На правах рукописи

Воронцова Евгения Алексеевна

МЕТОД ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОТСЕЧЕНИЯМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Дальневосточный федеральный университет» (ДВФУ), г. Владивосток

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Нурминский Евгений Алексеевич**
Официальные оппоненты:	**Шарый Сергей Петрович**, доктор физико-математических наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, старший научный сотрудник
	Зоркальцев Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, заведующий лабораторией
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», г. Москва

Защита состоится «___» __________ 2016 г. в ______ ч. на заседании диссертационного совета ДМ003.046.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6, конференц-зал ИВТ СО РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук http://www.ict.nsc.ru/ru/structure/discouncil/vorontsova

Автореферат разослан «___» __________ 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Лебедев А.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В математической экономике часто возникают задачи с неточными исходными данными. Принятие решений в практической деятельности экономических агентов осложняется необходимостью учета большого количества разнообразных факторов. Часто информация о воздействии данных факторов и их взаимосвязях является неполной. В качестве модели описания неопределенных данных можно использовать вероятностно-статистическую, нечеткую и интервальную модели.

В *интервальной* модели описания данных, которая рассматривается в работе, неопределенность параметра x описывается только границами его возможных значений, т.е. задается интервалом $x \in [x_{min}, x_{max}]$. Интервалы неопределенности позволяют описать неоднозначные, вариабельные и/или неточные исходные данные. Все значения внутри интервала предполагаются равновозможными. Математические методы интервального анализа представлены в трудах отечественных и зарубежных ученых Г. Алефельда, Е.Г. Анциферова, Л.Т. Ащепкова, А.П. Вощинина, М. Джеррелла, С.И. Жилина, А.В. Лакеева, Р. Мура, И. Рона, З. Румпа, С.П. Шарого, И.А. Шарой, Ю.И. Шокина и многих других авторов.

В ряде прикладных экономических задач интервальная модель оказывается наиболее предпочтительной [1]. Одним классом таких задач, который рассматривается в диссертации, является интервальная линейная задача о допусках для балансового уравнения В.В. Леонтьева [2] $x = Cx + y$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор объемов продукции по n отраслям, $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор объемов конечного потребления по этим отраслям, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица коэффициентов прямых производственных затрат. В интервальном уравнении Леонтьева вместо точечных значений коэффициентов a_{ij} используют их оценки сверху и снизу. Т.е. коэффициенты прямых производственных затрат известны лишь с некоторой интервальной неопределённостью [3,4] : $c_{ij} \in \boldsymbol{c}_{ij}$ и $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$, где $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ – интервальная матрица. Здесь и далее интервалы и интервальные величины выделяются полужирным шрифтом, что соответствует междуна-

[1]См., например, Вощинин А.П. Задачи анализа с неопределенными данными – интервальность и/или случайность? // Рабочее совещание по интервальной матем. и методам распространения ограничений ИМРО'04, Новосибирск, 21-22 июня 2004 г. (в рамках междунар. конф. по вычисл. матем. МКВМ-2004). С. 147–158.

[2]Леонтьев В.В. Исследование структуры американской экономики. М.: Госстатиздат, 1958.

[3]Jerrell M.E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // Applications of interval computations / R.B. Kearfott, V. Kreinovich, ed. Kluwer, 1996. P. 133–143.

[4]Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. 1980. V. 48. P. 767–769.

родному стандарту обозначений в интервальном анализе[5]. Вектор конечного потребления y также становится интервальным: $y \in \boldsymbol{y}$, т.е. потребителям достаточно не какого-то конкретного значения объема потребления, а нахождения этого объема потребления в определенном «коридоре» – интервале $\boldsymbol{y}$.

Одним из наиболее перспективных в настоящее время подходов к исследованию разрешимости интервальной линейной задачи о допусках (ЛЗД) является использование *распознающего функционала* С.П. Шарого [6]. При этом возникает задача максимизации распознающего функционала. Поскольку распознающий функционал является глобально вогнутым и недифференцируемым, одной из вычислительных задач, которую требуется решить в работе, является задача выпуклой оптимизации недифференцируемых функций.

Разработка нового метода решения данной оптимизационной задачи имеет теоретическую и практическую значимость не только для исходной в работе линейной задачи о допусках для интервального уравнения Леонтьева, но и для множества других практических задач, связанных с принятием рациональных инженерных или экономических решений, которые при формализации сводится к задачам математического программирования (МП). Важным подклассом задач МП является класс задач выпуклого программирования (целевая функция и множество ограничений задачи выпуклы).

В данной работе предлагается новый метод решения экстремальных задач без ограничений для выпуклых недифференцируемых функций. Задачи имеют следующую постановку: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – вектор n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ с обычным скалярным произведением xy; $f(x)$ – выпуклая, не обязательно непрерывно дифференцируемая функция. Также в работе данные методы применяются для определения разрешимости ЛЗД для интервальной модели межотраслевого экономического баланса.

Численные методы решения задач недифференцируемой оптимизации (НДО) можно классифицировать по формальным или содержательным признакам. В зависимости от того, известна ли заранее структура минимизируемой функции, можно выделить методы минимизации целевых функций с известной структурой и методы **оракульного типа**. Методы, предлагаемые в данной работе, являются методами оракульного типа (единственная инфор-

[5] Kearfott R.B., Nakao M., Neumaier A., Rump S., Shary S.P., van Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. **URL:** `http://www.nsc.ru/interval/INotation.pdf`.

