

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Зимин Антон Игоревич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗМЫВА СВЯЗНОГО ГРУНТА

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Захаров Юрий Николаевич

Новосибирск – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕКТИВНОГО И ДИФфуЗИОННОГО ПЕРЕНОСА СВЯЗНОГО ГРУНТА В ВОДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ТЕЧЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН	19
§ 1.1. Односкоростная дифференциальная модель движения трехкомпонентной смеси	21
1.1.1 Основные определения и предпосылки.....	21
1.1.2 Закон сохранения массы с учетом диффузии между компонентами.....	23
1.1.3 Закон сохранения количества движения	27
1.1.4 Итоговая система дифференциальных уравнений	29
1.1.5 Безразмерный вид модели.....	31
§ 1.2. Выбор соотношения для определения вязкости среды.....	35
§ 1.3. Численный алгоритм решения.....	38
1.3.1 Разностные сетки	40
1.3.2 Численные методы решения	45
1.3.3 Программная реализация	50
1.3.4 Течение жидкости в каверне с движущейся верхней стенкой	51
1.3.5 Протекание жидкости в канале постоянной ширины	54
ГЛАВА 2. РАЗМЫВ СВЯЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ТЕЧЕНИЯ.....	57
§ 2.1. Перенос и размыв примеси потоком жидкости	59

2.1.1 Перенос примеси в канале переменной ширины с каверной	60
2.1.2 Размыв примеси в канале с препятствием.....	64
2.1.3 Перенос намокшего связного грунта в воде	68
§ 2.2. Моделирование размокания внутренних слоев связного грунта.....	71
2.2.1 Алгоритм размокания	71
2.2.2 Размокание вещества под действием потока в канале	73
§ 2.3. Размыв грунта в лабораторном эксперименте Hole Erosion Test.....	81
2.3.1 Размыв стенок двухмерного канала потоком жидкости	82
2.3.2 Моделирование размыва боковых стенок течением в лабораторном тесте Hole Erosion Test (HET)	85
§ 2.4. Размыв и перенос связного грунта в трехмерном случае	87
2.4.1 Обрушение и распространение связного грунта в воде под действием силы тяжести	87
2.4.2 Размыв связного грунта вблизи стоящего на дне препятствия в форме бруска	89
ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН И ПРИДОННОГО СВЯЗНОГО ГРУНТА	94
§ 3.1. Обрушение столба жидкости	95
§ 3.2. Образование и распространение одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ»	103
3.2.1 Численная модель гидроволнового лотка	104
3.2.2 Численные результаты	109
§ 3.3. Перенос грунта под действием поверхностных волн	113
3.3.1 Взаимодействие набегающей волны с препятствием	113
3.3.2 Перемещение подводного грунта под действием движения поверхностной волны	117

§ 3.4. Образование поверхностных волн вследствие движения донного связного грунта.....	121
3.4.1 Распад полукруга намокшего грунта на дне бассейна.....	121
3.4.2 Волна, порожденная движением деформируемого подводного оползня по наклонному дну.....	124
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	132
СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА	148

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие известные российские месторождения нефти и газа частично выработаны или вовсе истощены. В европейской части России степень выработанности запасов по нефти достигает в среднем около 70%, в Западной Сибири целый ряд крупных месторождений находится в стадии падающей добычи [24]. Средний размер запасов вновь открываемых месторождений в традиционных нефтегазодобывающих регионах снижается [57], что делает актуальной задачу поиска новых источников нефти и газа для сохранения или увеличения уровня годовой добычи. Такие источники обычно связывают с отдаленными и труднодоступными регионами Восточной Сибири, залежами сланцевой и глубинной нефти, шельфами арктических и дальневосточных морей [24].

Россия обладает одним из самых обширных континентальных шельфов в мире. По некоторым оценкам на нем содержится около четверти российских запасов нефти и половины запасов газа [81]. В связи с этим анализируются оценки ресурсов углеводородов шельфа [30], при помощи инженерно-геологических методов исследуются нефтегазоперспективные провинции [61], определяются социально-экономические потенциал и эффекты освоения шельфа [28, 102], а также связанные с этим риски [53].

Шельфом называют расположенную под водой часть материка. Его границами служат берег и так называемая бровка – четко выраженный уступ, за которым глубина стремительно возрастает. Обычно глубина моря над бровкой составляет 100-200 метров, но иногда она доходит и до 500 метров.

