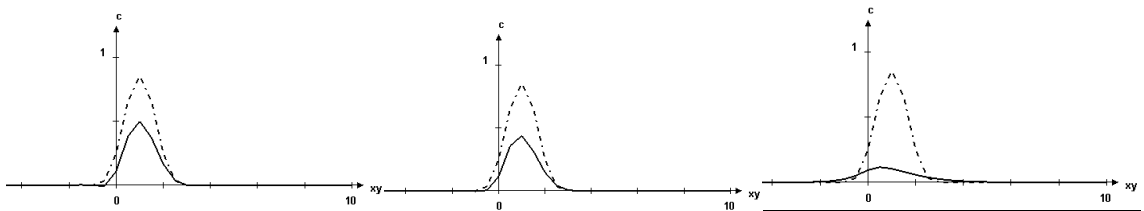
$\gamma = 0,0804$



$\gamma = 1/12$ : схема (2.3.14)

схема (2.3.15)

схема (2.3.16)



вариант (2.3.18)

вариант (2.3.19)

вариант (2.3.17)

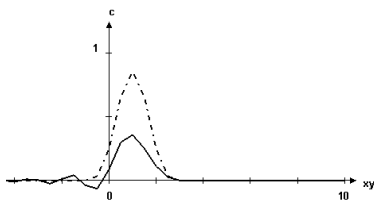


схема (2.3.22)

Рисунок 2.3.15 – Тестовая задача 4: *а* – начальные данные «помост» при  $b = 1, l = 1$ ; *б* – аналитическое решение на момент времени  $t = 3,14$ . Далее – сечения точного решения (штриховая линия) и разностного (сплошная линия) вертикальной плоскостью, проходящей через диагонали первого и третьего квадранта плоскости  $Oxy$ , масштаб по горизонтальной оси  $1:\sqrt{2}$

Таблица 2 – Абсолютные ошибки разностных решений в двумерном случае

	Ошибка $e$		
	Тестовая задача 2	Тестовая задача 3	Тестовая задача 4
	Двумерное распределение Гаусса (2.3.29)	Пирамида (2.3.27)	Двумерный помост (2.3.31)
1. Схема (2.3.13), $\gamma = 0$	0,155	0,368	0,2
2. Схема (2.3.13), $\gamma = 1/12$	0,155	0,368	0,2
3. Схема (2.3.13), $\gamma = 0,0804$	0,155	0,368	0,2
4. Схема (2.3.14), $\gamma = 1/12$	0,031	0,239	0,031
5. Схема (2.3.15), $\gamma = 1/12$	0,067	0,315	0,099
6. Схема (2.3.16), $\gamma = 1/12$	0,066	0,316	0,112
7. Схема (2.3.17)	0,323	0,478	0,533
8. Двумерный аналог схемы (2.3.18)	0,051	0,291	0,248
9. Двумерный аналог схемы (2.3.19)	0,075	0,319	0,292
10. Схема (2.3.22)	0,150	0,364	0,334

Для представленной системы тестов в двумерном случае наилучшие результаты получаются для схемы (2.3.14).

Схема (2.3.17) дает самую большую ошибку. Схемы типа предиктор-корректор с leap-frog в предикторе и аппроксимацией второго порядка первой производной по пространству дают точно такую же ошибку как схема Мак-Кормака на тестовых задачах 2 и 3.

## 2.4. Расчеты в модели ROMS

Одним из самых интересных явлений в озерах являются внутренние волны, изучению которых посвящены многочисленные теоретические, натурные и численные исследования. Теоретические исследования, которые позволяют выяснить условия прохождения и форму внутренней волны, начались в позапрошлом веке. Здесь отметим монографию Г. Ламба [52], впервые изданную в 1879 г. и до сих пор не потерявшую своей актуальности. Большинство результатов этой работы связано с исследованием волн в однородной жидкости, но в дальнейшем эти результаты использовались и для неоднородной. Монография П. Ле Блона [53], полностью посвященная волнам в океане, появилась век спустя. Натурные и теоретические исследования представлены в монографии советского исследователя Ю. З. Миропольского [55]. Одной из последних монографий в которой исследуются внутренние волны в озерах является монография К. Hutter, Y. Wang, I. P. Chubarenko [89].

Установлено, что передача механической энергии от ветра вниз к мелкомасштабным движениям в стратифицированном озере начинается с движений масштаба бассейна [92]. Внутренние волны масштаба бассейна переносят энергию, вносимую ветрами, в придонный пограничный слой [134], вызывают ресуспензию осадков (перераспределение ранее отложившихся частиц осадков в толще воды за счет гидродинамического воздействия) [84, 88], усиливают массоперенос на границе раздела осадок-вода [110]. Области акваторий, где эти эффекты важны, определяются в основном пространственной структурой внутренних волн, которые, в свою очередь, довольно специфичны для каждого озера [56].

Большое количество работ посвящено исследованию этих процессов в конкретных водоемах.

В ранней работе G. T. Csanady [76] представлены аналитические решения для волн масштаба озера в случае двухслойной стратификации. Рассматривается круговой цилиндр с ровным дном, используется приближение гидростатики. В этом случае возможно появление субинерционных волн Кельвина (частота колебаний

меньше инерционной), распространяющихся в северном полушарии так, что береговая линия остается справа, и суперинерционных волн Пуанкаре (частота колебаний больше инерционной). В качестве приложения рассматривается течение в Великих озерах (США).

В работе [78] автор продолжает исследование течений в Великих озерах (США) с учетом постоянного и переменного ветра.

В работе [77] рассматривается случай, когда длина бассейна намного больше его ширины и находится аналитическое решение в случае двухслойной стратификации. На основе полученного аналитического решения проведен анализ течений в озере Онтарио.

В [124] рассматривается та же система уравнений, что и в [76], с сохранением контура береговой линии озера Онтарио, но ровным дном. Численно рассчитываются волны Кельвина и Пуанкаре.

В работе [72] проводится численное моделирование волн Кельвина в стратифицированных озерах с использованием POM (Princeton Ocean Model) и DIECAST (Dietrich/Center for Air Sea Technology). Обе системы моделирования реализуют трехмерную модель течения в приближении Буссинеска и предположении о гидростатичности давления, в первой используется вертикальная система  $\sigma$ -координат, во второй – обычные  $z$ -координаты. В этих системах моделирования применяются различные модели турбулентности и уравнения состояния. Авторов интересует эффект появления на поверхности озера Мичиган термальных фронтов вблизи восточного берега при действии сильного северного ветра, которые после прекращения воздействия ветра движутся циклонически (против часовой стрелки в северном полушарии) как это свойственно внутренним волнам Кельвина. Обе системы моделирования показали качественно согласованные результаты для решений модельных задач в цилиндрических бассейнах с ровным и параболическим дном, так и для решений при расчете с цифровой батиметрией для озера Мичиган.

В следующих работах [95, 122] авторы используют натурные измерения температуры и скорости для пресного озера Бива (Япония).

Озеро Бива является крупнейшим озером Японии и расположено на главном острове Хонсю. В 1982 – 1993 годах были собраны данные натуральных наблюдений температуры и скорости (с использованием приборов серии ADCP [93]), данные метеорологических наблюдений.

В работе [95] излагаются результаты теоретических исследований с применением численной модели двухслойной жидкости, представленной в [76]. Расчеты проводятся в расчетной области с береговой линией озера Бива и ровным дном.

Периоды измерений в озере Бива в 1992 и 1993 годах были выбраны так, чтобы совпасть с сезоном тайфунов. После прохождения тайфуна были зафиксированы вертикальные отклонения термоклина величиной до 40 м.

Объединение теоретических исследований, натуральных наблюдений и численных расчетов позволило исследовать внутренние волны в различных озерах, таких как Боденское (Альпы), [68]; Кинерет (Израиль) [135, 67, 66]; Biwa (Япония) [95, 122, 133]; Великие озера [76, 72], Женевское озеро [101], озера Эри [138] и Бальдегг [102].

#### 2.4.1 Методические расчеты

Для исследования характера течений в озере Шира была проведена серия численных расчетов в системе моделирования ROMS с использованием батиметрии озера Шира, распределения температуры и солености, типичной для озера Шира в летний период, нулевых начальных скоростей и возвышения свободной поверхности, различных ветровых сценариев.

Расчеты проведены при следующих значениях параметров: шаги по горизонтали  $\Delta x = 15$  м,  $\Delta y = 20$  м, по вертикали  $\Delta z = 1$  м, применялись методы распараллеливания OpenMP, MPI. Коэффициент придонного трения  $k_b = 10^{-4}$  м/с, коэффициент горизонтального турбулентного обмена  $K_h = 2$  м<sup>2</sup>/с.

Использовалось линейное уравнение состояния и KPP-параметризация турбулентного вертикального перемешивания [100].



Были проанализированы следующие ветровые сценарии:

1. Мгновенно начинающийся постоянный ветер, который мгновенно заканчивается.
2. Ветер, который линейно возрастает до максимального значения, в течение некоторого времени сохраняет постоянное значение и линейно убывает.
3. Ветер синусоидально возрастает до максимального значения и также убывает.

В случае западного, юго-западного, северо-западного и северного направлений ветра возникают сейшевые колебания. На рисунке 2.4.1 показаны сейшевые колебания, возникающие после воздействия восьмичасового юго-западного ветра, при этом максимальные отклонения свободной поверхности достигаются на двух противоположных берегах озера (на северо-западном и юго-восточном берегах).

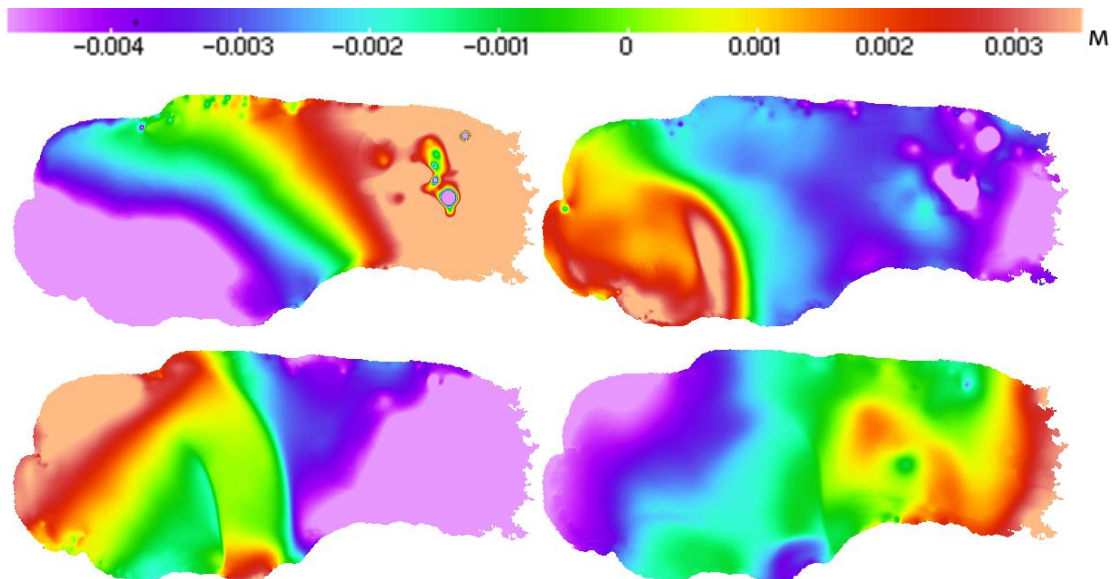


Рисунок 2.4.1 – Возвышение свободной поверхности. Колебания после прекращения действия восьмичасового юго-западного ветра со скоростью 8 м/с



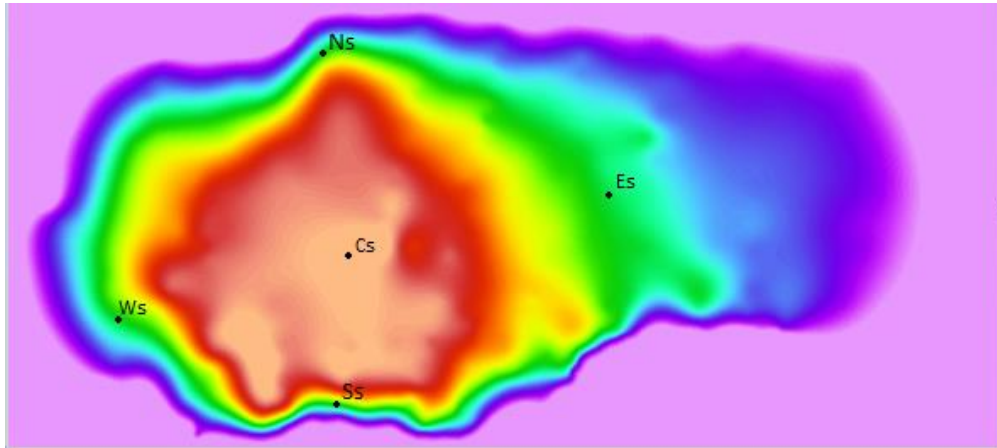


Рисунок 2.4.2 – Батиметрия озера Шира. Точки, в которых построены изотермы и изогалины: Ss – южная, Ns – северная, Es – восточная, Ws – западная, Cs – центральная

Известно, что незначительным колебаниям свободной поверхности отвечают существенные колебания изотерм и изогалин (линии одинаковой солености), например, [101].

В центральной точке озера наблюдаются незначительные колебания изотерм и изогалин, в восточной и западной точках колебания достигают трех метров по глубине (рисунок 2.4.3).

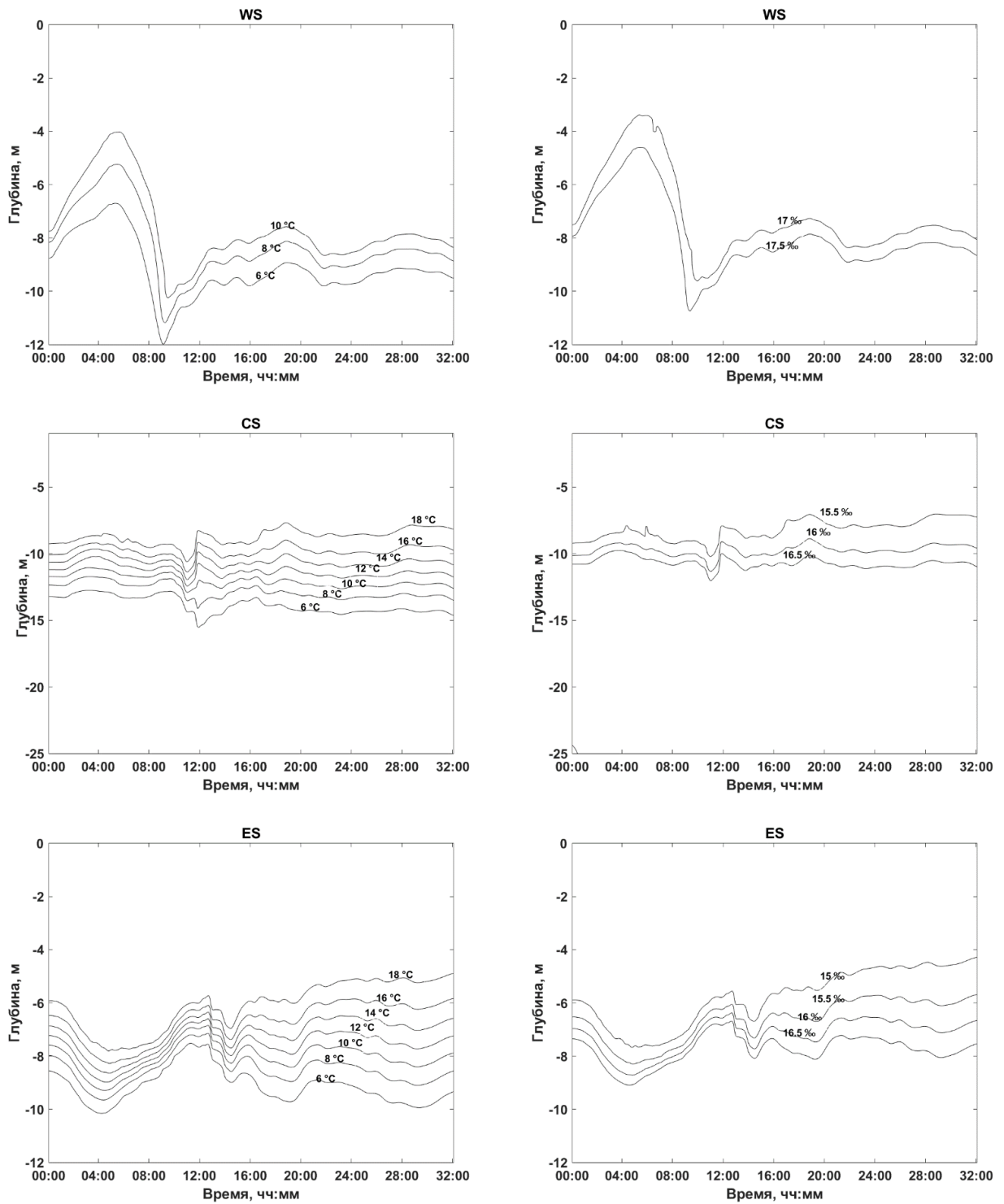


Рисунок 2.4.3 – Колебания изотерм и изогалин в случае воздействия юго-западного ветра со скоростью 8 м/с в течение 8 часов, далее 24 часа – без ветра. Слева – изотермы, справа – изогалины. Сверху вниз: WS – западная часть озера, CS – центральная, ES – восточная

После остановки ветра в случае мгновенно начинающегося и мгновенно заканчивающегося постоянного ветра северо-восточного, юго-восточного, восточного и южного направлений, при скорости 8–10 м/с в течение 8 часов визуально наблюдается колебания свободной поверхности с вращением против часовой стрелки с периодом 11 и/или 6 часов, и максимальные отклонения свободной поверхности достигаются на противоположных берегах бассейна. Свободная поверхность также подвергается колебаниям меньшего масштаба. На рисунке 2.4.4 показаны колебания свободной поверхности с периодом 11 часов, возникающие после прекращения действия северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с.