[6] Шарый С.П. Разрешимость интервальных линейных уравнений и анализ данных с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 111–125.

мация, необходимая для работы методов, – возможность вычислить значение целевой функции и один из ее субградиентов в заданной точке).

Большинство оракульных численных методов решения задач НДО без ограничений можно условно разделить на две группы: **субградиентные алгоритмы**, впервые предложенные в работах Н.З. Шора, и **bundle-методы**, получившие свое развитие в работах К. Лемарешаля, Р. Миффлина, К. Кивела. Методы, предлагаемые в главе 2 диссертации, можно условно отнести к группе bundle-методов, но с важной особенностью – работа методов происходит в расширенном сопряженном пространстве субградиентов и значения сопряженной функции Лежандра-Фенхеля, и исходная задача заменяется на неэкстремальную задачу вычисления сопряженной функции.

Целью работы является исследование и применение методов определения разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого экономического баланса; разработка, исследование и доказательство сходимости эффективных численных методов из семейства методов отделяющих плоскостей, предназначенных для решения задач выпуклой оптимизации недифференцируемых функций; установление практической вычислительной эффективности разработанных методов; а также их применение для решения задач интервального анализа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать и исследовать метод отделяющих плоскостей (МОП) с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения задачи оптимизации выпуклых недифференцируемых функций.
2. Разработать и исследовать модификацию алгоритма одномерного поиска, предназначенного для минимизации одномерных кусочно-гладких функций.
3. Выяснить практическую скорость сходимости разработанных численных методов с проведением сравнительного тестирования.
4. Применить разработанный комплекс программ для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса.
5. Исследовать другие подходы к решению линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса.

Методы исследования. В работе применяются современные методы интервального анализа, математического программирования и теории выпуклого анализа. С помощью вычислительных экспериментов осуществляется проверка теоретических результатов.

На защиту выносятся следующие результаты, соответствующие трем пунктам (3, 4, 5) паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по физико-математическим наукам:

1. Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения задач безусловной оптимизации выпуклых недифференцируемых функций многих переменных.
2. Модификация быстрого алгоритма одномерного поиска, предназначенного для минимизации одномерных кусочно-гладких функций.
3. Результаты вычислительных экспериментов на сериях тестовых задач, позволившие выяснить практическую скорость сходимости разработанных методов методом сравнительного тестирования с построением профилей производительности предложенных методов и других известных методов негладкой оптимизации. Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности предложенных методов.
4. Комплекс программ, предназначенный для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса.
5. Результаты применения разработанного комплекса программ для решения ряда задач прогнозирования межотраслевого баланса региональной экономики.

Научная новизна.

1. Предложен новый эффективный численный метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, предназначенный для решения задач выпуклой НДО. Доказана его сходимость.
2. Разработан и теоретически обоснован быстрый алгоритм одномерного поиска для решения задач одномерной минимизации недифференцируемых функций. Данный алгоритм имеет квадратичную скорость сходимости, что позволяет успешно использовать его на каждой итерации МОП с дополнительными отсечениями для решения вспомогательной задачи минимизации.
3. Создана и протестирована программная реализация предложенных методов. Проведена сравнительная оценка практических реализаций ряда методов НДО с построением профилей производительности.
4. Предложенные в работе методы успешно применены для исследования разрешимости линейной задачи о допусках для интервального уравнения межотраслевого баланса региона (Приморского края).

Достоверность полученных в работе результатов обусловлена строгостью математических доказательств, использованием апробированных научных методов и подтверждается корректным теоретическим анализом сходимости предложенных методов, а также результатами вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что разработаны математические методы решения определенного класса интервальных задач, которые одновременно являются дальнейшим развитием исследований в области построения методов выпуклой НДО оракульного типа.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения разработанного комплекса программ не только для представленного в работе класса интервальных задач, но и для решения различных задач НДО, часто возникающих в приложениях. В качестве одного из примеров разработанные методы были успешно применены для исследования разрешимости интервальных систем линейных уравнений с использованием распознающего функционала множества решений. Кроме того, в работе приведена модель решения линейной задачи о допусках для интервального уравнения межотраслевого баланса, написанная на языке моделирования AMPL, которую можно использовать для исследования возможностей численного решения данной задачи с помощью различных онлайн-солверов.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проекта РФФИ № 13-07-12010-офим «Облачные и грид-технологии для задач транспортного моделирования» (2013–2015 гг.), а также в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с МОН, уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

Представление работы. Основные результаты работы докладывались на: XV, XVI Байкальской междунар. шк.-сем. «Методы оптимизации и их приложения»; Всерос. научной конф. «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления», 11–17 сент. 2011 г., г. Владивосток; 3-й междунар. конф. «Матем. моделирование, оптимизация и информационные технологии», 19–23 марта 2012 г., г. Кишинэу, респ. Молдова; XXXVI, XXXVIII Дальневосточной матем. шк.-сем. им. акад. Е.В. Золотова; III International conference "Optimization and applications"(OPTIMA-2012), September 23–30, 2012, Costa da Caparica, Portugal; Всерос. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные проблемы математики», 2–5 дек. 2014 г., г. Уссурийск; научных семинарах каф. матем. методов в экономике Дальневосточного федерального университета; научном семинаре лаб. 3.3 Института динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск); VI Междунар. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения», 28/06/2015 – 04/07/2015, г. Омск.

Публикации и личный вклад автора. По результатам исследований опубликовано 14 печатных работ [1]– [14], из которых две [3,4] в соавторстве и три [1–3] в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены Е.А. Воронцовой самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка обозначений и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 135 страниц с 29 рисунками и 8 таблицами. Список литературы содержит 156 наименований.

Основное содержание работы

Во **Введении** приведена постановка исследуемой задачи, обоснована актуальность темы исследования, показана научная новизна и практическая значимость работы. Приведена информация об апробации результатов.

Первая глава посвящена описанию интервальной модели межотраслевого экономического баланса (§ 1.1), постановке линейной задачи о допусках для этой модели и описанию ее экономического смысла (§ 1.2). Поскольку оказывается, что при решении интервальной ЛЗД методом распознающего функционала возникает задача негладкой оптимизации, в § 1.3 приводится краткий обзор существующих методов решения задач негладкой оптимизации. Здесь также приведены базовые определения и результаты интервального анализа и выпуклого анализа, используемые в следующих главах.

Рассмотрим интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) вида $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{b}_i\}_{i=1}^{m}$.

Определение 1. *Допусковым множеством решений ИСЛАУ называется множество* $\Xi_{tol}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})\, (\exists\, b \in \boldsymbol{b})\, (Ax = b)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\, A \in \boldsymbol{A})\, (Ax \in \boldsymbol{b})\}$*, образованное всеми такими векторами* $x \in \mathbb{R}^n$*, что произведение* Ax *попадает в* $\boldsymbol{b}$ *для любого* $A \in \boldsymbol{A}$.

В диссертации рассматривается *модель межотраслевого экономического баланса* $x = Cx + y$, т.е. классическое уравнение В.В. Леонтьева, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор объемов продукции по n отраслям, $y \in \mathbb{R}^n$ – вектор объемов конечного потребления по n отраслям, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица коэффициентов прямых производственных затрат.

В интервальном уравнении Леонтьева вместо точечных значений коэффициентов c_{ij} используют их оценки сверху и снизу. Т.е. коэффициенты прямых производственных затрат известны лишь с некоторой интервальной неопределённостью[7,8], что является вполне логичным для масштабов всей отрасли: $c_{ij} \in \boldsymbol{c}_{ij}$ и $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})_{i,\,j=1}^{n,\,n}$, где $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ – интервальная матрица. Вектор конечного потребления y также становится интервальным: $y \in \boldsymbol{y}$. Итак, *интервальный аналог уравнения Леонтьева* записывается в следующем виде: $x = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{y}$. Если в вещественном случае решение системы уравнений Леонтьева относительно x позволяет спрогнозировать необходимые для запланированного конечного потребления y объемы производства по отраслям, то в интервальном случае важная прикладная задача для интервального уравнения Леонтьева может быть сформулирована следующим образом: для каких объемов производства x при любых значениях коэффициентов прямых производственных затрат $c_{ij} \in \boldsymbol{c}_{ij}$ конечное потребление будет принадлежать заданным интервалам $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n$?

Множество всех таких векторов x образует *допусковое множество решений* ИСЛАУ $(E - \boldsymbol{C})x = \boldsymbol{y}$, где E – единичная матрица размера $n \times n$.

Тем не менее, прямое описание допускового множества решений как выпуклого многогранника для систем большой размерности является слишком трудоемким. Поэтому вместо прямого описания допускового множества гораздо проще найти некоторые его *оценки*, а еще лучше – подмножества. Исходная задача заменяется на *линейную задачу о допусках.*

Определение 2. *Линейной задачей о допусках называется задача нахождения (по возможности, большего) бруса, который содержится в допусковом множестве решений данной интервальной линейной системы уравнений.*

Важной подзадачей ЛЗД является задача исследования ее разрешимости. Перспективным методом, предназначенным для полного исследования разрешимости ЛЗД, представляется техника, основанная на использовании *распознающего функционала* множества решений.

Теорема 1. [9] *Пусть даны интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный m-вектор правой части $\boldsymbol{b}$, а выражением*

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x;\, \boldsymbol{A},\, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\, \boldsymbol{b}_i - \left| \mathrm{mid}\, \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} x_j \right| \right\} \qquad (1)$$

определяется распознающий функционал $\mathrm{Tol} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{b})$ равносильна выполнению неравенства* $\mathrm{Tol}(x; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ge 0$.

[7] Rohn J. Input-output model with interval data // Econometrica. 1980. V. 48. P. 767–769.

[8] Jerrell M.E. Applications of interval computations to regional economic input-output models // Applications of interval computations / R.B. Kearfott, V. Kreinovich, ed. Kluwer, 1996. P. 133–143.

[9] Shary S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85.

Кроме того, функционал $\mathrm{Tol}(x)$ *является вогнутым и достигает конечного максимума на всём пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Итак, для практического применения метода распознающего функционала при исследовании разрешимости ЛЗД для интервального уравнения Леонтьева необходимо решить задачу максимизации недифференцируемой вогнутой функции, поскольку распознающий функционал $\mathrm{Tol}(x)$ является негладкой функцией. Далее в главе 1 приводится обзор существующих методов решения этой задачи и обосновывается необходимость разработки новых методов ее решения.

Основным понятием выпуклого анализа, используемым в работе, является определение *субдифференциала* ∂f функции f.