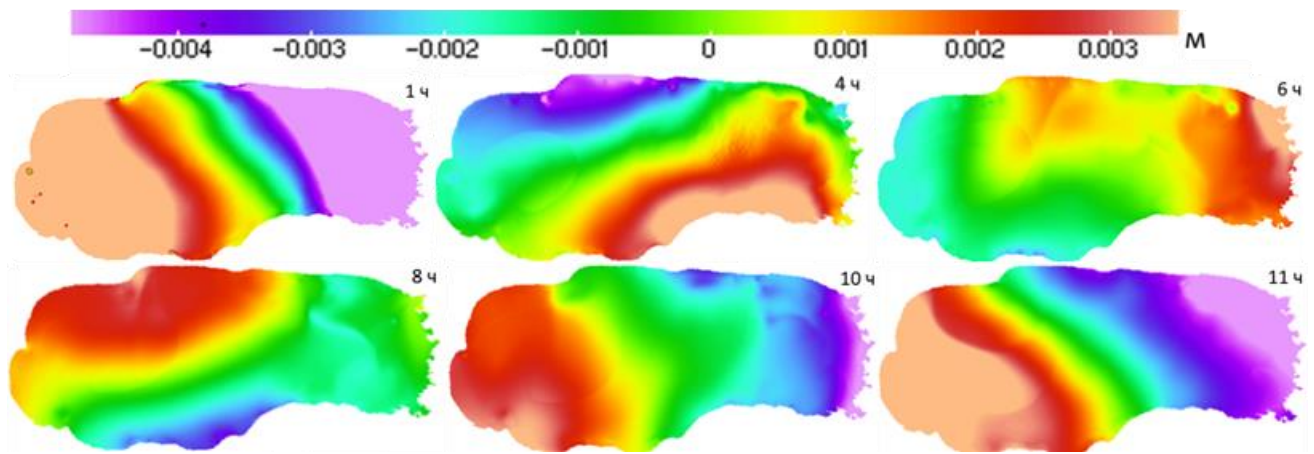


Рисунок 2.4.4 – Возвышение свободной поверхности. Колебания после прекращения действия восьмичасового северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с

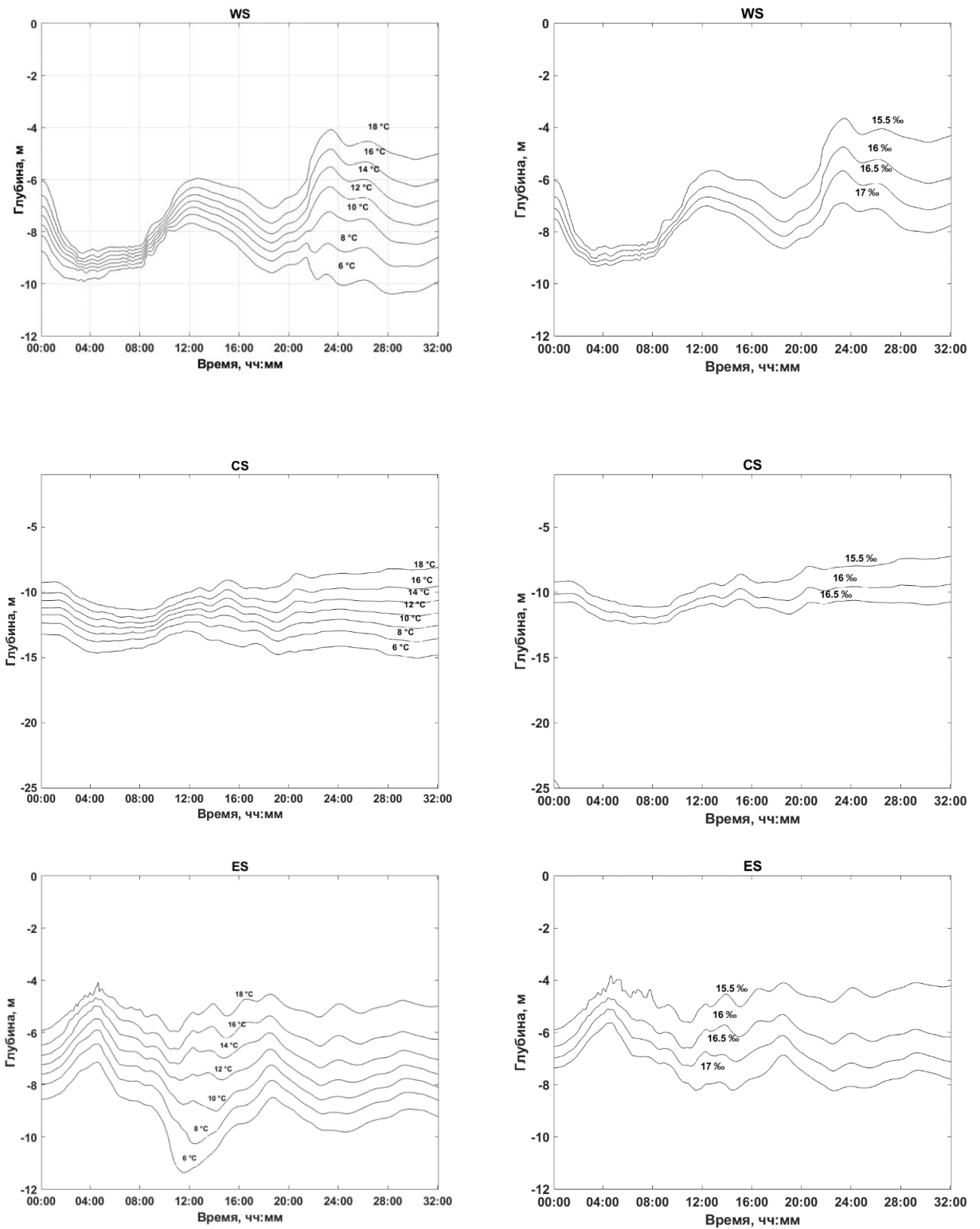


Рисунок 2.4.5 – Колебания изотерм и изогалин в случае воздействия северо-восточного ветра со скоростью 8 м/с в течение 8 часов, далее 24 часа – без ветра. Слева – изотермы, справа – изогалины. Сверху вниз: WS – западная часть озера, CS – центральная, ES – восточная

Наличие в озере колебаний изотерм до пяти метров подтверждается натурными данными. В изотермах, построенных по натурным наблюдениям (рисунок 2.4.6), во время прохождения внутренней волны также наблюдаются колебания с размахом от трех до пяти метров.

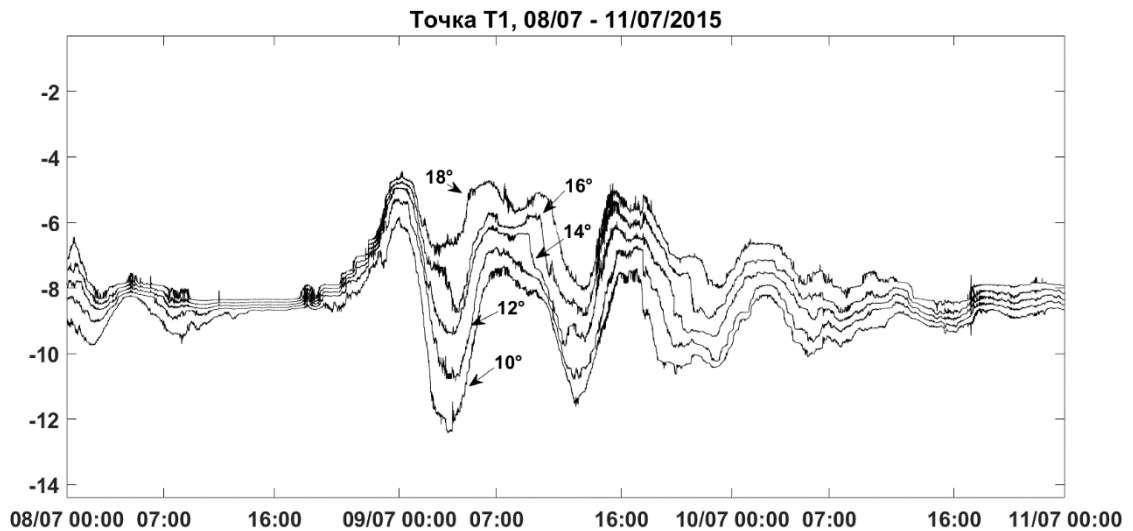


Рисунок 2.4.6 – Изотермы за период 08.07-11.07.2015,  $T=10^{\circ}, 12^{\circ}, 14^{\circ}, 16^{\circ}, 18^{\circ}\text{C}$  в географической точке Т1

#### 2.4.2 Расчеты с метеорологическими данными

В настоящем пункте приводятся результаты проведенных впервые сезонных расчетов для озера с учетом реальных метеорологических данных, таких как температура и влажность воздуха, ветер, осадки. Использовались данные с метеостанции пос. Шира.

Ветровая картина на озере Шира 06.07.2018 – 31.07.2018 представлена на рисунке 2.4.7.

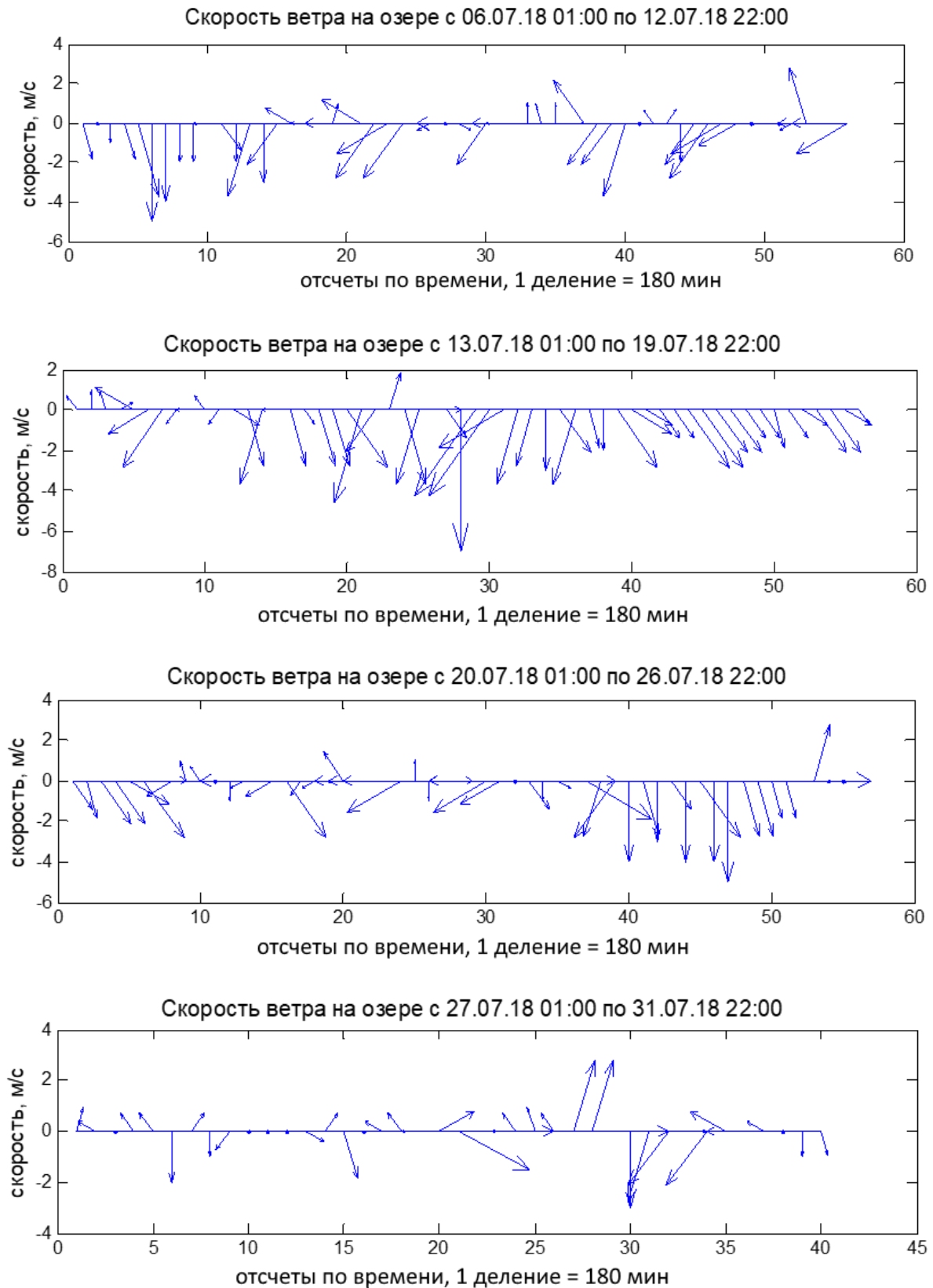


Рисунок 2.4.7 – Данные ветрового воздействия с метеостанции пос. Шира, 06.07.2018 – 31.07.2018

Начало моделируемого процесса 01.06.2018, окончание 31.08.2018. Картина течения на 13.07.2018 в 2 часа ночи, в 6 и в 8 часов утра представлена на рисунке 2.4.8.

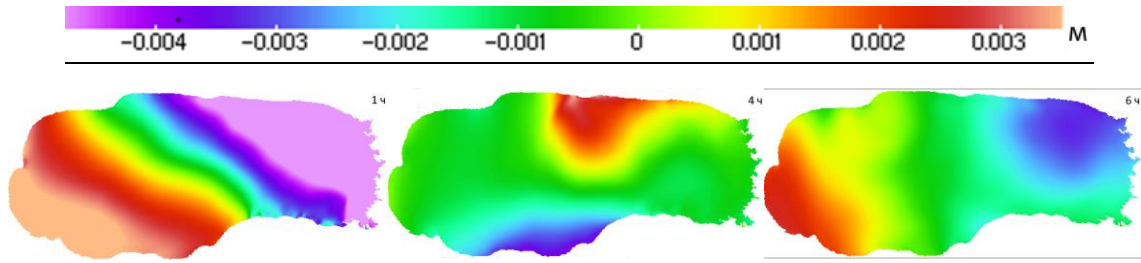


Рисунок 2.4.8 – Возвышение свободной поверхности

Визуально определяется вращение свободной поверхности, период прохождения внутренней волны составляет  $\approx 7$  часов (рисунок 2.4.8).

В период прохождения внутренней волны наблюдалось уменьшение температуры в восточной мелководной зоне водоема. После прохождения – температура в мелководной зоне увеличивалась (рисунок 2.4.9).

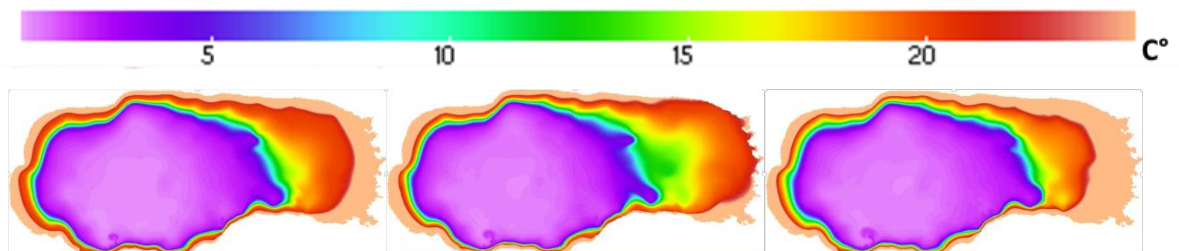


Рисунок 2.4.9 – Температура в придонном слое,  $^{\circ}\text{C}$ . Слева направо: распределение температуры до прохождения внутренней волны, в момент прохождения, после прохождения

## 2.5. Спектральные оценки

Результаты спектрального анализа горизонтальных скоростей, полученные по результатам численного моделирования, сравнивались со спектрами скоростей натуральных измерений

Измерения скорости в озере Шира проводились в летний период 2009 – 2018 гг. с помощью акустических доплеровских профилографов течения (ADCP) Work Horse Sentinel 600 и 1200 кГц фирмы R. D. Instruments, позволяющих



проводить непрерывный мониторинг гидрофизических параметров по всей глубине. Используемые приборы и методы измерений приведены в Приложении 1.

В настоящем пункте представлены результаты спектрального анализа скорости для долговременных измерений, выполненных в июне-июле 2014–2015 гг. в двух географических точках, глубина озера в которых составляют 11 м и 14,5 м.

Для нахождения спектральных оценок были выбраны ряды восточной  $u$  и северной  $v$  составляющих трехмерной скорости течения на глубине 2,6 м и 7,6 м, усредненные раз в полчаса. При построении графиков спектральной плотности мощности использовался метод модифицированных периодограмм Уэлча [146] с различными весовыми функциями (Хэмминга, Ханна, Блэкмена-Харриса, Кайзера). Длина окна выбиралась так, чтобы с учетом заданного перекрытия сигнал был разделен на 8 фрагментов. Перекрытие задавалось равным половине длине окна. Для определения показателей качества оценки спектральной плотности мощности были вычислены среднее квадратичное отклонение и добротность данной оценки. С учетом этих показателей для построения спектральной плотности мощности составляющих скоростей течения  $u$  и  $v$  было выбрано окно Блэкмена-Харриса. Графики спектральных оценок представлены в логарифмической шкале на рисунках 2.5.1 и 2.5.2.