Множество

$$\partial f(x_0) = \{g \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall x \in \mathrm{dom}\, f \; f(x) - f(x_0) \geq g(x - x_0)\,\}$$

называется *субдифференциалом* функции f в точке x_0. Элемент $g \in \partial f(x_0)$ называется *субградиентом* функции $f(x)$ в точке x_0. Если $f(x)$ конечна в окрестности точки x_0, выпукла и дифференцируема в точке x_0, то субградиент $g(x_0)$ единственен и совпадает с градиентом функции $f(x)$ в точке x_0.[10]

Вторая глава посвящена построению и численному тестированию нового эффективного метода отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями, который предназначен для решения задач недифференцируемой минимизации выпуклых функций.

В $\mathbb{R}^n$ рассматривается задача безусловной выпуклой НДО

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = f(x^*), \tag{2}$$

где $f(x)$ – выпуклая недифференцируемая функция. Предполагается, что задача (2) имеет решение x^*, возможно, неединственное.

Для этой задачи в § 2.1 предложен метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями. Предполагается, что вся доступная информация о целевой функции $f(x)$ задачи (2) предоставляется субградиентным оракулом первого порядка, т.е. в произвольной точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ можно определить только значение функции $f(\bar{x})$ и субградиент $g \in \partial f(\bar{x})$, произвольно выбранный из субдифференциала $\partial f(\bar{x})$. Предложенный метод не требует дополнительной информации о внутренней структуре оптимизируемой функции. Данный метод является результатом дальнейшего развития и усо-

[10] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

вершенствования методов типа[11,12].Указанные методы основываются на идее замены исходной задачи минимизации на эквивалентную задачу вычисления значения в точке $g = 0$ соответствующей сопряженной функции Лежандра-Фенхеля $f^*(g) = \sup\limits_x \{gx - f(x)\}$ для целевой функции задачи.

Задача (2) эквивалентна задаче нахождения корня субдифференциального отображения $0 \in \partial f(x^*)$. При этом

$$f(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = -\sup_x\{0\cdot x - f(x)\} = -f^*(0), \tag{3}$$

т.е. точка x^* удовлетворяет необходимым, а, следовательно, и достаточным условиям экстремума для задачи безусловной выпуклой минимизации. С другой стороны, задачу (3) можно интерпретировать как задачу нахождения самой нижней точки пересечения надграфика сопряженной функции $\operatorname{epi} f^* = \{(g,\mu)\,|\, g \in \mathbb{R}^n,\, \mu \geq f^*(g)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ с вертикальной прямой $\{0\} \times \mathbb{R}_+$.

В МОП надграфик сопряженной функции f^* аппроксимируется внутренним и внешним образом выпуклыми полиэдральными множествами D и U. Так же, как в bundle-методах, аппроксимации $D \subset \operatorname{epi} f^*$ и $U \supset \operatorname{epi} f^*$ строятся на основе собранной к началу k-той итерации информации о значениях $f^*(g_i)$ и $g_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2, ..., k$. Эта информация фактически содержится в вычисляемой по ходу работы алгоритма последовательности точек $\{x_i,\, f(x_i),\, g_i \in \partial f(x_i)\}_{i=1}^k$, поскольку $f^*(g_i) = g_i x_i - f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ в силу теоремы Фенхеля-Моро. Надграфик сопряженной функции $\operatorname{epi} f^*$ содержится в каждом из множеств $H_i = \{(g,\varepsilon)\,|\,\varepsilon - gx_i \geq f^*(g_i) - g_i x_i = -f(x_i)\}$, $i = 1, 2, ...$ Кроме того, $\operatorname{epi} f^*$ содержит множество $R_i = \{(g_1,\, f^*(g_1)),\, (g_2,\, f^*(g_2)),\, \ldots,\, (g_i,\, f^*(g_i))\} + \{0\} \times \mathbb{R}_+$. Тогда внешняя аппроксимация U на k-той итерации строится как $U_k = \bigcap\limits_{i=1,2,\ldots,k} H_i$, а внутренняя аппроксимация D строится как $D_k = \operatorname{conv}(\{R_i, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k\})$. По мере вычисления новых точек $(g_i,\, f^*(g_i))$ сопряженного пространства эти аппроксимации будут соответствующим образом уточняться, причем эту процедуру можно организовать так, чтобы, по крайней мере, одна из границ сходилась к $f^*(0)$.

Модификация МОП, предлагаемая в диссертационной работе, направлена на улучшение релаксационных свойств алгоритма и приводит, в частности, к повышению его вычислительной эффективности. Базовый вариант МОП не гарантирует монотонность по вычисляемым значениям целе-

[11] Nurminski E.A. Separating plane algorithms for convex optimization // Math. Program. 1997. Vol. 76. P. 373–391.

[12] Нурминский Е.А. Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 133–137.

вой функции, особенно при подходе к экстремуму. Это не только затрудняет нахождение минимума, но и фактически замедляет сходимость метода. Для улучшения свойства монотонности метода предлагается ввести дополнительное отсечение по верхней оценке $\bar{v}$ значения $f^*(0)$. Такое отсечение apriori дополнительно локализует потенциальные точки надграфика f^*, которые будут в дальнейшем добавляться при уточнении его аппроксимации. В вычислительном плане значение $\bar{v}$ может быть получено непосредственно из внутренней аппроксимации epi f^*:

$$\bar{v} = \min_{(0,\varepsilon)\,\in D} \varepsilon \geq \min_{(0,\varepsilon)\,\in\,\mathrm{epi}\ f^*} \varepsilon = f^*(0) = -f(x^*) \geq \min_{(0,\varepsilon)\,\in U} \varepsilon,$$

что сводится к решению задачи линейного программирования (ЛП)

$$\bar{v} = \min_{\substack{\tau = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f^*(g_i),\ 0 = \sum_{i=1}^{k} \beta_i g_i, \\ \beta_i \geq 0,\ i=1,\ldots,k;\ \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1}} \tau. \tag{4}$$

Обновления аппроксимаций на k-той итерации строятся с помощью построения гиперплоскости, отделяющей точку ω_k – решение задачи минимизации $\inf\limits_{(0,\omega)\,\in U_k} \omega$ – и множество внутренней аппроксимации D_k. Эта плоскость фактически характеризует разницу между D_k и U_k в окрестности $(0,\ f^*(0))$ и может быть использована для их сближения. В силу выпуклости D_k такая гиперплоскость может быть построена с помощью ортогонального проектирования точки w_k на D_k. Детали представлены в алгоритме на стр. 13.

В модифицированном МОП решается задача построения опорной гиперплоскости к усеченному надграфику f^*:

$$\sup_{(g,\varepsilon)\,\in\,\mathrm{epi}\,f^*} \{gx - \varepsilon\}, \tag{5a}$$

$$\varepsilon \leq \bar{v} \tag{5b}$$

которая отличается от подзадачи оригинального МОП наличием дополнительного ограничения (5b). Рис. 1 иллюстрирует идею такого дополнительного отсечения.

Задачу (5a)-(5b), как и в стандартном МОП, можно легко перевести в пространство прямых переменных $x \in \mathbb{R}^n$, однако при этом появляется вспомогательная задача одномерной минимизации с достаточно неожиданной целевой функцией. Действительно, вводя для ограничения (5b) двойственную переменную λ, получим

$$\sup_{(g,\varepsilon)\,\in\,\mathrm{epi}\,f^*;\ \varepsilon\,\leq\,\bar{v}} \{gx - \varepsilon\} = -\bar{v} + \inf_{\lambda \geq 1} \Big\{ \lambda\big(\bar{v} + f(\lambda^{-1}x)\big) \Big\} = -\bar{v} + \inf_{\lambda \geq 1} \varphi(\lambda,\ x). \tag{6}$$

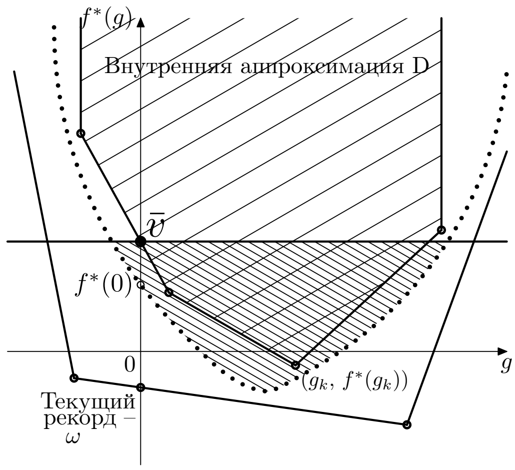

Рис. 1. МОП с дополнительными отсечениями

Показана выпуклость функции $\varphi(\lambda,\, x)$ по совокупности переменных $(\lambda,\, x)$. Для решения задачи одномерной НДО (6) предложен быстрый алгоритм одномерного поиска, подробно описанный в **главе 3** диссертационной работы.

Окончательно, **алгоритм** метода отделяющих плоскостей с отсечениями SPACLIP выглядит следующим образом:

Шаг 0. Инициализация. Определить начальную точку минимизирующей последовательности x_0 и др.

Шаг 1. Найти $\inf\limits_{(0,\omega)\,\in\, U_k} \omega = \omega_k$, где U_k – k-я внешняя аппроксимация надграфика сопряженной функции f^*. Данную задачу можно решить рекуррентно:

$$\omega_k = \inf_{(0,\omega)\,\in\, U_k} \omega = \inf_{(0,\omega)\,\in\, U_{k-1} \cap \{(g,\omega)\,|\, g x_{k-1} - \omega \le f(x_{k-1})\}} \omega =$$
$$= \max\{\inf_{(0,\omega)\,\in\, U_{k-1}} \omega,\ \inf_{\omega \ge -f(x_{k-1})} \omega\} = \max\{\omega_{k-1},\ -f(x_{k-1})\},\ k \ge 1. \quad (7)$$

При этом можно считать, что $\omega_0 = -\infty$. Фактически $-\omega_k$ является рекордом функции f, полученным за предыдущие k итераций.

Шаг 2. Найти вектор $\bar{z}^k = (z^k,\, \xi_k)$ – проекцию точки $(0,\, \omega_k)$ на полиэдр D_k внутренней аппроксимации надграфика сопряженной функции.

Шаг 3. Вычислить очередное приближение к решению задачи (2): $x_k = -z^k \,/\, \xi_k$.

Шаг 4. Определить $\bar{v}$ – уровень отсечения верхней части надграфика $\operatorname{epi} f^*$, для чего решить задачу ЛП (4). Если задача (4) не имеет решения, перейти к *Шагу 7*.

Шаг 5. Решить задачу одномерной НДО (6). Пусть λ_k – найденное на k-й итерации решение данной задачи.