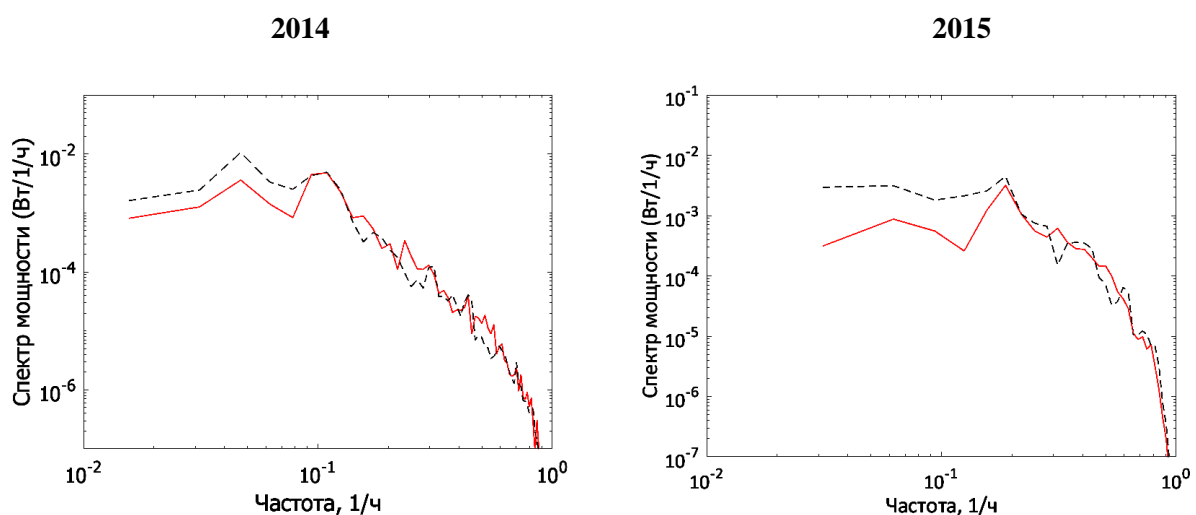


Рисунок 2.5.1 – Спектр мощности для восточной (черная штриховая линия) и северной компонент скорости (красная сплошная линия), глубина 7,6 м, ADCP 600 kHz

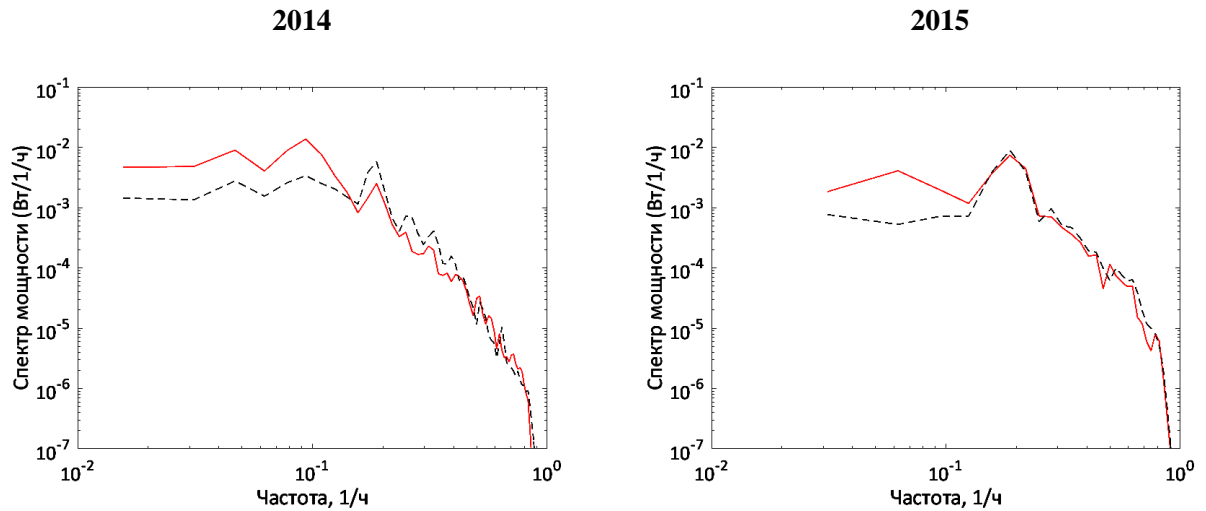


Рисунок 2.5.2 – Спектр мощности для восточной (черная штриховая линия) и северной компонент скорости (красная сплошная линия), глубина 7,6 м, ADCP 1200 kHz

Спектральные оценки для горизонтальных скоростей, полученные в результате расчетов с использованием модели ROMS для летнего периода с 13.07.2018 по 31.07.2018, были также найдены методом модифицированных периодограмм Уэлча (рисунок 2.5.3).

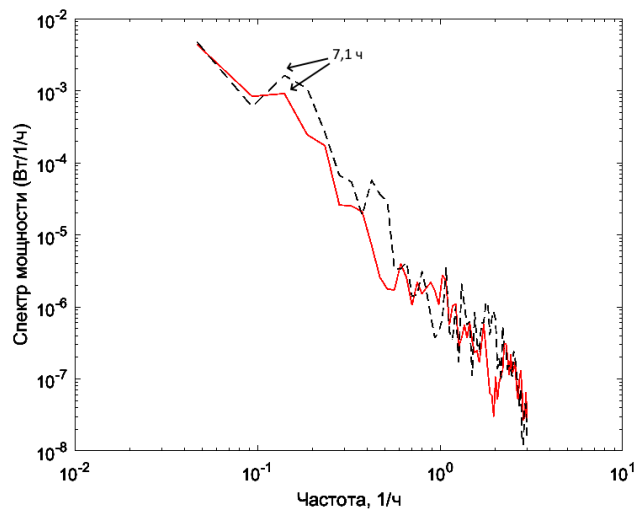


Рисунок 2.5.3 – Спектры мощности, полученные путем анализа результатов численных расчетов, выполненных с использованием модели ROMS для летнего периода с 13.07.2018 по 31.07.2018. Восточная компонента скорости – черная штриховая линия, северная компонента – красная сплошная линия, глубина 7,6 м

Спектральный анализ показал, что внутренняя волна с периодом  $\approx 7$  часов наблюдается как в натуральных измерениях скорости, так и в результатах численных расчетов.

Зимой 2014–2015 гг. впервые за последние сто лет наблюдалось явление полного перемешивания воды, что было зафиксировано измерениями химического и биологического состава воды.

Исследование распределения фитопланктона (по флуоресцентному сигналу на длинах волн поглощения и эмиссии хлорофилла) показало существенные различия между измерениями 2014 и 2015 годов. В 2014 году распределение фитопланктона было аналогично распределению в предыдущие года с максимумом концентрации микроводорослей в гипolimнионе (слой водной толщи ниже термоклина) (Gaevskiyetal, 2002). Однако в 2015 году флуоресцентный сигнал в эпи- и металимнионе (слой водной толщи в пределах которого температура летом резко падает) был сопоставим с сигналом гипolimниона в центральной части озера (рисунок 2.5.4).

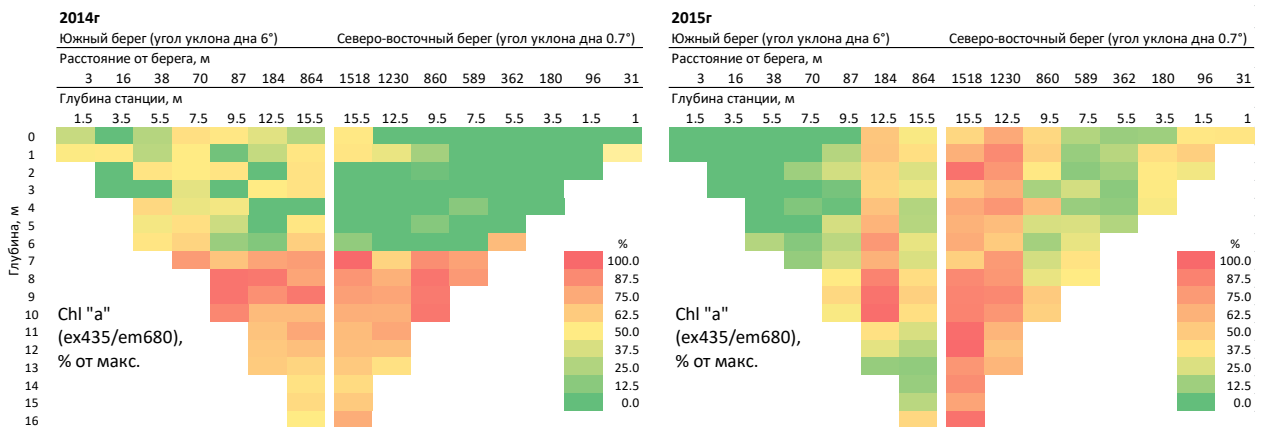


Рисунок 2.5.4 – Распределение флуоресцентного сигнала в озере Шира в 2014 г. и 2015 г. на длинах волн поглощения и эмиссии хлорофилла «а». Сигнал нормирован на максимальное значение. Рисунок предоставлен с.н.с. ИБФ СО РАН Толмеевым А.П.

Распределения численности *Gammaurus lacustris* (семейство высших раков) в 2014 и 2015 годах имели кардинальные различия (рисунок 2.5.5).

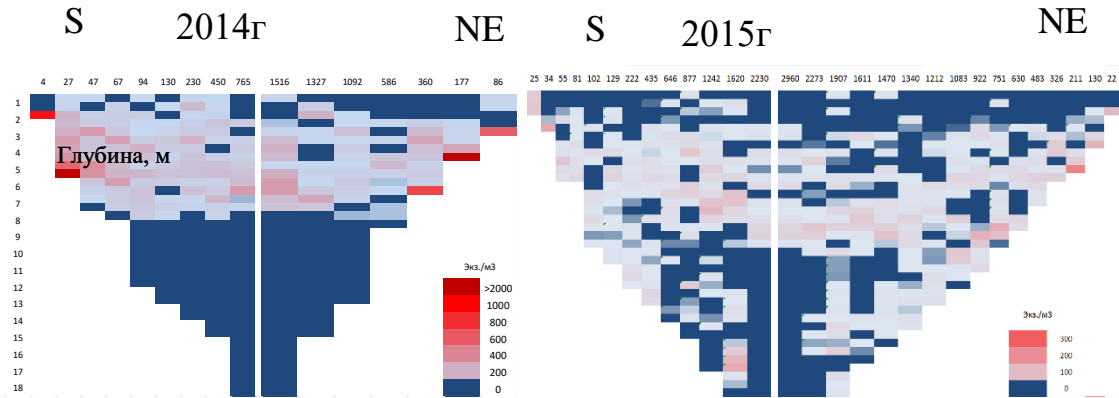


Рисунок 2.5.5 – Распределение численности *Gammarus lacustris* (экз./м<sup>3</sup>) в толще воды озера Шира у южного (S) и северо-восточного (NE) берега 19.07.2014 и 13.07.2015. Рисунок предоставлен с.н.с. ИБФ СО РАН Толмеевым А.П.

Если в 2014 году *Gammarus lacustris* преобладал на южном берегу и не распространялся глубже 8 м, то в 2015 году не наблюдалось ярко выраженных скоплений *Gammarus lacustris* в зонах берегового примыкания термоклина. Придонная зона обитания *Gammarus lacustris* увеличилась до глубины 18 м.

С другой стороны, спектральный анализ горизонтальной скорости течения показал, что энергонесущие максимумы восточной и северной составляющих течения в 2015 году существенно не изменились по сравнению с 2014 годом и составляют примерно – 21, 11, 7 часов. Таким образом, спектры течения являются устойчивой характеристикой озера.

Не изменились и средние значения модуля скорости течения: в зависимости от глубины они менялись от 2,15 до 4,24 см/с (см. Таблицы 3–4 Главы 3).

## 2.6. Заключение по Главе 2

1. Проведена полная адаптация численной модели ROMS к расчету течений в озере Шира.
2. Представлен метод построения цифровой батиметрии дна по пространственно-разбросанным данным измерений глубин, основанный на

бигармонической сплайн-интерполяции с предварительной обработкой значений измеренных глубин, который позволяет построить непрерывно-дифференцируемое поле.

3. Выявлены особенности разностных алгоритмов для уравнения переноса-диффузии, применяемых в ROMS, показавшие преимущество разностных аппроксимаций четвертого порядка для членов адвекции.
4. Представлены результаты методических расчетов с учетом переменного ветра и расчеты с учетом натуральных данных за весь летний период. Выявлена зависимость характера появляющихся внутренних волн от силы и направления ветра. Показано, что амплитуды внутренних волн, полученные при обработке данных натуральных измерений скорости течения и результатов численных расчетов, хорошо совпадают.
5. Представлены спектральные оценки скоростей течения, показавшие наличие одинаковых частот в данных натуральных измерений и в результатах численных расчетов. Сравнение спектров измеренных скоростей течения в летние периоды 2014 и в 2015 годов – до и после потери озером свойства меромиктичности – показало, что спектры являются устойчивой характеристикой озера.

### **ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ДАННЫХ НАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ОЗЕРЕ ШИРА МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

Интенсивное изучение динамики течений в замкнутых водоемах прежде всего связано с тем, что течения определяют распределение примеси и биогенных элементов, которые оказывают значительное влияние на качество воды.

В течение длительного периода в Институте биофизики СО РАН на базе научного стационара проводятся исследования экосистемы озера Шира. При этом данных о характере гидрофизических процессов, таких как, например, скорости течения, практически не было. Впервые измерения трехмерной скорости были проведены только в 2009 году [43] совместно с Институтом вычислительного моделирования СО РАН и при непосредственном участии автора. В дальнейшем измерения проводились регулярно [45, 117, 11, 39, 85, 141].

Измерения проводились с помощью двух акустических доплеровских профилографов течений (ADCP 600 kHz и 1200 kHz), которые позволяют измерять трехмерные скорости течения вдоль всего столба жидкости и широко применяются для исследования течений в океанах, морях, реках и озерах [32, 118]. Долговременные (в течение 1,5 месяцев) измерения скорости течения были проведены в летний период 2014–2015 гг., что позволило получить уникальную информацию о характеристиках и изменчивости скорости течения в выбранных географических точках.

В это же время проводились измерения температуры, позволяющие определить наличие и вид стратификации в озере Шира. Обработка и анализ данных измерений температуры, проведенных в 2013–2015 гг., позволили определить время возникновения и периоды внутренних волн.

Температура и скорость в озере имеют сложную пространственно-временную структуру в силу турбулентности характера течения.

Одним из методов обработки данных, позволяющих проанализировать такие процессы, является метод главных компонент или эмпирических ортогональных функций (ЭОФ). Суть метода заключается в том, чтобы представить данные, зависящие от времени и пространства, в виде конечной суммы слагаемых различного масштаба. В ряде случаев этим слагаемым удается придать физический смысл и, тем самым, объяснить происходящие процессы. Теоретическое обоснование метода ЭОФ в общем случае относится к прошлому веку [109, 57, 144, 94, 115, 65]. Два обзора [115, 87] определяют место метода главных компонент в системе методов обработки данных.

Первой статьей, в которой предложено применять разложение в виде суммы конечного числа слагаемых к анализу процессов в метеорологии, считается статья E. N. Lorenz [109]. В статье J. M. Wallace [144] приводится теоретическое обоснование метода ЭОФ, а в [143] авторы применяют этот метод для анализа распределения тропических волн. В работе J. C. Alishouse [65] метод ЭОФ применяется для анализа структуры вертикального распределения температуры. После появления комплексного варианта метода ЭОФ (J. M. Kaihatu, [94]), он стал применяться к анализу горизонтальных скоростей. Статьи [99, 112] посвящены применению этого метода для анализа течений у побережья тихоокеанского штата США Орегон и течениям в заливе Пьюджет-Саунд, в работе [94] проводится анализ поверхностных течений в Атлантическом океане вблизи мыса Хаттерс.

Актуальность метода ЭОФ подтверждается в современных исследованиях [86, 50, 82, 12], в которых этот метод используется для анализа поверхностной температуры и анализа изменения температуры в зависимости от глубины.

В настоящей главе представлены результаты обработки и анализа данных долговременных (в течение 1,5 месяцев) измерений температуры и скорости в озере Шира в летний период 2013–2018 гг. с использованием методов статистической обработки данных, в том числе метода главных компонент или эмпирических ортогональных функций [139–142, 96, 44, 19, 24].

Параграф 3.1 посвящён обработке и анализу данных измерений температуры в озере в зависимости от глубины и поверхностной температуры с помощью вещественного метода ЭОФ. В параграфе 3.2 представлен анализ долговременных (в течение 1,5 месяцев) измерений скорости с помощью комплекснозначного варианта метода ЭОФ, приведена оценка коэффициента вертикального турбулентного обмена.

### **3.1. Анализ данных измерений температуры**

В настоящем параграфе представлены данные долговременных (на протяжении 1,5 месяцев) измерений температуры, которые были обработаны и проанализированы с помощью действительного метода ЭОФ. Проведен анализ данных температуры как по глубине, так и поверхностной температуры.

#### **3.1.1. Натурные измерения температуры в озере Шира**

Измерения температуры в озере Шира проводились в летний период 2009–2018 гг. с помощью зонда (одномоментные измерения) и термисторных датчиков (долговременные измерения) на 5–10 станциях, расположенных в различных географических точках озера (рисунок 3.1.1). Долговременные измерения температуры (1–1,5 месяца) были проведены в 2013 – 2015 гг.



Рисунок 3.1.1 – Расположение станций измерения температуры, слева в 2013-2015 гг. (рисунок предоставлен с.н.с. Института биофизики СО РАН к.б.н. А. П. Толмеевым), справа – 2018 г.

Автономные температурные датчики располагались на термоплетях на расстоянии примерно 0,5–1,5 м друг от друга и измеряли с частотой 30 секунд и



точностью 0,5 °С в 2013 и 2014 годах и с точностью 0,1 °С в 2015 и 2018 годах. Измерения проводились на 23–31 горизонтах по глубине.

В результате измерений получаем данные, в которых записаны координаты места измерения, глубина горизонтов, на которых проводились измерения, и собственно данные температуры (рисунок 3.1.2).

N	E	Date	Time	0,00	0,48	1,42	2,37	2,84	3,30	3,77	4,23	4,70
54,522179	90,211041	30.05.2015	12:39:00	12,8	12,1	11,8	11,7	11,8	11,6	11,8	11,6	11,6
		30.05.2015	12:39:30	12,7	12	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:40:00	12,9	12,1	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:40:30	12,9	12	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:41:00	12,8	12	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:41:30	12,8	12	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:42:00	12,8	12	11,7	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:42:30	12,9	12	11,7	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:43:00	12,9	12	11,6	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6
		30.05.2015	12:43:30	12,9	12,2	11,7	11,6	11,7	11,6	11,7	11,6	11,6

Рисунок 3.1.2 – Пример данных измерений температуры на нескольких горизонтах по глубине в географической точке ТЗ, 2015 г.

### 3.1.2. Анализ долговременных измерений температуры методом эмпирических ортогональных функций

Для анализа методом эмпирических ортогональных функций данные для температуры  $T(z_i, t_k)$ , где  $z_i (i=1, \dots, N)$  и  $t_k (k=1, \dots, K)$  – переменные по пространству и времени соответственно, представляются в виде суммы произведений двух сомножителей, один из которых зависит от времени, а второй – от пространства [50, 82, 12, 80].

Стандартным образом определяется матрица коэффициентов корреляции

$$R(z_i, z_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K T(z_i, t_k) T(z_j, t_k),$$

из следующего равенства находятся ее собственные векторы  $\phi_n(z_i)$  и собственные значения  $\lambda_n$

$$\sum_{i=1}^N R(z_i, z_j) \phi_n(z_i) = \lambda_n \phi_n(z_j), \quad n=1 \dots N.$$

Собственные векторы удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{i=1}^N \phi_n(z_i) \phi_m(z_i) = \delta_{nm},$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронеккера. Собственные значения  $\lambda_n$  – вещественные и положительные.