Шаг 6. Модифицировать приближение x_k по формуле: $x_k = \lambda_k^{-1} x_k$. В алгоритме SPACLIP, в отличие от МОП, при добавлении очередной точки в аппроксимацию epi f^*, субградиент оптимизируемой функции вычисляется не в тестируемой точке x_k, а в масштабируемой относительно x_k точке $\lambda_k^{-1}x_k$.

Шаг 7. Вычислить $g_k \in \partial f(x_k)$, $f^*(g_k) = g_k x_k - f(x_k)$, добавить пару $(g_k, f^*(g_k))$ к полиэдру D_k: $D_{k+1} = \mathrm{conv}(\{D_k,\ (g_k,\ f^*(g_k))\})$.

Шаг 8. Если выполняется какое-либо из условий прекращения работы алгоритма, то завершить работу. Иначе перейти к *Шагу 1.*

В § 2.2 доказана сходимость предлагаемого метода.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ – конечная выпуклая функция, $f(0) = 0$, $\omega_* = = -\min f(x) < \Omega < \infty$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \omega_k = \omega_*$.*

В § 2.3 приведены результаты вычислительных экспериментов сравнительного тестирования разработанного метода SPACLIP с другими известными методами решения задач НДО. Методика тестирования основана на построении профилей производительности[13] . Показано, что на приведенных задачах МОП с дополнительными отсечениями (алгоритм SPACLIP) является предпочтительным. Преимущество предложенного метода возрастает с увеличением размерности задачи и требуемой точности решения задачи.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [2, 3, 8–10, 12, 14].

На каждой итерации МОП с дополнительными отсечениями необходимо решать вспомогательную задачу одномерной минимизации выпуклой негладкой функции. Для ее решения применяется быстрый алгоритм одномерного поиска, разработанный в **третьей главе** диссертации.

Рассматривается задача безусловной выпуклой НДО в одномерном пространстве $\mathbb{R}$:

$$\min_{\lambda\in[a,b]} \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda^*). \tag{8}$$

Как и в главе 2, предполагается, что вся доступная информация о функции $\varphi(\lambda)$ предоставляется субградиентным оракулом.

Основная идея алгоритма заключается в построении на каждой итерации, ограниченной определенным отрезком, разрывной кусочно-линейной аппроксимации субдифференциала целевой функции $\partial\varphi(\lambda)$. Предложенный в данной главе работы алгоритм является дальнейшим развитием работы[14] .

Для выпуклой функции в силу ее дифференцируемости почти всюду выполняется аналог формулы Ньютона-Лейбница: $\varphi(b) - \varphi(a) = \int\limits_a^b g_\varphi(t)dt$, где $a < b$; $a, b \in \mathrm{int\,dom}\,\varphi$; для любого $\lambda \in \mathrm{int\,dom}\,\varphi$ $g_\varphi(\lambda) \in \partial\varphi(\lambda)$. Это

[13] Dolan E., More J. Benchmarking optimization software with performance profiles // Math. Program. 2002. Vol. 91. P. 201–213.

[14] Nurminski E. A quadratically convergent line-search algorithm for piecewise smooth convex optimization // Optimization Methods and Software. 1995. № 6. P. 59–80.

позволяет, используя вычисленные в определенных точках значения функции $\varphi(\lambda)$, уточнять кусочно-линейные аппроксимации ее субградиентов $g_\varphi(\lambda)$.

Важной особенностью аппроксимации субдифференциала $\partial\varphi(\lambda)$ является ее разрывный характер, который отражает существенную недифференцируемость функции $\varphi(\lambda)$, поэтому в ходе вычислений происходит уточнение как линейных участков $g_\varphi(\lambda)$, так и местоположения и величины разрыва.

Далее в третьей главе представлены результаты тестирования реализованного быстрого алгоритма одномерного поиска на ряде задач одномерной НДО вида $\varphi(\lambda) = \max\{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)\}$, имеющих различные типы функций φ_1 и φ_2. Проведенное тестирование алгоритма подтвердило на практике возможность достижения квадратичной скорости сходимости алгоритма одномерного поиска в широком диапазоне характеристик задач. Также было проведено сравнительное тестирование быстрого алгоритма одномерного поиска и других возможных методов решения проблем одномерной НДО на серии однотипных случайно сгенерированных задач. В этой серии задач рассматривались функции вида $\varphi(x) = \max\{10x^3,\ -10(x-\alpha)^3\},\ 1 \le \alpha \le 2001$, где параметр α выбирался случайным образом. С помощью алгоритма одномерного поиска, метода деления пополам и метода золотого сечения была решена серия из 2000 задач данного вида. Эффективность методов оценивалась по количеству необходимых вычислений значений функции и субградиента и по процессорному времени, которое потребовалось методам для решения задачи. Результаты сравнительного тестирования показали, что предложенный алгоритм одномерного поиска демонстрирует преимущество над дихотомией и, тем более, над методом золотого сечения, и по количеству вычислений значений функции и субградиента, и по затраченному процессорному времени.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [1, 4–7].