Собственные векторы  $\phi_n$  называются эмпирическими ортогональными функциями или модами. Запишем поле температур  $T(z_i, t_k)$  через эти моды

$$T(z_i, t_k) = \sum_{n=1}^N E_n(t_k) \phi_n(z_i),$$

тогда модальные коэффициенты  $E_n(t_k)$ , определяющие изменение температуры во времени, выражаются следующим образом:

$$E_n(t_k) = \sum_{i=1}^N \phi_n(z_i) T(z_i, t_k), \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_n(t_k) E_m(t_k) = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Отсюда следует, что амплитуды двух различных мод не коррелируют друг с другом, а собственные значения являются средним значением общей дисперсии по времени в разных модах. Сумма всех собственных значений равна общей дисперсии:

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N T(z_i, t_k) T(z_i, t_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N E_n(t_k) E_n(t_k) = \sum_{n=1}^N \lambda_n.$$

При анализе данных методом эмпирических ортогональных функций сохраняются только первые несколько слагаемых, которые содержат значительную часть общей дисперсии, и, как следствие, такой подход приводит к значительной экономии памяти и увеличению скорости расчетов.

Проанализируем динамику распределения по глубине температуры со временем. На рисунке 3.1.3 изображены первые четыре моды и накопленная доля общей дисперсии для всех мод.

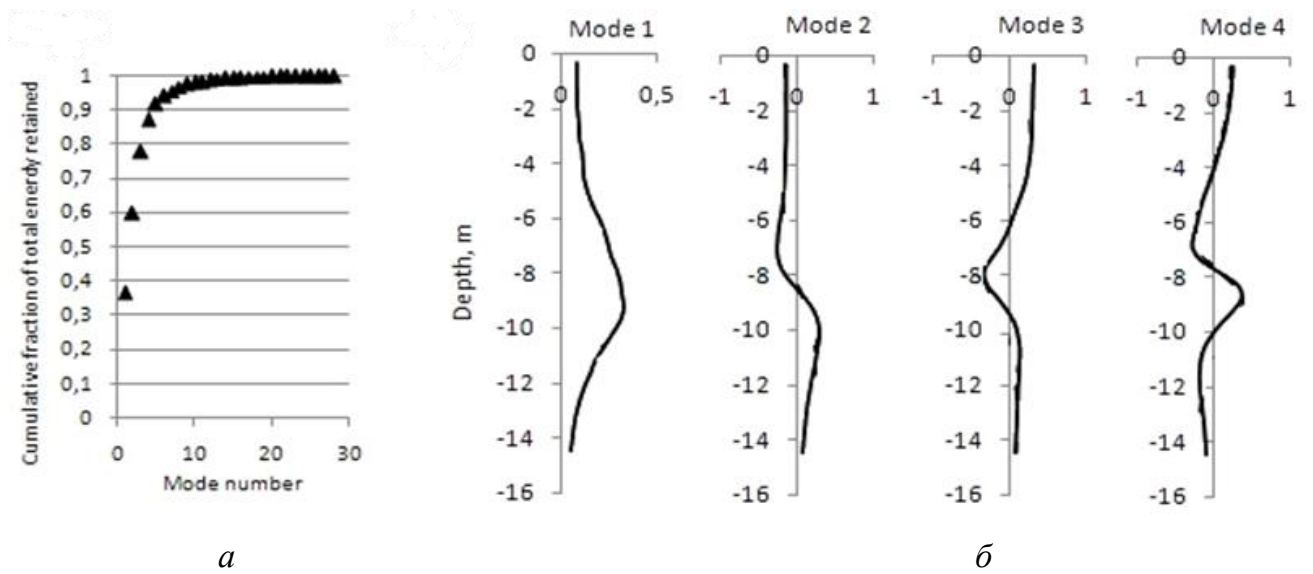


Рисунок 3.1.3 – Точка Т1, *a* – накопленная доля общей дисперсии, *б* – первые четыре моды

Первые четыре моды содержат 86% общей дисперсии (рисунок 3.1.3, *a*) и анализа этих мод достаточно для представления в целом поведения температуры (рисунок 3.1.4, *a*).

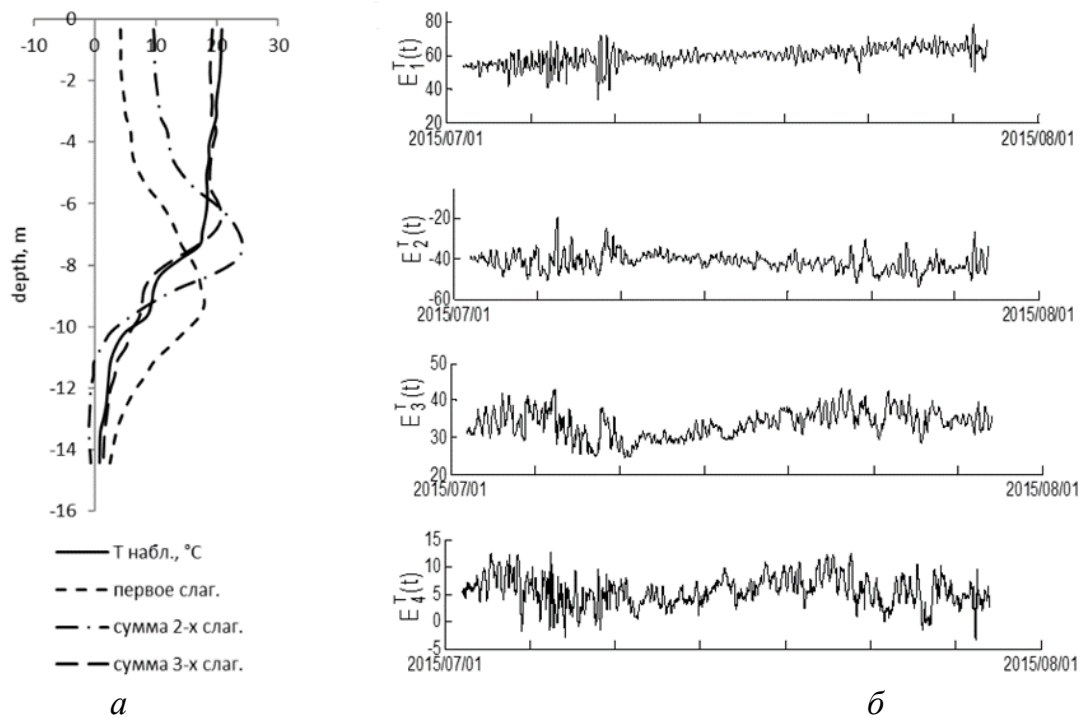


Рисунок 3.1.4 – Четыре первые моды за период измерений 01.07.2015–01.08.2015 и график температуры на 01.07.2015 (*a*), соответствующие первым четырем модам зависящие от времени коэффициенты  $E_n(t_k)$  (*б*)

Поведение модальных коэффициентов  $E_n(t_k)$ ,  $n=1,2,3,4$  показано на рисунке 3.1.3, б. Первая мода положительна по всей глубине (рисунок 3.1.3), возрастание первого модального коэффициента  $E_1(t_k)$  соответствует летнему нагреванию, а резкие колебания в период 8–11 июля 2015 г. иллюстрируют прохождение внутренних волн.

По графику изотерм, построенных в этот период (рисунок 2.4.9 в Главе 2), видно, что колебания изотерм во время прохождения внутренней волны достигают 5 м, а период составляет 7–9 часов.

Также было проведено сравнение первых мод для семи географических точек в течение одного периода времени (рисунок 3.1.5).

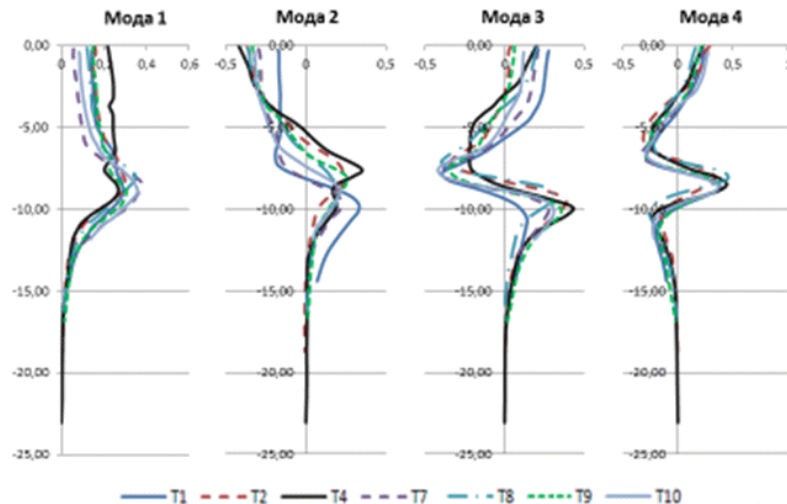


Рисунок 3.1.5 – Первые четыре моды для семи географических точек, в которых измерения проведены на протяжении периода времени 01.07.2015–01.08.2015

По рисунку 3.1.5 видно, что первые четыре моды, содержащие 85 % общей дисперсии, для семи различных географических точек измерения положительны и совпадают ниже глубины 8 м. Это свидетельствует о том, что вдоль всей акватории процессы, связанные с распределением температуры по глубине, имеют однотипный характер.

### 3.1.3. Анализ поверхностной температуры

Метод главных компонент был также применен к данным долговременного измерения температуры 27.06.2015–01.08.2015 в первых от поверхности точках.

Распределение первой моды для поверхностной температуры, содержащей 96 % общей дисперсии, показано на рисунке 3.1.6.

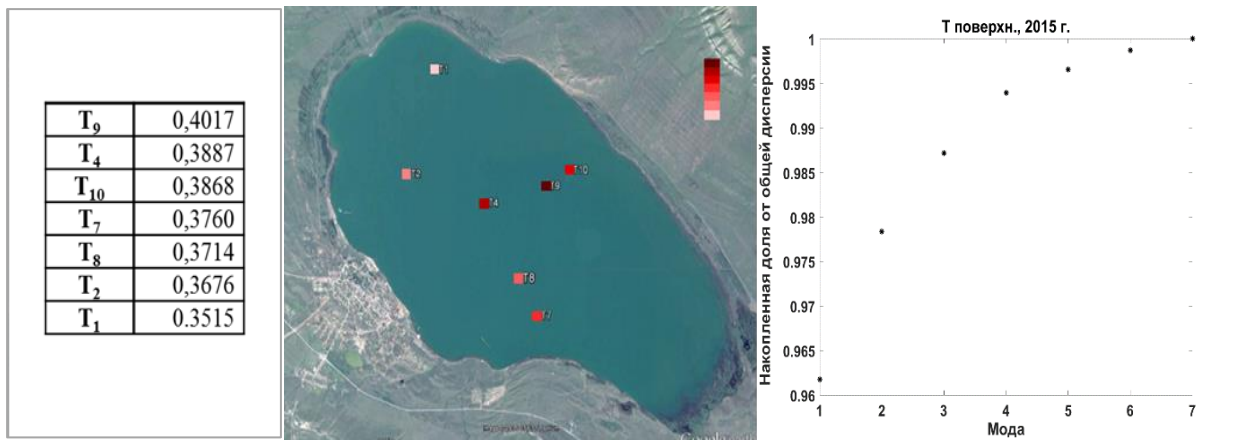


Рисунок 3.1.6 – Первая мода для поверхностной температуры – слева, накопленная доля от общей дисперсии – справа

Для сравнения заметим, что первая мода для поверхностной температуры в северо-западной части Атлантического океана [80] содержит 80 % общей дисперсии.

В результате анализа поверхностной температуры методом ЭОФ в 2013, 2015, 2018 гг. получены следующие оценки корреляции первого модального коэффициента с температурой воздуха (рисунок 3.1.7 – рисунок 3.1.9).

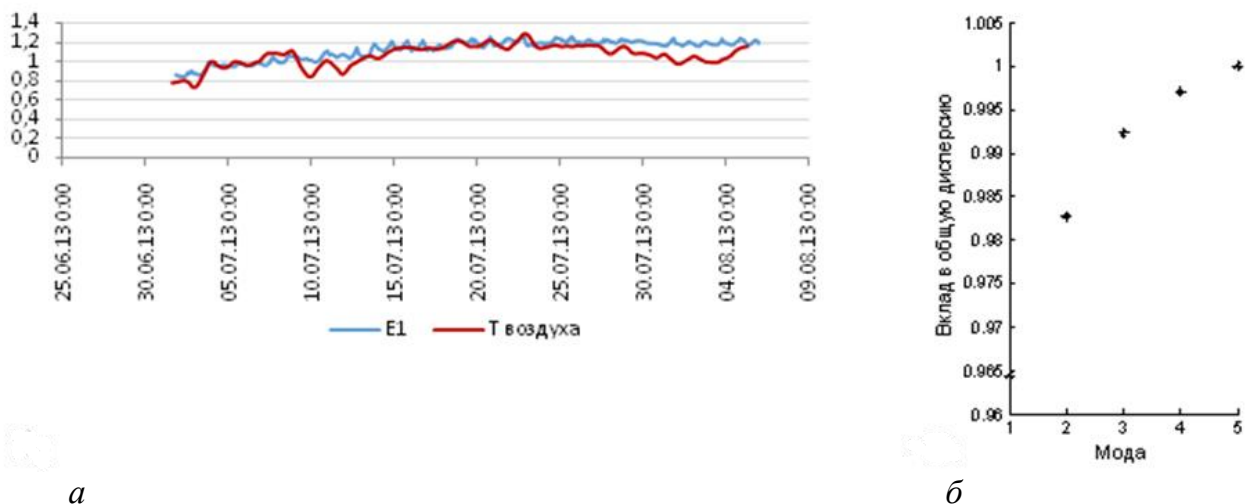
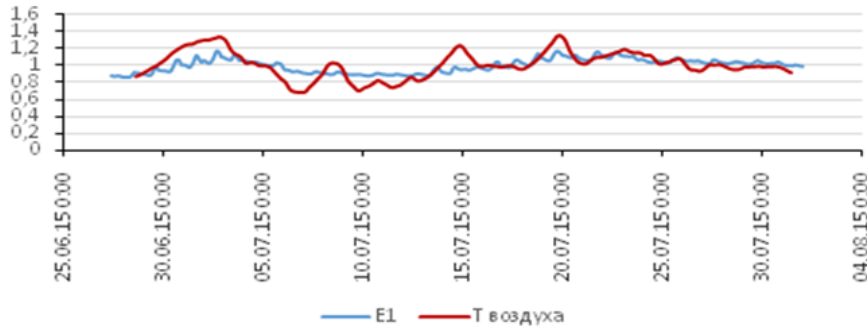
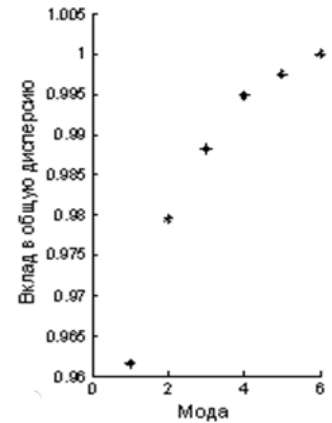


Рисунок 3.1.7 – Температура воздуха  $T$  и первый модальный коэффициент  $E_1(t_k)$ , нормированные к своим средним значениям, июль 2013 (а), вклад в общую дисперсию (б). Коэффициент корреляции  $r = 0,74$ , со сдвигом на 1,5 часа  $r = 0,74$ , на 3 часа  $r = 0,75$

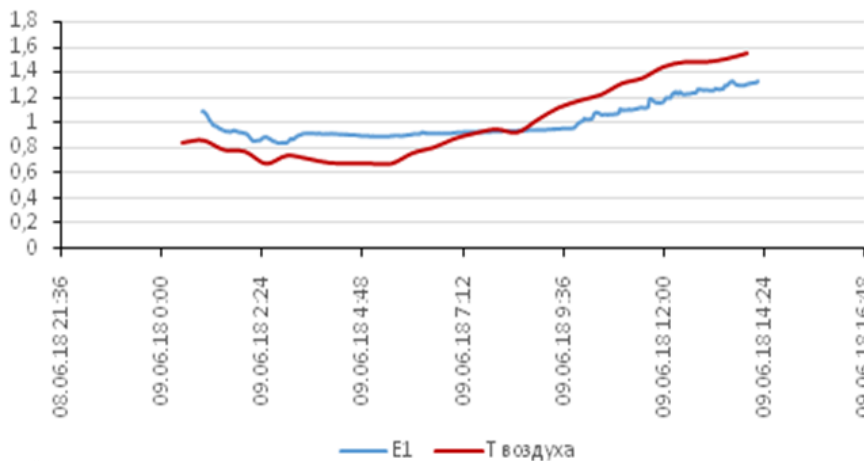


a

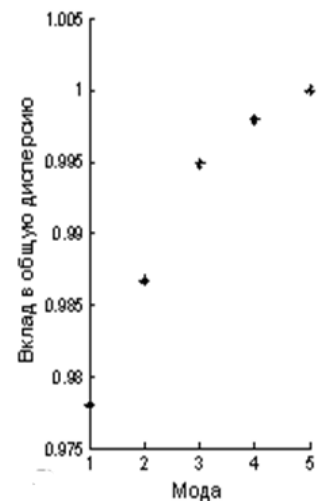


б

Рисунок 3.1.8 – Температура воздуха  $T$  и первый модальный коэффициент  $E_1(t_k)$ , нормированные к своим средним значениям, июль 2015 г. (а), вклад в общую дисперсию (б). Коэффициент корреляции  $r = 0,70$ , со сдвигом на 1,5 часа  $r = 0,74$ , со сдвигом на 3 часа  $r = 0,73$



a



б

Рисунок 3.1.9 – Температура воздуха  $T$  и первый модальный коэффициент  $E_1(t_k)$ , нормированные к своим средним значениям, июнь 2018 г. (а), вклад в общую дисперсию. Коэффициент корреляции  $r = 0,91$ , со сдвигом на 1,5 часа  $r = 0,96$ , на 3 часа  $r = 0,92$  (б)

На нагревание поверхностного слоя воды в озере влияют такие факторы, как коротковолновая и длиноволновая радиация, температура воздуха, облачность.

Проведенный анализ позволил выявить связь между температурой воды и одним из указанных факторов – температурой воздуха. Для всех трех длительных измерений температуры (2013, 2015, 2018 гг.) выявлена сильная линейная связь между первым модальным коэффициентом разложения поверхностной

температуры в ряд по эмпирическим ортогональным функциям и температурой воздуха.

### 3.2. Анализ долговременных измерений скорости

В параграфе 3.2 обсуждаются результаты натурных измерений скорости в озере Шира акустическими доплеровскими профилографами течения, проведенными автором совместно с коллегами из ИВМ СО РАН и ИБФ СО РАН. Представлены результаты анализа данных долговременных измерений скорости течения методом эмпирических ортогональных функций.

#### 3.2.1. Натурные измерения скорости в озере Шира

В 2014–2015 гг. были проведены четыре долговременных измерения (продолжительностью 1–1,5 месяца) скорости течения в озере Шира. Данные о восточной и северной компоненте скорости записывались с периодом 2 минуты.

Таблица 3 – Долговременные измерения скорости течения в озере Шира

Измерение	Прибор	Период измерений
1	ADCP 600 кГц	17.06.2014 – 30.07.2014
2	ADCP 1200 кГц	01.07.2014 – 30.07.2014
3	ADCP 600 кГц	01.07.2015 – 07.08.2015
4	ADCP 1200 кГц	01.07.2015 – 07.08.2015

Подробное описание приборов приведено в Приложении 1.

Измерения были проведены в двух географических точках глубина озера в которых составляла 11 м и 14,5 м (рисунок 3.2.1) акустическими доплеровскими профилографами течений ADCP 600 кГц и ADCP 1200 кГц по всему столбу жидкости, начиная с глубины 12,6 м и 10,4 м соответственно и заканчивая на глубине 0,6 м.



Рисунок 3.2.1 – Расположение двух профилографов ADCP 600 кГц и ADCP 1200 кГц в летний период 2014-2015 гг. в озере Шира

### 3.2.2. Анализ изменения силы и направления ветра и скорости течения

Данные величины и силы ветра получены с метеостанции пос. Шира (12 км от озера), которые представлены в свободном доступе с частотой измерения один раз в три часа, в то время как соответствующие величины с метеостанции базы ИБФ СО РАН, расположенной вблизи озера (500 м), измерялись каждые 15 минут. Для сравнения данные силы и направления ветра с метеостанции базы ИБФ СО РАН представлены также раз в три часа.

На рисунке 3.2.2 изображены сила и направление ветра по данным с метеостанции пос. Шира и с метеостанции базы ИБФ СО РАН, а также величина и направление скорости течения по измерениям приборами ADCP 600 кГц в период долговременного периода измерений летом 2015 года на нескольких ближайших к поверхности горизонтах.



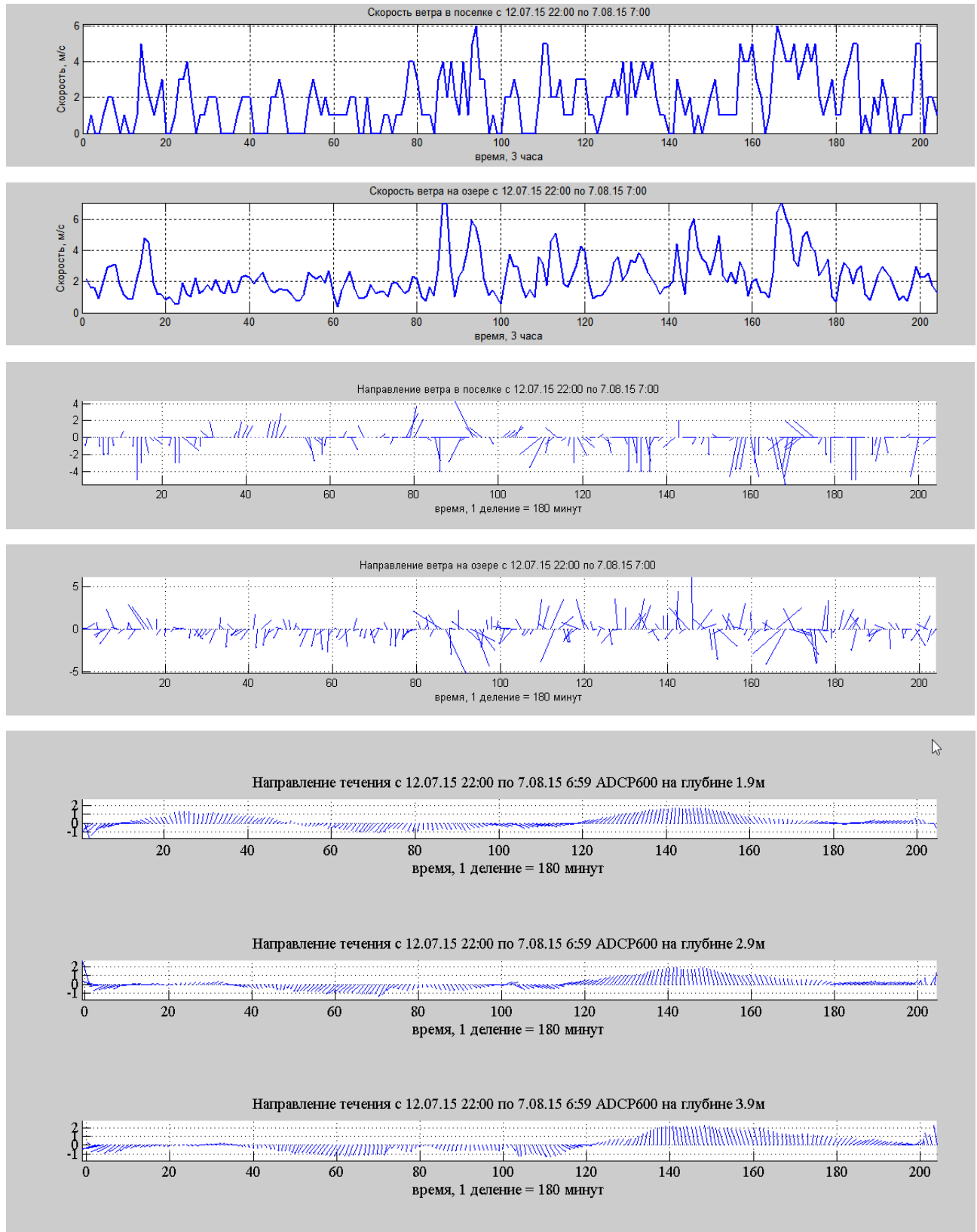


Рисунок 3.2.2 – Игольчатые диаграммы для ветра, м/с и скорости течения, см/с для длительного измерения 2015 г. (лист 1 из 2)

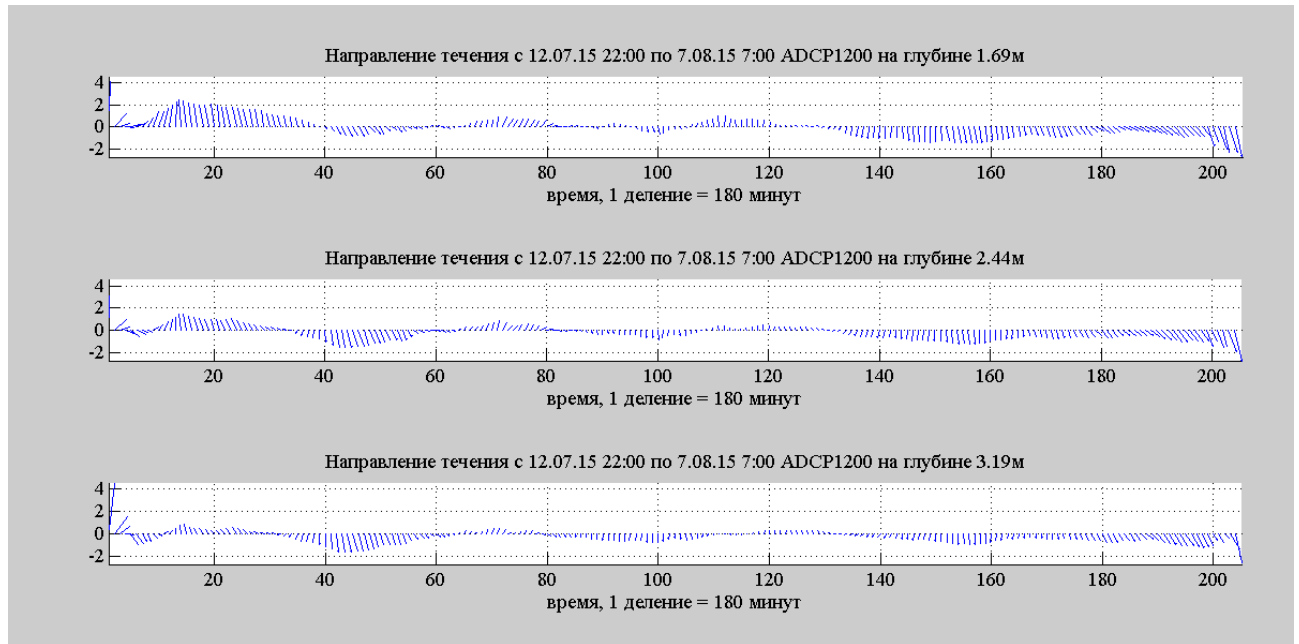


Рисунок 3.2.2 (лист 2 из 2)

Периоды максимального увеличения скорости ветра по данным с метеостанции в пос. Шира и с метеостанции базы ИБФ СО РАН, хорошо согласованы, но что касается направления, то картину течения в приповерхностном слое легче интерпретировать, если использовать частые измерения направления ветра с метеостанции базы ИБФ СО РАН. В начале периода измерений преимущественное направление ветра – северное, потом – южное, потом – опять северное. В соответствии с этим перестраивается и течение в приповерхностном слое.

В таблицах 4–5 представлены средние значения модуля скорости по наблюдениям 2014–2015 гг.

Таблица 4 – Средние значения модуля скорости на всех горизонтах (см/с), 2014 г.

ADCP 1200		ADCP 600	
Глубина, м	Среднее значение модуля скорости	Глубина, м	Среднее значение модуля скорости
9,7	4,1291	12,9	3,03434
8,95	3,76456	11,9	2,86511
8,2	3,50519	10,9	2,79824
7,45	3,34472	9,9	2,71652
6,7	3,18509	8,9	2,71268

5,95	3,23297	7,9	2,71329
5,2	3,31561	6,9	2,71737
4,45	3,73625	5,9	2,80538
3,7	3,77629	4,9	2,9285
2,95	3,62584	3,9	3,22362
2,2	3,6123	2,9	3,41053

Таблица 5 – Средние значения модуля скорости на всех горизонтах (см/с), 2015 г.

ADCP 1200		ADCP 600	
Глубина, м	Среднее значение модуля скорости	Глубина, м	Среднее значение модуля скорости
10,69	4,2402	13,9	3,06704
9,94	3,90748	12,9	2,96342
9,19	3,77757	11,9	3,20099
8,44	3,86449	10,9	3,71576
7,69	3,91557	9,9	3,98401
6,94	4,09626	8,9	3,63797
6,19	3,97926	7,9	3,00625
5,44	3,64512	6,9	2,72105
4,69	3,41397	5,9	2,51051
3,94	3,31413	4,9	2,24005
3,19	3,3097	3,9	2,14815
2,44	3,46476	2,9	2,29533

Средние значения модуля скорости за период наблюдений в 2014 году и 2015 году хорошо согласованы для одинаковых горизонтов по глубине.

### **3.2.3. Анализ длительных измерений скорости комплекснозначным методом эмпирических ортогональных функций**

Течения в озере имеют быстроменяющийся турбулентный характер (рисунок 3.2.2).

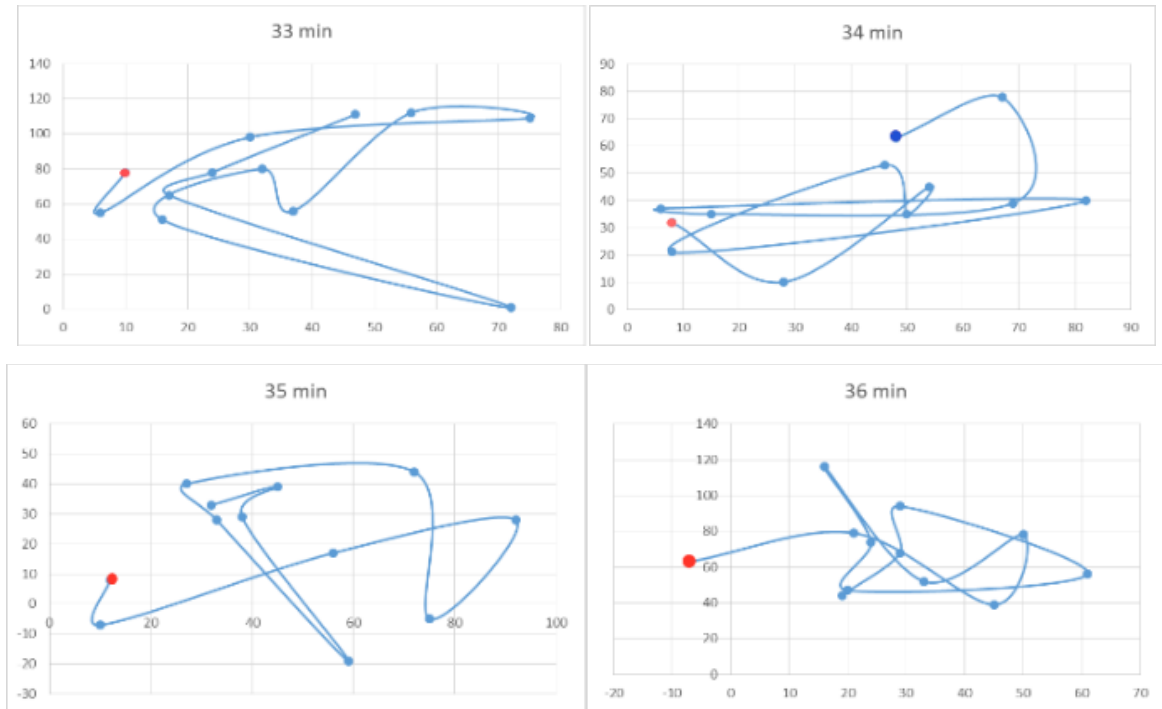


Рисунок 3.2.3 – Годографы скорости (мм\с), построенные по натурным измерениям скорости течения в оз. Шира 13.07.2015 07:33-07:36. Красным кружком обозначена приповерхностная точка на глубине 0,5 м

В работе J. M. Kaihatu [94] действительнзначный метод эмпирических ортогональных функций обобщается на случай комплекснозначных переменных, что позволяет проанализировать горизонтальные скорости, записанные в виде

$$w(x_i, t_k) = u(x_i, t_k) + iv(x_i, t_k),$$

где  $u$  – восточная,  $v$  – северная компоненты скорости, а  $x_i (i=1, \dots, N)$  и  $t_k (k=1, \dots, K)$  – переменные по пространству и времени, соответственно.

Для применения комплексного метода эмпирических ортогональных функций (КЭОФ) определяется комплекснозначная матрица коэффициентов корреляции

$$R(x_i, x_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K w^*(x_i, t_k) w(x_j, t_k)$$

и находятся ее собственные векторы  $\phi_n(x_i)$ , собственные значения  $\lambda_n$  из равенства

$$\sum_{i=1}^N R(x_i, x_j) \phi_n(x_i) = \lambda_n \phi_n(x_j), \quad n=1 \dots N.$$

Так как корреляционная матрица является эрмитовой, то  $R(x_i, x_j) = R^*(x_j, x_i)$  комплекснозначные собственные векторы удовлетворяют условию ортогональности

$$\sum_{i=1}^N \varphi_n^*(x_i) \varphi_m(x_i) = \delta_{nm},$$

при этом собственные значения  $\lambda_n$  – вещественные.

Более того, принимая во внимание неравенство Шварца

$$R(x_i, x_i) R(x_j, x_j) \geq R^*(x_j, x_i) R(x_i, x_j),$$

можно сделать вывод, что собственные значения  $\lambda_n$  – положительные.

Собственные векторы  $\varphi_n(x_i)$  могут быть названы «комплексными эмпирическими ортогональными модами». Запишем поле скоростей течения  $w(x_i, t_k)$  через эти моды

$$w(x_i, t_k) = \sum_{n=1}^N E_n(t_k) \varphi_n(x_i),$$

тогда комплексные амплитуды  $E_n(t_k)$  выражаются следующим образом:

$$E_n(t_k) = \sum_{i=1}^N \varphi_n^*(x_i) w(x_i, t_k), \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K E_n^*(t_k) E_m(t_k) = \lambda_n \delta_{nm}.$$

Отсюда следует, что амплитуды двух различных мод не коррелируют друг с другом и собственные значения являются средним значением энергии по времени в разных модах. Сумма всех собственных значений равна общей энергии:

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N w^*(x_i, t_k) w(x_i, t_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N E_n^*(t_k) E_n(t_k) = \sum_{n=1}^N \lambda_n.$$

Например, в таком виде метод эмпирических ортогональных функций применяется в работе Н. Matsuura [112] для анализа поверхностного течения в заливе Пьюджет-Саунд, в работах Р. Kundu [97–99] вблизи тихоокеанского побережья штата Орегон.

В результате применения метода эмпирических ортогональных функций к анализу данных измерения 1 (таблица 3) определяем первую моду горизонтальной скорости (комплекснозначный вектор, не зависящий от времени, размерность которого равна числу точек измерения по пространству), амплитуду и фазу изменения первой моды по времени (рисунок 3.2.1).

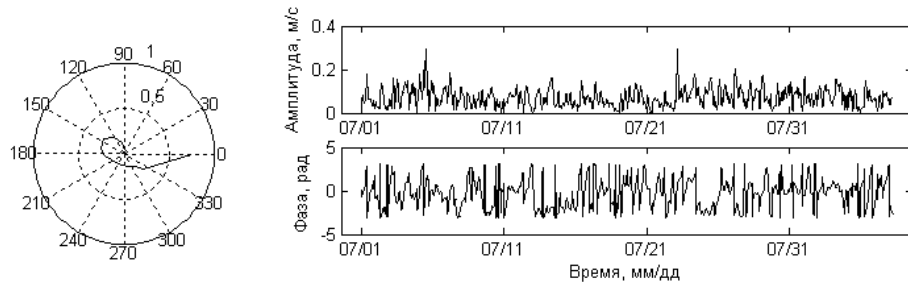


Рисунок 3.2.4 – Измерение 1 (таблица 3), годограф первой моды горизонтальной скорости – слева, амплитуда и фаза изменения первой моды во времени – справа

В интерпретации [97] первая мода в анализе поверхностного течения ассоциируется с баротропной составляющей, а первый модальный коэффициент представляет собой траекторию движения частиц жидкости.

Для озера Шира основное направление течения в соответствии с первым модальным коэффициентом происходит против часовой стрелки (рисунок 3.2.5).