Четвертая глава посвящена практическому применению методов, разработанных в главах 2 и 3, к ЛЗД для интервального уравнения межотраслевого баланса, сформулированной в главе 1. В § 4.1 приводится описание модели задачи на языке моделирования AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming).[15]

После описания модели необходимо выбрать программный пакет для решения оптимизационной задачи. Наиболее известным и крупнейшим в мире сервером, предоставляющим возможность решать задачи оптимизации в режиме онлайн является NEOS (Network-Enabled Optimization Server) (**URL:** `http://neos-server.org/neos/`). Были сделаны попытки решить представленную в разделе 4.2.2 задачу оценки перспектив развития региональной эко-

[15] Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. AMPL. A Modeling Language for Mathematical Programming. 2nd ed. Canada: Thomson Learning Academic Resource Center, 2003.

номики (Приморского края).Ни один из программных продуктов, представленных на сервере NEOS и предназначенных для решения задач нелинейного программирования и/или задач НДО, с задачами, представленными в разделе 4.2.2, не справился. Поэтому был создан программный комплекс для решения подобных задач, включающий программные реализации предложенных в главах 2 и 3 численных методов. В ходе работы над комплексом программ была использована свободно распространяемая программа для исследования разрешимости интервальной ЛЗД `TOLSOLVTY` С.П. Шарого (ИВТ СО РАН, г. Новосибирск).Программа выложена на сервере Института вычислительных технологий СО РАН по адресу **URL:** `http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/index.php`. В данной программе для максимизации распознающего функционала используется вариант алгоритма суперградиентного подъема с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных суперградиентов [16]. На основе данной программы был написан ее модифицированный вариант на языке `octave`, использующий для решения задачи негладкой оптимизации численный метод `SPACLIP`. Общая структура созданного комплекса программ данной диссертационной работы приведена на рис. 2.

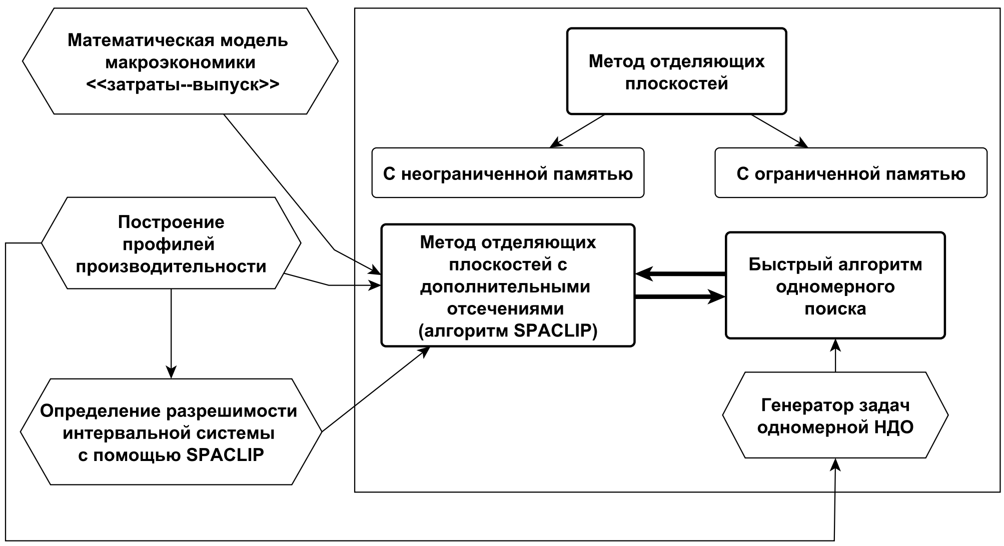

Рис. 2. Структура созданного комплекса программ

Для решения задач оценки перспектив развития региональной экономики были использованы данные таблиц «затраты – выпуск» для Приморского края за 2011 г.[17], а также статистические данные ежегодника «При-

[16] Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 51–59.

[17] Машунин Ю.К., Машунин И.А. Прогнозирование развития экономики региона с использованием таблиц «затраты – выпуск» // Экономика региона. 2014. № 2. С. 276–289.

морский край. Социально-экономические показатели» за 2013 год [18]. Были получены результаты прогнозов увеличения конечного потребления в одной конкретной отрасли экономики Приморья – сельском хозяйстве. Сравнение различных подходов к решению данных практических задач показало преимущество предложенных в работе методов.

Для точечной матрицы A в интервальной системе $Ax = \boldsymbol{b}$ объединенное и допусковое множество решений совпадают. Распознающий функционал также вычисляется по формуле (1), поэтому описанный в **главе 1** метод исследования разрешимости ЛЗД также можно использовать для определения разрешимости ИСЛАУ с точечными матрицами. В § 4.2.3 описаны практические результаты решения таких задач большой размерности с применением МОП с отсечениями, разработанного в **главе 2** диссертационной работы. Максимальное количество элементов матрицы A (неразреженной) для задачи, которую удалось решить, составило 10^7 ($m = 10\,000$, $n = 1\,000$).

Результаты главы 4 опубликованы в работах [11, 13].

В **заключении** сформулированы основные результаты проведенного исследования.

1. Сделано описание интервальной модели межотраслевого экономического баланса. Создана модель задачи на языке моделирования AMPL. Изучены, описаны и применены на практике различные способы исследования разрешимости ЛЗД для этой модели.
2. Предложен быстрый алгоритм одномерного поиска для задач НДО, имеющий квадратичную скорость сходимости. Проведено теоретическое обоснование данного алгоритма. Сделана реализация данного алгоритма на языке программирования octave. Проведены вычислительные эксперименты для сравнительного анализа алгоритма с другими методами одномерной минимизации.
3. Предложен и обоснован новый эффективный численный метод отделяющих плоскостей с отсечениями, предназначенный для решения многомерных задач выпуклой НДО. Метод относится к оракульному типу. Доказана его сходимость. Сделаны реализации МОП и МОП с отсечениями (SPACLIP) на octave.
4. Создан комплекс проблемно-ориентированных программ для решения задач негладкой минимизации методами семейства отделяющих плоскостей, для определения разрешимости ЛЗД для ИСЛАУ методом распознающего функционала, для построения профилей производительности вычислительных методов. Программный комплекс применяется для

[18] Приморский край. Социально-экономические показатели: Статистический ежегодник. Владивосток: Приморскстат, 2014.