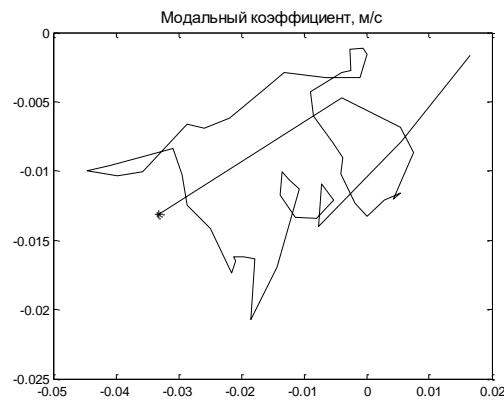


Рисунок 3.2.5 – Годограф первого модального коэффициента для измерения 1 (таблица 3). Звездочкой обозначено первое измерение по времени

Возможность представления решения первой модой для всех четырех длительных измерений (таблица 3) подтверждается анализом накопленной доли общей энергии (рисунок 3.2.6).

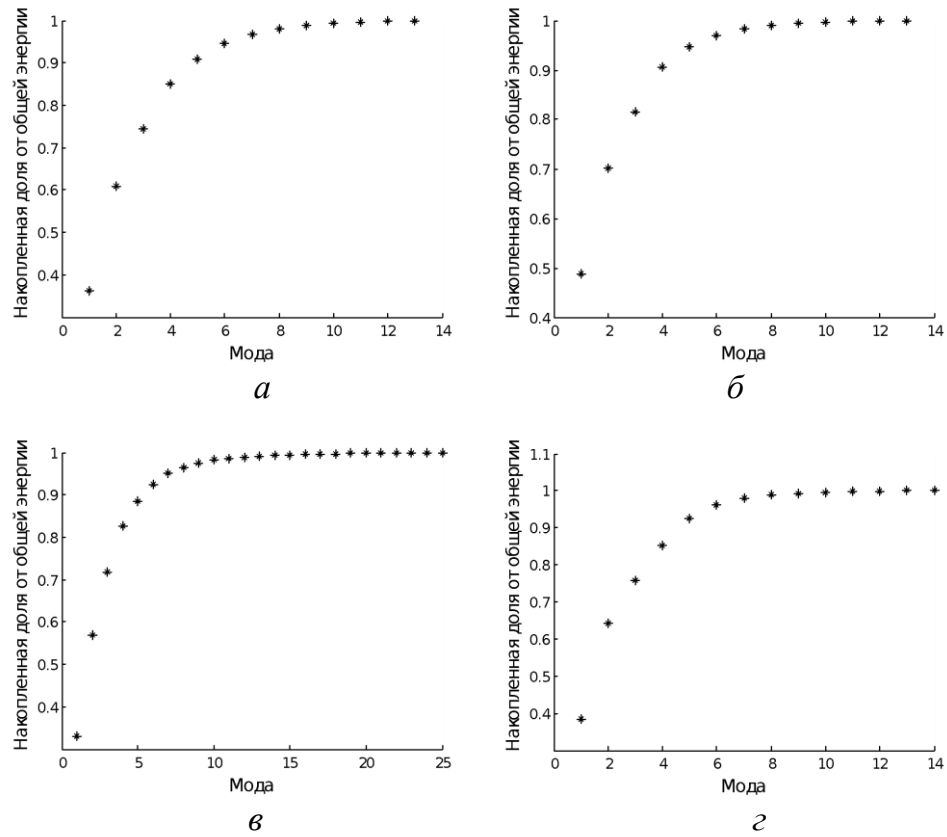


Рисунок 3.2.6 – Накопленная доля от общей энергии для измерений:  
*a* – измерение 1, *б* – измерение 2, *в* – измерение 3, *г* – измерение 4

На рисунке 3.2.7 представлены годографы первой моды горизонтальных скоростей для измерений 1–4 (таблица 3).

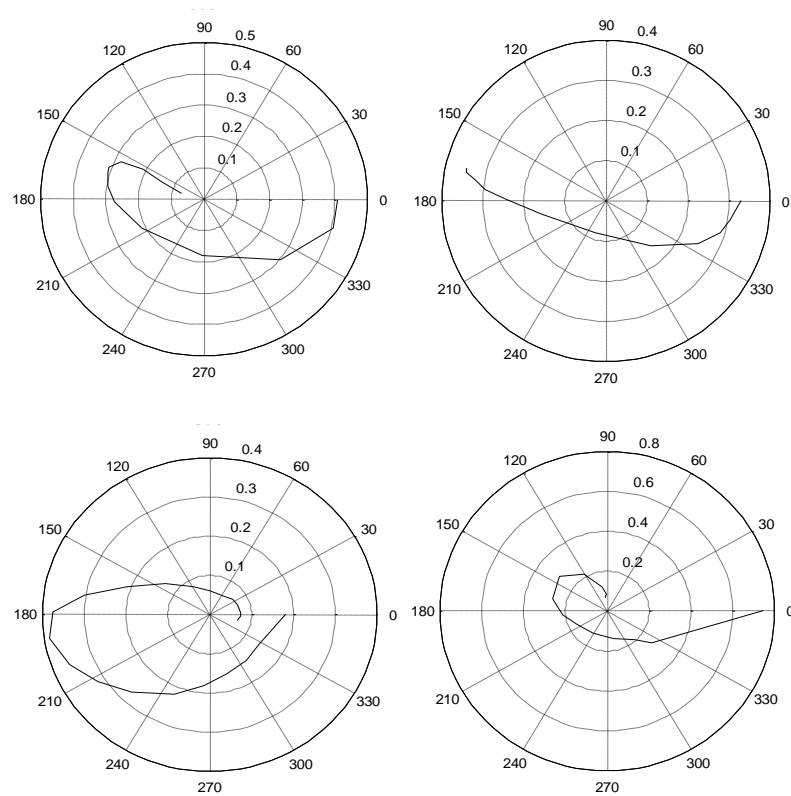


Рисунок 3.2.7 – Годографы первой моды для четырех долговременных измерений 1–4 (таблица 3)

Для всех длительных измерений скорости получены однотипные картины поведения первой моды (рисунок 3.2.7) аналогичные спиральям в случае однородной жидкости (рисунок 1.4.2, *в*, Глава 1).

На рисунке 3.2.8 показаны годографы первой моды для скорости течения измерения 1 (таблица 3) и нормированные годографы для дрейфовой составляющей течения для модели Экмана, полученные в пункте 1.4.2 Главы 1, в случае постоянного (рисунок 3.2.8, *а*) и экспоненциального (рисунок 3.2.8, *б*) коэффициентов вертикального турбулентного обмена.



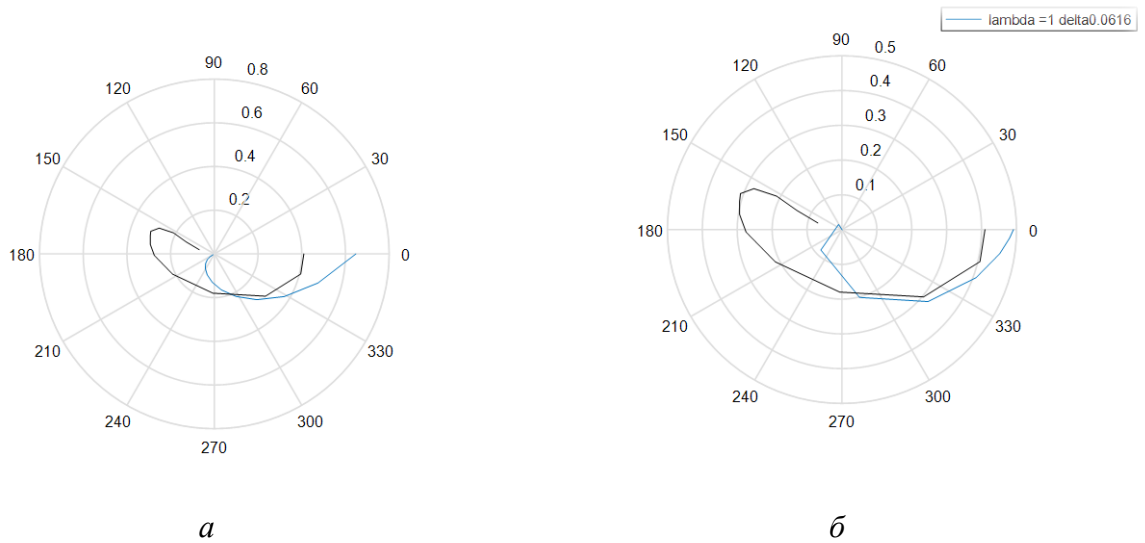


Рисунок 3.2.8 – Годограф первой моды для скорости течения – черная линия, нормированный годограф скорости для дрейфовой составляющей течения – синяя линия: *а* – с постоянным  $K_z = 0,0011 \text{ м}^2/\text{с}$ , *б* – с экспоненциальным  $K_z = \delta e^{\lambda z}$ ,  $\delta = 0,0616$ ,  $\lambda = 1$ . В обоих случаях  $k_b = 0,01 \text{ м/с}$

Известно, что в летний период озеро является стратифицированным по температуре и солености (рисунок В.2), при этом верхний перемешанный слой можно рассматривать как слой, в котором жидкость однородная. Это дает основание для того чтобы в этом слое на глубине до 9 м сравнить первую моду, найденную методом эмпирических ортогональных функций, с известными решениями для стационарного течения однородной жидкости.

С этой целью определялось среднеквадратичное отклонение значений первой моды от нормированного аналитического решения. Наилучшее приближение в смысле среднеквадратичного отклонения получено для постоянного  $K_z = 0,0011 \text{ м}^2/\text{с}$  при среднеквадратичном отклонении  $M = 0,174$  (рисунок 3.2.9, *а*), для экспоненциального  $K_z = \lambda e^{-\delta z}$  при  $\lambda = 0,8$ ,  $\delta = 0,08$  и среднеквадратичном отклонении  $M = 0,07$  (рисунок 3.2.9, *б*).

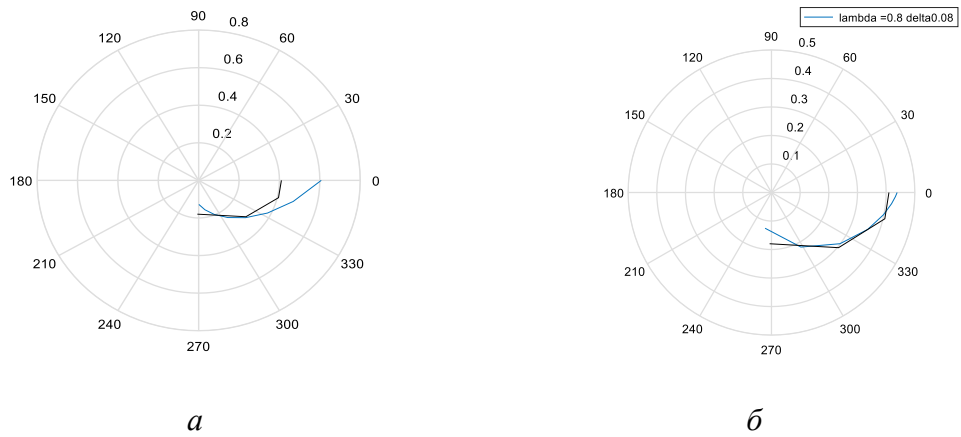


Рисунок 3.2.9 – Годографы, полученные с помощью комплекснозначного метода ЭОФ – черная линия, нормированный годограф скорости для дрейфовой составляющей течения – синяя линия: *a* – с постоянным  $K_z = 0,0011 \text{ м}^2/\text{с}$ ; *б* – с экспоненциальным

$K_z = \delta e^{\lambda z}$ ,  $\delta = 0,08$ ,  $\lambda = 1$ . В обоих случаях  $k_b = 0,01 \text{ м/с}$

### 3.2.4. Анализ коэффициента вертикального турбулентного обмена

Для оценки величины коэффициента вертикального турбулентного обмена в течение всего периода измерений был взят годограф скорости, полученный с использованием комплексного метода ЭОФ.

Выражение для компонент скорости в дрейфовом стационарном течении однородной жидкости в бассейне бесконечной глубины с учетом ветра, направленного по оси  $Oy$  согласно [79] можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 u &= V_0 e^{-\alpha z} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha z\right), \\
 v &= V_0 e^{-\alpha z} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha z\right),
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

$$V_0 = \frac{\tau}{\sqrt{K_z \rho_0^2 l}}.$$

$$a = \sqrt{\frac{l}{2K_z}}, \quad l = 2\Omega \sin \psi,$$

где  $\tau$  – напряжение ветра,  $l$  – параметр Кориолиса,  $K_z$  – коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ,  $\psi$  – широта места.

Глубина слоя Экмана равна в этом случае

$$d = \frac{\pi}{a} = \sqrt{\frac{2\pi^2 K_z}{l}}. \quad (3.1.3)$$

Посчитаем масштаб глубины  $a$  и коэффициент вертикального турбулентного обмена  $K_z$  для натуральных измерений, сделанных в июле – августе 2015 года с помощью доплеровского профилографа течений ADCP 1200 кГц на озере Шира. Из формул (3.1.2) и (3.1.3) следует, что

$$a = \frac{\pi}{d}, \quad K_z = \frac{l}{2a^2} = \frac{2\Omega \sin \phi}{a^2}.$$

Анализ первой моды в точке Гб дает глубину слоя Экмана. Тогда при применении формул (3.1.2) – (3.1.3) в этом случае получаем

$$a = \frac{\pi}{5,14 \text{ м}} \cong 0,6112 \text{ м}^{-1} \cong 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1},$$

$$K_z = \frac{7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1} \sin(54^\circ 30' 08.6'')}{(0,6112 \text{ м}^{-1})^2} \cong 10,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с} \cong 10,6 \text{ см}^2/\text{с}.$$

Стоит отметить, что полученная величина для коэффициента вертикального турбулентного обмена  $K_z \cong 10,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с} \cong 0,0011 \text{ м}^2/\text{с}$  практически совпадает с величиной для постоянного  $K_z \cong 0,0011 \text{ м}^2/\text{с}$  (см. п. 3.1.2).

### 3.3. Заключение по Главе 3

1. С использованием метода эмпирических ортогональных функций для температуры получен простой способ выделения периодов внутренних волн и количественная оценки влияния температуры воздуха на поверхностную температуру.

2. Найдены средние значения модуля скорости течений, показана зависимость направления ветра и течения в приповерхностном слое.
3. Анализ долговременных измерений скорости с помощью метода эмпирических ортогональных функций позволил определить структуру течения в эпителимнионе (верхнем прогретом слое) и оценить величину коэффициента вертикального турбулентного обмена.

## Заключение

Диссертационная работа посвящена комплексному исследованию гидрофизического режима меромиктического озера Шира в летний период с использованием методов математического моделирования и обработки данных натурных измерений.

Необходимость комплексного исследования обусловлена тем, что отдельно теоретические исследования, численные расчеты и натурные измерения не могут дать картину сложного процесса течения в озере. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства и недостатки, но, только сопоставляя и совместно интерпритируя полученные с их помощью результаты, можно определить характер происходящих в озере гидрофизических процессов.

В качестве математической модели для озера Шира была выбрана модель трехмерного течения неоднородной жидкости в приближении Буссинеска и предположении о гидростатичности давления [49]. При выборе математической модели учитывалось географическое положение озера и его гидрофизические особенности.

Для упрощенных вариантов этой модели получены аналитические решения для стационарного медленного течения. Найдены также решения для модели Экмана в случае двумерного течения (в вертикальной плоскости) и трехмерного течения с условием проскальзывания на дне при постоянном и переменном коэффициентах вертикального турбулентного обмена. Эти решения обобщают ранее известные результаты для условий прилипания на дне [145, 147].

Новые решения в двумерном и трехмерном случаях получены и для модели с учетом горизонтального турбулентного обмена в бассейне прямоугольной формы и тремя видами коэффициента вертикального турбулентного обмена (постоянный, линейно и экспоненциально меняющийся по глубине). Сделан вывод о применимости более простой модели Экмана на удалении от берегов.

Результаты исследования полученных аналитических решений позволили определить тип граничных условий на дне (условие проскальзывания), который впоследствии использовался при проведении численных расчетов для озера Шира.

Разработана методика построения цифровой модели рельефа дна с использованием пространственно-разбросанных данных измерений батиметрии [126]. Применение этой методики позволило получить непрерывно-дифференцируемое поле батиметрии озера Шира.

Численное моделирование гидрофизических процессов, происходящих в озере Шира выполнено с использованием численной модели, реализованной открытым кодом ROMS [121]. Верификация численной модели ROMS осуществлена на полученных частных аналитических решениях.

Адаптация численной модели ROMS к условиям в озере Шира включала в себя несколько этапов:

- выбор численного алгоритма для решения уравнения переноса-диффузии с использованием созданной системы тестов;
- построение равномерной разностной сетки;
- задание начального профиля температуры и солености;
- подключение метеорологических данных.

Проведенные модельные расчеты с учетом переменного ветра и расчеты с учетом реальных метеорологических данных за весь летний период выявили зависимость характера возникающих внутренних волн от силы и направления ветра. Показано, что амплитуды внутренних волн, полученные путем обработки данных натуральных измерений скорости течения, хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

В диссертации представлены оценки спектральных характеристик скоростей течения, показавшие наличие одинаковых частот в данных натуральных измерений и в результатах численных расчетов. Сравнение спектров измеренных скоростей течения в летние периоды 2014 г. и в 2015 г. – до и после потери озером свойства меромиктичности – показало, что спектры являются устойчивой характеристикой гидрофизических процессов в озере.

Валидация математической модели выполнена путем качественного и количественного сравнения полученных результатов численных расчетов с данными

натурных измерений в летний период, в частности, по характеру изменения температуры и оценкам спектральных характеристик скоростей течения.

Анализ данных натурных измерений является отдельным методом получения дополнительной информации о гидрофизических характеристиках озера. В диссертации представлены статистически обработанные данные долговременных измерений (в некоторые годы в течение 1,5 месяцев) температуры и скорости в озере Шира в летний период 2013–2018 гг. С использованием метода главных компонент (эмпирических ортогональных функций) получен простой способ определения моментов возникновения внутренних волн по данным долговременных измерений температуры. Получена количественная оценки влияния температуры воздуха на поверхностную температуру.

Проанализированы данные долговременных измерений скорости как стандартными статистическими методами (найжены средние значения модуля горизонтальной скорости течений за летний сезон), так и с помощью метода эмпирических ортогональных функций.

Метод эмпирических ортогональных функций позволил также проанализировать течение в целом как по времени, так и по глубине. Анализ годографа первого модального коэффициента, как функции времени, выявил полный поворот течения против часовой стрелки в измерениях 2014 г. По результатам анализа первой моды удалось определить структуру течения в эпителимнионе (верхнем прогретом слое) и оценить величину коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность научному руководителю Лидии Алексеевне Компаниец за постоянное внимание, помощь и поддержку в работе. Также хочется поблагодарить Щепеткина Александра Федоровича, Малышева Андрея Валериевича, Богатикова Александра Сергеевича за ценные консультации и сотрудничество.

## Список литературы

1. Акопян, М. А. Диагностическая модель течения озер Ладожского и Севан / М. А. Акопян, А. М. Гурина, Ю. Л. Демин, Н. Н. Филатов, Н. В. Кочков // Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах: сб. — Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1986. — С. 21–23.
2. Акопян, М. А. Прогностическая модель и расчет сезонной циркуляции озера Севан / М. А. Акопян, А. М. Гурина, Ю. Л. Демин, Н. Н. Филатов, Н. В. Кочков // Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах: сб. — Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1986. — С. 24–28.
3. Андреев, О. А. Ветровая и стоковая циркуляция Ладожского озера (численные эксперименты) / О. А. Андреев, Л. В. Воробьева // Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах: сб. — Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1986. — С. 17–21.
4. Архипов Б. В. Двумерная вертикальная модель температурного режима водоема-охладителя / Б. В. Архипов, В. В. Солбаков, Д. А. Шапочкин // Водные ресурсы. — 1994. — Т. 22. — № 6. — С. 653–666.
5. Архипов, Б. В. Расчет термогидродинамического режима водоема по двумерной модели / Б. В. Архипов, В. В. Солбаков // Известия АН. Физика атмосферы и океана. — 1994. — Т. 30. — № 5. — С. 671–685.
6. Архипов, Б. В. Трехмерная нестационарная модель динамики вод и изменения солености в водоеме / Б. В. Архипов, П. П. Корявов // Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах: сб. — Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1986. — С. 10–13.



7. Астраханцев, Г. П. Моделирование течений и термического режима Ладожского озера / Г. П. Астраханцев, Н. Б. Егорова, Л. А. Руховец — Ленинград, 1988. — 44 с. — Препринт / Институт озероведения АН СССР.
8. Астраханцев, Г. П. Моделирование экосистем больших стратифицированных озер / Г. П. Астраханцев, В. В. Меншуткин, Н. А. Петрова, Л. А. Руховец — СПб.: Наука, 2003. — 363 с.
9. Астраханцев, Г. П., Математическая модель для исследования реакции экосистемы Ладожского озера на изменение антропогенной нагрузки / Г. П. Астраханцев, В. В. Меншуткин, И. В. Писулин, Л. А. Руховец — Петербург, 1992. — 44 с. — Препринт / РАН, Санкт-Петербургский научный центр, Ассоциация ученых «Будущее Санкт-Петербурга».
10. Астраханцев, Г. П. Трехмерная математическая модель гидротермики замкнутого водоема / Г. П. Астраханцев, Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец // Моделирование и экспериментальные исследования гидрологических процессов в озерах: сб. — Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1986. — С. 13–16.
11. Баранов, В. И. Пространственно-временная изменчивость основных характеристик озера Шира в сезоне 2011–2012 гг. / В. И. Баранов, Н. Н. Голенко, Л. А. Компаниец, В. Т. Пака, Т. В. Якубайлик // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, Информатика. — 2013. — № 9. — С. 148–156.
12. Белокопытов, В. Н. Статистический анализ термохалинных полей Черного моря по данным буев-профилемеров ARGO / В. Н. Белокопытов, А. В. Багаев // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. — Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика. — 2012. — Вып. 26. — Т. 2. — С. 128–142.
13. Белолипецкий, В. М. Численное моделирование годовой динамики вертикальной структуры соленого озера / В. М. Белолипецкий,

- С. Н. Генова // Вычислительные технологии. — 2008. — Т. 9. — № 4. — С. 34–43.
14. Белолипецкий, П. В. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах методом конечных элементов / П. В. Белолипецкий // Вычислительные технологии. — 2005. — Т. 10. — № 5. — С. 19–28.
  15. Богданова, А. В. Представление решения двумерного уравнения теплопроводности в системе Maple / А. В. Богданова, Д. А. Борисенко, О. С. Володько // Тезисы XXI Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск, 2020. — С. 8.
  16. Борисенко, Д. А. Исследование свойств разностных схем для уравнения переноса-диффузии в двумерном случае / Д. А. Борисенко, О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Материалы всероссийской конференции с международным участием «Решетневские чтения». — Красноярск, 2018. — С. 5–6.
  17. Боуден, К. Физическая океанография прибрежных вод: [пер. с англ.] / К. Боуден — М.: Мир, 1988. — 324 с.
  18. Володько, О. С. Анализ внутренних волн в озере Шира с использованием региональной модели (ROMS) / О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Сборник тезисов Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения акад. Г. И. Марчука. — Новосибирск, 2020. — С. 77–78.
  19. Володько, О. С. Анализ данных измерений температуры в озере Шира в летний период методом главных и независимых компонент / О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Материалы XVII Всероссийского семинара «Нейроинформатика, ее приложения и анализ данных». — Красноярск, 2019. — С. 49–57.
  20. Володько, О. С. Исследование гидротермических режимов непроточного стратифицированного водоема с использованием доплеровских

- профилографов / О. С. Володько, Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик // Труды XI Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» ГА-2012. — Санкт-Петербург, 2012. — С. 271-274.
21. Володько, О. С. Метод главных компонент в задаче анализа гидрофизических характеристик открытых водоемов / О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Материалы XVI Всероссийского семинара «Нейроинформатика, её приложения и анализ данных» — Красноярск, 2018. — С. 23–29.
22. Володько, О. С. О структуре течения в озере Шира при различных ветровых воздействиях / О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Решетневские чтения [Электронный ресурс] / Материалы XXIV Международной научно-практической конференции, посвященной Памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М. Ф. Решетнева: в 2 ч. / под общ. ред. Ю. Ю. Логинова. — СибГУ им. М. Ф. Решетнева. — Красноярск, 2020. — Ч. 2. — С. 24–25 — Загл. с экрана (дата обращения: 17.12.2020).
23. Володько, О. С. Программа для формирования данных ветрового воздействия для численного моделирования течений в соленых стратифицированных озерах / О. С. Володько, А. С. Богатиков — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615635 от 27.05.2020 г.
24. Володько, О. С. Сравнение некоторых методов обработки данных в задаче анализа длительных измерений температуры / О. С. Володько, Н. А. Буряк, Л. А. Компаниец // Материалы XXVIII Всероссийского семинара «Нейроинформатика, её приложения и анализ данных» — Красноярск, 2020. — С. 138–144.
25. Володько, О. С. Численное моделирование течений в озере Шира в летний период с использованием океанической модели ROMS / О. С. Володько //

- Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и школы молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. — Новосибирск, 2019. — С. 12.
26. Володько, О. С. Численное моделирование циркуляций в озере Шира / О. С. Володько // Тезисы докладов Всероссийской конференции и школы молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л. В. Овсянникова. — Новосибирск, 2019. — С. 60.
27. Володько, О.С. Вихревая структура озера Шира по результатам натурных наблюдений и численных расчетов / О. С. Володько, Л. А. Компаниец // Материалы Международного симпозиума «Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере». — Москва, 2018. — С. 79-90.
28. Володько, О.С. Программа для формирования данных тепловых потоков для численного моделирования течений в соленых стратифицированных озерах / О. С. Володько, А. С. Богатиков // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615636 от 27.05.2020 г.
29. Гилл, А. Динамика атмосферы и океана: в 2-х т. / А. Гилл — М.: Мир, 1986. — 396 с. — 1 т.
30. Гилл, А. Динамика атмосферы и океана: в 2-х т. / А. Гилл — М.: Мир, 1986. — 415 с. — 2 т.
31. Дебольская, Е. И. Использование программы GETM для математического моделирования термического режима Шатурских озер-охладителей / Е. И. Дебольская, О. А. Масликова, А. Ю. Исаенков // Труды VII конференции «Динамика и термика рек, водохранилищ и прибрежной зоны морей». — РФФИ. ИВП РАН. — 2009. — С. 168–176.
32. Зацепин, А. Г. Изменчивость поля течений в прибрежной зоне Черного моря по измерениям донной станции ADCP / А. Г. Зацепин, В. Б. Пиотух,

- А. О. Корж, О. Н. Куклева, Д. М. Соловьев // *Океанология*. — 2012. — Т. 52. — № 5. — С. 629–642.
33. Зырянов, В. Н. Придонные компенсационные противотечения в водохранилищах равнинного типа / В. Н. Зырянов, А. П. Фролов // *Водные ресурсы*. — 2006. — Т. 33. — № 1. — С. 5–13.
34. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1971. — 576 с.
35. Квон, В. И. Гидротермический расчет водоемов-охладителей // *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт*. — 1979. — № 5. — С. 129–137.
36. Квон, В. И. Численное моделирование трехмерных стратифицированных течений в водоемах при больших тепловых нагрузках / В. И. Квон // *Вычислительные методы прикладной гидродинамики. Институт гидродинамики СО АН СССР*. — 1988. — С. 62–73.
37. Квон, В. И. Численный анализ механизма глубокого проникновения поверхностных вод в прибрежной зоне озера в период весенне-летнего термобара / В. И. Квон, Д. В. Квон // *Вычислительные технологии*. — 1997. — Т. 2. — № 5. — С. 46–56.
38. Квон, Д. В. Математическое моделирование гидротермических процессов в Телецком озере: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. Наук / Д. В. Квон — Барнаул, 1998. — 16 с.
39. Компаниец, Л. А. Анализ характеристик озера Шира на основе натуральных наблюдений / Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик, О. С. Володько // *Вестник Бурятского государственного университета: математика, информатика*. — 2012. — выпуск 9. — С. 167–176.
40. Компаниец, Л. А. Аналитические решения для задач стационарного ветрового движения жидкости / Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик, Л. В. Гаврилова, О. С. Володько — Красноярск: Изд-во СФУ, 2012. — 114 с.

41. Компаниец, Л. А. Аналитическое решение одной модели ветрового движения вязкой жидкости / Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик, О. С. Питальская (Володько) // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14. — № 4. — С. 46–57.
42. Компаниец, Л. А. Аналитическое решение одной модели ветрового движения вязкой жидкости (трехмерный случай) / Л. А. Компаниец, Т. В. Якубайлик, О. С. Питальская (Володько) // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16. — № 3. — С. 50–64.
43. Компаниец, Л. А. Гидрофизические характеристики озера Шира (натурные наблюдения) / Л. А. Компаниец, О. С. Питальская (Володько), Т. В. Якубайлик // Труды VII Конференции «Динамика и термика рек, водохранилищ и прибрежной зоны морей». — Москва: Издательство РУДН, 2009.
44. Компаниец, Л. А. Метод главных и независимых компонент в анализе натурных измерений температуры неглубокого водоема / Л. А. Компаниец, О. С. Володько, Л. В. Гаврилова // Материалы XXV Всероссийского семинара «Нейроинформатика, ее приложения и анализ данных». — Красноярск, 2017. — С. 31–36.
45. Компаниец, Л. А. Опыт использования современных измерительных приборов для определения гидродинамических режимов водоема / Л. А. Компаниец, О. С. Питальская (Володько), Т. В. Якубайлик // Труды X Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» ГА-2010. — СПб: Наука. — 2010. — С. 310–312.
46. Компаниец, Л. А. Сезонная динамика течений в озере Шира по натурным наблюдениям 2014–2015 гг. / Л. А. Компаниец, Н. Н. Голенко, О. С. Володько, О. А. Липина // Вестник Московского университета им. С. Ю. Витте: Образовательные ресурсы и технологии. — 2016. — № 2 (14). — С. 417–423. URL [https://www.muiiv.ru/vestnik/pdf/pp/pp\\_2016\\_2\\_417-423.pdf](https://www.muiiv.ru/vestnik/pdf/pp/pp_2016_2_417-423.pdf)

47. Компаниец, Л. А. Точные решения модели Экмана трехмерного ветрового движения однородной жидкости с учетом геострофической составляющей / Л. А. Компаниец, О. С. Питальская (Володько) // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т.1. — № 1. — С. 57 — 66.
48. Коренев, Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б. Г. Коренев — М.: Наука. — 1971. — 287 с.
49. Кочергин, В. П. Теория и методы расчета океанических течений / В. П. Кочергин — М.: Наука, 1978. — 127 с.
50. Кузин, В. И. Анализ вариаций температуры поверхности тропической и северной частей Тихого океана / В. И. Кузин, А. С. Лобанов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2016. — Т. 52. — № 5 — С. 618–627.
51. Курант, Р. О разностных уравнениях математической физики / Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви // Успехи математических наук. — 1941. — № 8. — С. 125–160.
52. Ламб, Г. Гидродинамика: в 2 т. / Г. Ламб — Москва – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотичная динамика. — 2003.
53. Ле Блон, П. Волны в океане: в 2 т. / П. Ле Блон, Л. Майсек — Москва: Мир, 1981.
54. Марчук, Г. И., Саркисян А. С. Математическое моделирование циркуляции океана / Г. И. Марчук, А. С. Саркисян — М.: Наука, 1988.
55. Миропольский, Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане / Ю. З. Миропольский — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 302 с.
56. Навроцкий, В. В. Внутренние волны и их биологические эффекты в шельфовой зоне моря / В. В. Навроцкий, В. Ю. Ляпидевский, Е. П. Павлова // Вести ДВО РАН. — 2012. — С. 22–31.
57. Обухов, А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций / А. М. Обухов // Известия АН СССР Серия геофизическая — 1960. — № 3 — С. 432–439.

58. Педлоски, Д. Геофизическая гидродинамика: в 2 т. / Д. Педлоски — М.: Мир, 1984.
59. Перминов, С. М. Исследование течений, горизонтальной циркуляции вод и водообмена между восточной и западной частями Северного Каспия / С. М. Перминов, И. И. Чечель // Гидрофизика Северного Каспия: Сб. — М.: Наука, 1986. — С. 6–10.
60. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.
61. Рогозин, Д. Ю. Меромиктические озера Северо-Минусинской котловины: закономерности стратификации и экология фотофорных серных бактерий / Д. Ю. Рогозин — Красноярск: ИФ СО РАН, 2019.
62. Семин, С. В. Численное моделирование динамики стратифицированного озера / С. В. Семин, О. Е. Куркина, А. А. Куркин, А. Р. Гиниятуллин // Труды Нижегородского государственного технического университета. — 2012. — № 2. — Ч. 95. — С. 48-65.
63. Чикин, А. Л. Построение и численное исследование 3D модели гидродинамики Азовского моря // Вычислительные технологии. — 2001. — Т. 6. — Ч. 2. — Спец. выпуск: труды международной конференции RDAMM-2001. — С. 686–691.
64. Якубайлик, Т. В. Численное моделирование поведения внутренних волн в прибрежной зоне неглубокого стратифицированного водоема / Т. В. Якубайлик, Л. А. Компаниец // Теоретические и прикладные вопросы науки и образования. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 августа 2013 г. — Тамбов: Изд-во ТРОО. — 2013. — С. 54–58.
65. Alishouse, J. C. A discussion of empirical orthogonal functions and their application to vertical temperature profiles / J. C. Alishouse, L. J. Crone, H. E. Fleming, F. L. Van Cleef, D. Q. Wark // Tellus — 1967. — V. 19. — № 3. — P. 477–482.



66. Antenucci, J. P. Energetics of long internal gravity waves in large lakes / J. P. Antenucci, J. Imberger // *Limnology and oceanography*. — 2001. — V. 46. — № 7. — P. 1760–1773.
67. Antenucci, J. P. Seasonal evolution of the basin-scale internal wave field in a large stratified lake of long internal gravity waves in large lakes / J. P. Antenucci, J. Imberger, A. Saggio // *Limnology and oceanography*. — 2000. — V. 45. — № 7. — P. 1621–1638.
68. Appt, J. Basin-scale motion in Upper lake Constance / J. Appt, J. Imberger, H. Kobus // *Limnology and oceanography*. — 2004. — V. 49. — № 4. — P. 919–933.
69. Arakawa, A. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model / A. Arakawa, V. R. Lamb // *Methods Computational Physics* — 1977. — V. 17. — P. 174–265.
70. Barkan, R. Sub-mesoscale dynamics in the northern Gulf of Mexico. Part I: Regional and seasonal characterization and the role of river outflow / R. Barkan, J. C. McWilliams, A. F. Shchepetkin, M. J. Molemaker, L. Renault, A. Bracco, J. Choi // *Journal of Physical Oceanography*. — 2017 — V. 47. — № 9. — P. 2325–2346.
71. Beckmann, A. Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. Part I. Problem formulation and model accuracy / A. Beckmann, D. B. Haidvogel // *Journal of Geophysical Research*. — 1993. — Vol. 23. — P. 1736–1753.
72. Beletsky, D. Numerical simulation of internal Kelvin waves and coastal upwelling fronts / D. Beletsky, W. P O'Connor, D. J. Schwab, D. E. Dietrich // *Journal of Physical Oceanography*. — 1997. — V. 27. — P. 1197–1215.
73. Belolipetskii, V. M. One-dimensional model for studying seasonal changes of vertical structure of Salt Lake Uchum / V. M. Belolipetskii, S. N. Genova, A. G. Degermendzhy, V. V. Zykov, D. Y. Rogozin // *Journal of Siberian Federal University — Mathematics and Physics*. — 2019. — V. 12. — № 1. — P. 100–108.