проведения вычислительных экспериментов с применением технологии математического моделирования.

5. Проведена серия вычислительных экспериментов с построением профилей производительности для сравнительного анализа МОП, SPACLIP и других методов негладкой минимизации. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность и надежность предложенных методов для решения задач НДО и их приемлемую скорость сходимости.
6. Методы, предложенные в работе, успешно применены для решения ряда задач с применением методов интервального анализа. В частности, решена задача оценки перспектив развития экономики Приморского края. Сравнение предложенных в работе новых методов с другими известными методами при решении практических задач показало очевидные преимущества предложенных в работе методов.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. *Воронцова, Е. А.* Быстро сходящийся алгоритм линейного поиска в недифференцируемой оптимизации / Е. А. Воронцова // Информатика и системы управления. 2012. № 2. С. 39–48.
2. *Vorontsova, E. A.* A Projective Separating Plane Method with Additional Clipping for Non-Smooth Optimization // WSEAS Transactions on Mathematics. Vol. 13. 2014. P. 115–121.
3. *Воронцова, Е. А.* Синтез секущих и отделяющих плоскостей в одном методе негладкой оптимизации / Е. А. Воронцова, Е. А. Нурминский // Кибернетика и системный анализ. Т. 51, № 4. 2015. С. 137–150.

Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ

4. *Нурминский, Е. А.* Быстрый алгоритм линейного поиска в кусочно-гладкой выпуклой оптимизации (Fast line-search) / Е. А. Нурминский, Е. А. Воронцова. Свид. о гос. рег. прогр. для ЭВМ № 2011615977 (02.08.2011).

Прочие публикации по теме диссертации

5. *Воронцова, Е. А.* Использование одномерного поиска в релаксационных субградиентных методах / Е. А. Воронцова // Фундаментальные и прикл. вопр. механики и процессов управления. Всерос. научн. конф., посвящ. 75-летию со дня рожд. акад. В.П. Мясникова: сб. докл. [Электронный ресурс]. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 565–569.
6. *Воронцова, Е. А.* О быстром алгоритме линейного поиска в кусочно-гладкой выпуклой оптимизации / Е. А. Воронцова // Тр. XV Бай-

кальской междунар. шк.-сем. «Мет. оптимизации и их приложения». Т.2 «Матем. програм.». Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. С. 44–48.

7. *Воронцова, Е. А.* Исследование быстрого алгоритма линейного поиска в негладкой оптимизации / Е. А. Воронцова // Матер. 3-й междунар. конф. «Матем. моделир., оптимизация и информационные технол.», г. Кишинэу, респ. Молдова, 19–23 марта 2012 г. С. 265-–271.
8. *Воронцова, Е. А.* Метод отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // XXXVI Дальневосточная матем. шк.-сем. им. акад. Е.В. Золотова, 04 – 10 сент. 2012 г., Владивосток: сб. матер. [Электронный ресурс]. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2012. С. 459–461.
9. *Воронцова, Е. А.* Решение задач большой размерности методом отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // Тезисы докладов II Российско-монгольской конф. молодых ученых по матем. моделированию, вычислительно-информационным технол. и управлению (Иркутск (Россия) -– Ханх (Монголия), 25 июня -– 1 июля 2013 г.). Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 22.
10. *Воронцова, Е. А.* Метод отделяющих плоскостей для решения негладких экстремальных задач и его применение в транспортных задачах / Е. А. Воронцова // Тезисы докладов XVI Байкальской междунар. шк.-сем. «Мет. оптимизации и их приложения», 30/06/2014 – 06/07/2014. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2014. С. 97.
11. *Воронцова, Е. А.* Определение разрешимости интервальных систем линейных уравнений большой размерности / Е. А. Воронцова // Матер. XXXVIII Дальневост. матем. шк.-сем. им. акад. Е.В. Золотова, 01-05 сент. 2014. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2014. С. 508–511.
12. *Воронцова, Е. А.* Сравнительная оценка эффективности оптимизационных методов с построением профилей производительности / Е. А. Воронцова // Матер. Всерос. научно-практ. конф. студ., аспир. и молодых ученых «Современные проблемы матем.», 2–5 дек. 2014 г. Владивосток: ДВФУ, 2014. С. 49.
13. *Воронцова, Е. А.* Определение разрешимости интервальной линейной задачи о допусках методом отделяющих плоскостей с дополнительными отсечениями / Е. А. Воронцова // Матер. VI Междунар. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения», г. Омск, 28.06 – 4.07 2015 г. Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2015. С. 92.
14. *Vorontsova, E. A.* Separating plane algorithm with additional clipping for convex optimization / E. A. Vorontsova // III Internat. conf. «Optimization and applications» (OPTIMA-2012) Proceedings. Costa da Caparica, Portugal, Sept. 23–30, 2012. P. 254–255.