74. Boussinesq, J. Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière: Tome I / J. Boussinesq — Gauthier-Villars, 1903.
75. Briggs, I. C. Machine contouring using minimum curvature / I. C. Briggs // *Geophysics*, 1974. — Vol. 29. — № 1. — P. 39–48.
76. Csanady, G. T. Large-scale motion in the Great Lakes / G. T. Csanady // *Journal of Geophysical Research*. — 1967. — V. 72. — № 16. — P. 4151–4162.
77. Csanady, G. T. Transverse internal seiches in large oblong lakes and marginal seas / G. T. Csanady // *Journal of Physical Oceanography* — 1973. — V. 3. — P. 439–447.
78. Csanady, G. T. Wind-driven summer in the Great Lakes / G. T. Csanady // *Journal of Geophysical Research*. — 1968. — V. 73. — № 8. — P. 2579–2589.
79. Ekman, V. W. On the influence of the Earth rotation on ocean currents / V. W. Ekman // *Arkiv for Matematik, Astronomi, Fysik*. — 1905. — Bd. 2. — № 11. — P. 1–52.
80. Everson, R. An empirical eigenfunction analysis of sea surface temperatures in the western North Atlantic / R. Everson, P. Cornillon, L. Sirovich, A. Webber // *Journal of Physical Oceanography*. — 1997. — V. 27. — № 3. — P. 468–479.
81. Freeman, N. G. A modified sigma equations' approach to the numerical modeling of Great Lakes hydrodynamics / N. G. Freeman, A. M. Hale, M. B. Danard // *Journal of Geophysical Research*. — 1972. — V. 77. — № 6. — P. 1050–1060.
82. Fujii, Y. Three-dimensional analysis of temperature and salinity in the equatorial Pacific using a variational method with vertical coupled temperature-salinity empirical orthogonal function modes / Y. Fujii, M. Kamachi. // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2003. — V. 108. — № C9.
83. GETM [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://getm.eu/>

84. Gloor, M. Benthic boundary mixing and resuspension induced by internal seiches / M. Gloor, A. Wiest, M. Munnich // *Hydrobiology*. — 1994. — V. 284. — P. 59–68.
85. Golenko, N. On the Dynamics of Lake Shira / N. Golenko, M. Golenko, O. Pitalskaya (Volodko), L. Kompaniets, T. Yakubaylik // *Materials of the 3-rd International seminar «Dynamics of the coastal zone in the non-tidal seas»*, Gelendzhik, Russia, 2014. — P. 113–115.
86. Gorban, A. N. *Principal Manifolds for Data Visualisation and Dimension Reduction, Series: Lecture Notes in Computational Science and Engineering* / A. N. Gorban, B. Kegl, D. Wunsch, A. Y. Zinovyev — Berlin: Springer, 2008. — 340 p.
87. Hannachi, A. Empirical orthogonal functions and related techniques in atmospheric science: A review / A. Hannachi, I. T. Jolliffe, D. B. Stephenson // *International journal of climatology*. — 2007. — V. 27. — № 9. — P. 1119–1152.
88. Hawley, N. Response of the benthic nepheloid layer to near-inertial internal waves in southern Lake Michigan / N. Hawley // *Journal of Geophysical Research*. — 2004. — V. 109. — P 1–14.
89. Hutter, K. *Physics of Lakes. Volume 2: Lakes as Oscillators* / K. Hutter, Y. Wang, I. P. Chubarenko — Springer Science & Business Media, 2011. — 646 p.
90. Hutter, K. *Physics of Lakes: Volume 1: Foundation of the Mathematical and Physical Background* / K. Hutter, Y. Wang, I. P. Chubarenko — Springer Science & Business Media, 2010. — 434 p.
91. Hutter, K. *Physics of Lakes: Volume 3: Methods of Understanding Lakes as Components of the Geophysical Environment* / K. Hutter, Y. Wang, I. P. Chubarenko — Springer Science & Business Media, 2014. — 605 p.
92. Imberger, J. Flux paths in a stratified lake: A review / J. Imberger // *Physical processes in lakes and oceans*. — 1998. — V. 54. — P. 1–17.

93. Instruments R. D. Workhorse Sentinel ADCP user's guide. — 2001.
94. Kaihatu, J. M. Empirical orthogonal function analysis of ocean surface currents using complex and real-vector methods / J. M. Kaihatu, R. A. Handler, G. O. Marmorino, L. K. Shay // *Journal of atmospheric and oceanic technology*. — 1998. — V. 15. — № 4. — P. 927–941.
95. Kanari, S. The long period internal waves in Lake Biwa / S. Kanari // *Limnology and Oceanography*. — 2000. — V. 45. — № 7. — P. 1603–1520.
96. Kompaniets, L. A. Analysis of vertical distribution of speed in lake Shira on the basis of data processing of long-term measurements in summer period / L. A. Kompaniets, O. S. Volodko, L. V. Gavrilova // *Ceur Workshop Proceedings*. — 2017. — V. 2033. — P. 202–206.
97. Kundu, P. K Modal decomposition of the velocity field near the Oregon Coast / P. K. Kundu, J. S. Allen, R. L. Smith // *Journal of Physical Oceanography*. — 1975. — V. 5. — № 4. — P. 683–704.
98. Kundu, P. K. Analysis of current observations on the Georgia shelf / P. K. Kundu, J. O. Blanton, M. M. Janopaul // *Journal of Physical Oceanography*. — 1981. — V. 11. — № 8. — P. 1139–1149.
99. Kundu, P. K. Some three-dimensional characteristics of low-frequency current fluctuations near the Oregon coast / P. K. Kundu, J. S. Allen // *Journal of Physical Oceanography*. — 1976. — V. 6. — № 2. — P. 181–199.
100. Large, W. G. Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization / W. G. Large, J. C. McWilliams, S. C. Doney // *Reviews of Geophysics* — 1994. — V. 32. — № 4. — P. 363–403.
101. Lemmin, U. Internal seiche dynamics in Lake Geneva / U. Lemrnin., C. H. Mortimer, T. Bauerle // *Limnology and Oceanography*. — 2005. — V. 50. — № 1. — P. 207–216.

102. Lemmin, U. The structure and dynamics of Internal seiche dynamics in Baldeggersee / U. Lemmin // *Limnology and Oceanography*. — 1987. — V. 32. — № 1. — P. 43–61.
103. Leonard, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation / B. P. Leonard // *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.* — 1979. — V. 19. — P. 59–98.
104. Leonard, B. P. Conservative explicit unrestricted-time-step multidimensional constancy-preserving advection schemes / B. P. Leonard, A. P. Lock, M. K. MacVean // *Monthly Weather Review* — 1996. — V. 124. — № 11. — P. 2588–2606.
105. Leonard, B. P. The flux integral method for multidimensional convection and diffusion / B. P. Leonard, A. P. Lock, M. K. MacVean // *Applied Mathematical Modelling*. — 1995. — V. 19. — № 6. — P. 333–342.
106. Leonard, B. P. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection / B. P. Leonard // *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.* — 1991. — V. 88. — P. 17–74.
107. Li, J. G. Upstream nonoscillatory advection schemes / J. G. Li // *Monthly Weather Review*. — 2008. — V. 136. — P. 4709–4729.
108. Liu, X. D. Weighted essentially non-oscillatory schemes / X. D. Liu., S. Osher, T. Chan // *Journal of computational physics* — 1994. — V. 115. — № 1 — P. 200–212.
109. Lorenz, E. N. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction / E. N. Lorenz — MA: Cambridge, 1956. — 48 p.
110. Lorke, A. Breathing sediments: the control of diffusive transport across the sediment-water interface by periodic boundary-layer turbulence / A. Lorke, B. Muller, B. Maerki, A. Wuest // *Limnology and Oceanography*. — 2003. — V. 48. — № 6. — P. 2077–2085.

111. MacCormack, R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering / R. W. MacCormack // *Journal of spacecraft and rockets*. — 2003. — V. 40. — № 5. — P. 757–763.
112. Matsuura, H. Wind Effects on Sub-Tidal Currents in Puget Sound / H. Matsuura, A. C. Glenn // *Journal of Oceanography*. — 1997. — Vol. 53. — P. 53–66.
113. Mellor, G. L. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems / G. L. Mellor, T. Yamada // *Reviews of Geophysics*. — 1982. — V. 20. — P. 851–875.
114. MITgcm [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://mitgcm.org/>
115. Monahan, A. H. Empirical orthogonal functions: The medium is the message / A. H. Monahan, J. C. Fyfe, M. H. Ambaum, D. B. Stephenson, G. R. North // *Journal of Climate*. — 2009. — V. 22. — № 24. — P. 6501–6514.
116. Phillips, N. A. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting / N. A. Phillips // *Journal of Meteorology*. — 1957. — V.14. — № 2. — P. 184–185.
117. Pitalskaya (Volodko), O. On the flow vertical structure of strongly stratified basin in summer / O. Pitalskaya (Volodko) // *Proceedings of the 2-nd International Conference on the Dynamics of Coastal Zone of Non-Tidal Seas, Baltiysk, Russia*. — Kaliningrad: Terra Baltica, 2010. — P. 218–222.
118. Placke, M. Long-term mean circulation of the Baltic Sea as represented by various ocean circulation models / M. Placke, H. E. Meier, U. Gräwe, T. Neumann, C. Frauen, Y. Liu // *Frontiers in Marine Science*. — 2018. — V. 5. — P. 287.
119. POM [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.ccpo.odu.edu/POMWEB/>
120. Rasch, P. J. Conservative shape-preserving two-dimensional transport on a spherical reduced grid / P. J. Rasch // *Monthly weather review*. — 1994. — V. 122. — № 6. — P. 1337–1350.

121. ROMS [Электронный ресурс]. — Режим доступа: URL: <https://www.myroms.org>
122. Saggio, A. Internal wave in a stratified lake. / A. Saggio, J. Imberger // *Limnology and oceanography*. — 1998. — V. 43. — № 8. — P. 1780–1795.
123. Sandwell, D. T. Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data / D. T. Sandwell // *Geophysical research letters*. — 1987. — V. 14. — № 2. — P. 139–142.
124. Schwab, D. J. Internal free oscillations in Lake Ontario / D. J. Schwab // *Limnology and oceanography*. — 1977. — V. 22. — P. 700–708.
125. Shchepetkin, A. F. A method for computing horizontal pressure-gradient force in an oceanic model with a nonaligned vertical coordinate / A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams // *Journal of Geophysical Research*. — 2003. — V. 108. — № C3.
126. Shchepetkin, A. F. A method for reconstructing bottom topography for an enclosed basin from scattered, sparse measurement data / A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams // *Океанологические исследования*. — 2018. — Т. 46. — № 3. — С. 67–84.
127. Shchepetkin, A. F. An adaptive, Courant-number-dependent implicit scheme for vertical advection in oceanic modeling / A. F. Shchepetkin // *Ocean Modelling*. — 2015. — V. 91. — P. 38–69.
128. Shchepetkin, A. F. Computational kernel algorithms for fine-scale, multiprocess, longtime oceanic simulations / A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams // *In Handbook of Numerical Analysis*. — 2009. — V. 14. — P. 121–183.
129. Shchepetkin, A. F. Correction and commentary for “Ocean forecasting in terrain-following coordinates: Formulation and skill assessment of the regional ocean modeling system” by Haidvogel et al., *J. Comp. Phys.* V. 227, P. 3595–3624 / A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams // *Journal of Computational Physics*. — 2009. — V. 228. — № 24. — P. 8985–9000.

130. Shchepetkin, A. F. Quasi-monotone advection schemes based on explicit locally adaptive dissipation / A. F. Shchepetkin, C. McWilliams // *Month. Weather Review*. — 1998. — V. 26. — P. 1541–1580.
131. Shchepetkin, A. F. The regional oceanic modeling system (ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model / A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams // *Ocean modelling*. — 2005. — V 9. — № 4. — P. 347–404.
132. Shchepetkin, A. IZOGRID-A new tool for setting up orthogonal curvilinear grids for oceanic modeling / A. Shchepetkin // *EGU General Assembly Conference Abstracts*. — 2021. — C. EGU21-15325.
133. Shimizu K. Horizontal structure and excitation of primary motions in strongly stratified lake / K. Shimizu, J. Imberger // *Limnology and oceanography*. — 2007. — V. 52. — № 6. — P. 2641–2655.
134. Shimizu, K. Energetics and damping of basin-scale internal waves in a strongly stratified lake / K. Shimizu, J. Imberger // *Limnology and oceanography*. — 2008. — V. 53. — № 4. — P. 1574–1588.
135. Shimizu, K. Seasonal difference in the evolution of damped basin-scale internal waves in a shallow stratified lake / K. Shimizu, J. Imberger // *Limnology and oceanography*. — 2010. — V. 55. — № 3. — P. 1449–1462.
136. Smith, W. H. F. Wessel, P. Gridding with continuous curvature splines in tension / W. H. F. Smith, P. Wessel // *Geophysics* 1990. — Vol. 5. — № 3. — P. 293–305.
137. Umlauf, L. A generic length-scale equation for geophysical turbulence models. / L. Umlauf, H. Burchard // *Journal of Marine Research*. — 2003. — V. 61. — № 2. — P. 235–265.
138. Valipour, R. Near-inertial waves in Lake Erie / R. Valipour, D. Bouffard, — P. 1522–1535.
139. Volodko, O. S. Processing of in-situ measurements of surface velocity and temperature in lake Shira / O. S. Volodko, L. A. Kompaniets, A. P. Tolomeev,



- A. V. Drobotov, L. V. Gavrilova // CEUR Workshop Proceedings. — 2019. — V. 2534. — P. 321–326.
140. Volodko, O. S. Empirical orthogonal analysis of temperature and vertical velocity in lake Shira / O. S. Volodko, L. A. Kompaniets, L. V. Gavrilova. // International Multidisciplinary Scientific Geo Conference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM. — 2018. — V. 18. — № 3(1). — P. 251–258.
141. Volodko O. S. Analysis of vortex structure in a shallow stratified lake / O. S. Volodko, L. A. Kompaniets, L. V. Gavrilova // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM. — 2019. — V. 19. — № 3(1). — P. 41–48.
142. Volodko, O. Analysis of the velocity profile in Lake Shira in summer using principal component analysis / O. Volodko, L. Kompaniets, L. Gavrilova // International Multidisciplinary Scientific Geo Conference Surveying Geology and Mining Ecology Management, Conference Proceedings. — 2017. — V. 17. — № 31. — P. 831–838.
143. Wallace J. M. Empirical orthogonal representation of time series in the frequency domain. Part II: Application to the study of tropical wave disturbances / J. M. Wallace // Journal of Applied Meteorology and Climatology. — 1972. — Vol. 11. — № 6. — P. 893-900.
144. Wallace, J. M. Empirical orthogonal representation of time series in the frequency domain. Part I: Theoretical considerations / J. M. Wallace, R. E. Dickinson // Journal of Applied Meteorology. — 1972. — V. 11. — № 6. — P. 887–892.
145. Welander, P. Wind action on a shallow sea: some generalisations of Ekman's theory / P. Welander // Tellus. — 1957. — V. 9. — P. 45–52.
146. Welch, P. D. The use of fast Fourier transform to the estimation of power spectra / P. D. Welch // IEEE Transactions Audio and Electronics. — 1967. — № 15. — P. 70–73.

147. Witten, F. J. Steady wind-driven currents in a large lake with depth-dependent eddy viscosity / F. J. Witten, J. Thomas // *Journal of Physical Oceanography*. — 1976. — V. 6. — P. 85–92.
148. Zhou, F. Numerical simulation of the dual-core structure of the Bohai Sea cold bottom water in summer / F. Zhou, D. Huang, J. Su // *Chinese Science Bulletin*. — 2009. — V. 54. — № 23. — P. 4520–4528.

## Приложение 1. Описание акустических доплеровских профилографов течений

Акустические доплеровские профилографы течений ADCP имеют четыре ультразвуковых датчика-преобразователя для измерения скорости течения. Датчики размещены на головке прибора под углом  $20^\circ$  к его вертикальной оси, ширина луча  $3^\circ$ , мощность при передаче 35 Вт. Прибор может устанавливаться либо на судне (датчики-преобразователи направлены вниз), либо в стационарном положении на дне потока (датчики направлены вверх). Питание прибора – от постоянного напряжения 12 В. Габариты прибора 192 мм на 229 мм, вес на воздухе – 7,6 кг, в воде – 2,2 кг.

Прибор измеряет скорость течения, используя эффект Доплера, излучая звук на частоте 600 кГц (для ADCP 600 кГц), частоте 1200 кГц (для ADCP 1200 кГц) и принимая эхо, отраженное от рассеивателей звука в воде. Рассеивателями звука в водоемах являются мелкие частицы и планктон, а их перемещение в пространстве осуществляется течениями. В среднем они перемещаются с такой же горизонтальной скоростью, что и вода. Частота принятого эхо-сигнала имеет доплеровский сдвиг, обусловленный течением воды, захватившим рассеиватели звука, что является информацией о течении. Акустические профилографы помимо данных о течениях позволяют получать другую информацию, которая может быть полезна для изучения процессов в прибрежной зоне.

Прилагающееся к прибору программное обеспечение отображает в виде пространственных или временных разрезов две важные характеристики рассеянного сигнала – интенсивность обратного рассеяния и коэффициент объемного обратного рассеяния звука. Характеристики обратно рассеянного сигнала во многих случаях дают возможность определить положение термоклина, присутствие внутренних волн, а также некоторые другие гидрофизические параметры. Данные по интенсивности эха измеряются в единицах, пропорциональных децибелам.

Акустические профилографы способны определять трехмерную скорость вдоль всего столба жидкости на глубину до 14 м (ADCP 1200 кГц) или до 60 м (ADCP 600 кГц). При этом столб жидкости разбивается на слои, по каждому из которых измеряется средняя скорость. В зависимости от выбранного размера слоя определяется глубина, на которой прибор начинает измерения, и расстояние от дна или поверхности, на котором результаты измерений еще приемлемы по точности. В приборы встроен компас, что позволяет измерять компоненты течения в географических координатах. Точность компаса  $\pm 0.5^\circ$ .

Скорость течения измеряется в мм/с и может быть записана в следующих форматах:

- координаты луча – скорость измеряется параллельно по отношению к каждому лучу;
- координаты Земли – скорость преобразовывается в восточную, северную и вертикальную компоненты;
- координаты ADCP – подобны географическим координатам, но в данном случае получаем скорость, направленную вперед, в сторону и вертикально относительно прибора. Направление вперед – это направление, навстречу которому расположен третий датчик (рисунок П.1). Направление в сторону – это вправо от направления вперед.

На рисунке П.1 показано типичное расположение четырех датчиков ADCP.

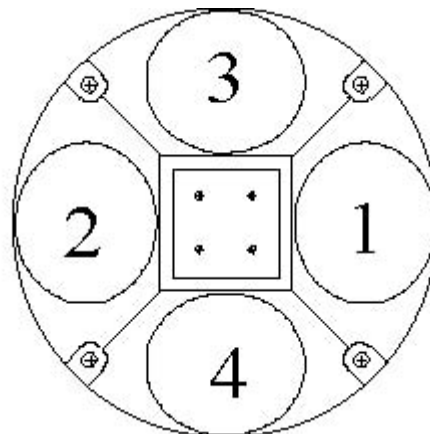


Рисунок П.1 – Расположение датчиков ADCP

Кроме скорости течения жидкости и интенсивности эха прибор фиксирует «корреляцию» и процент «хороших» данных. Под «корреляцией» понимается мера качества данных, измеренная в некоторых единицах таким образом (высокий сигнал/коэффициент шума, S/N), что ожидаемая «корреляция» должна быть равна 128. Процент «хороших» данных говорит о низкой «корреляции», большой ошибочной скорости и обнаружении рыбы.

Приборы имеют встроенную карту памяти на 574 Мб, комплекс программ для обработки данных, автономны, просты в управлении, нейтральны к агрессивным средам. Подходят для измерений на сравнительно небольших глубинах, дают общую картину распределения течений, данные по температуре и давлению.