На глубинах до 150 метров для добычи нефти и газа часто строят стационарные гравитационные платформы, которые имеют ряд преимуществ по сравнению с другими типами платформ [8, 54]. Обычно гравитационная платформа представляет собой комбинированное сооружение. Нижняя часть находится в воде, ее основание имеет огромную массу, и оно погружено в грунт,

что обеспечивает устойчивость платформы на дне бассейна. Верхняя часть возвышается над поверхностью, на ней размещены системы жизнеобеспечения и разнообразное буровое оборудование. Подобные платформы установлены на шельфе Канады на месторождении Хеброн (Hebron), в Северном море на месторождении Статфьорд (Statfjord), в Печорском море на Приразломном месторождении на арктическом шельфе, на северо-восточном шельфе острова Сахалин (платформы «Лунская-А», «Пильтун-Астохская-Б») и другие.

Дно, на котором стоит платформа гравитационного типа, часто достаточно неоднородно: песок, глина, ил чередуются со скоплениями ракушек, гравия, гальки, валунов, а иногда и с выходами скальных пород в виде рифов и отдельных камней. Кроме того, оно может иметь неровную структуру: желоба, долины, впадины, банки. Со временем воздействие различных факторов (придонные течения, сложные вихревые образования возле основания платформы, поверхностные волны и т.д.) может приводить к размыву донного грунта около сооружения, что может значительно сказаться на общей устойчивости платформы. Таким образом, становятся актуальными задачи определения размывов и разработки активных и пассивных способов защиты от них [13].

В данной работе рассматривается случай, когда грунт, на котором стоит платформа гравитационного типа, является связным. Согласно межгосударственному стандарту [26] связным называют дисперсный грунт с физическими и физико-химическими структурными связями (например, ил, глина и т.п.). Механизм эрозии связных почв и грунтов включает в себя различные физико-химические процессы, что обуславливает относительную сложность его описания и моделирования.

Можно выделить следующие основные факторы, которые влияют на размыв связного грунта вблизи платформы гравитационного типа:

- 1) Внутреннее течение. В шельфовых зонах придонные потоки могут на протяжении долгого времени сохранять большие скорости течения. Столкновение с препятствием приводит к разделению потока на струи, имеющие различные направления и скорости движения, и образованию донных вихрей. Для

гравитационной платформы следствием этого становится активный перенос грунта вблизи основания опоры, приводящий к появлению воронок и наносов. Важная особенность связного грунта заключается в том, что его состояние (твердое, пластичное, текучее) зависит от степени увлажнения [84, 96]. Верхний слой донного связного грунта непосредственно взаимодействует с окружающей водой и поэтому находится в текучем состоянии (глинистые суспензии, ил и т.п.). Он ведет себя как некоторая вязкая жидкость, при этом может иметь физические свойства (плотность, вязкость) значительно отличающиеся от воды. Это может влиять на скорость и характер размыва и, вообще говоря, на картину придонного течения в целом.

2) Намокание грунта. Взаимодействие твердого связного грунта с водой может приводить к тому, что он становится пластичным или вовсе начинает вести себя как вязкая жидкость. Такой процесс зависит от характера движения воды и от свойств самого грунта. На дне водоемов под верхним водонасыщенным текучим слоем связного грунта находится твердая часть. По мере вымывания и переноса верхнего слоя, происходит проникновение воды в нижележащий грунт. Это приводит к его намоканию, насыщению водой и переходу в текучее состояние.

3) Диффузия грунта. Важной особенностью механизма эрозии связного грунта является диффузионный перенос массы грунта, протекающий при взаимодействии воды и донного вещества и оказывающий в ряде случаев значительное воздействие на процесс размыва, особенно в больших временных масштабах. Следует отметить, что диффузия грунта на дне водоемов также способствует размоканию твердых нижних слоев [76].

4) Поверхностные волны. Продолжительные штормовые волнения оказывают влияние на перемещение грунта на дне водоема, особенно ярко это проявляется вблизи прибрежных морских сооружений. В случае платформы гравитационного типа, которая возвышается над уровнем моря, волны накатываются на нее, отражаются, заплескиваются и обрушаются, тем самым создавая переменные пристеночные течения, уносящие и размывающие грунт около основания. Намокший связный грунт в свою очередь также может

оказывать воздействие на поверхность воды. В общем случае следует учитывать взаимное влияние друг на друга поверхностных волн и намокшей части донного грунта.

Таким образом, для решения комплексной задачи по определению картины размыва связного грунта вблизи платформы гравитационного типа необходимо учитывать совокупность всех перечисленных выше факторов.

Традиционным для проверки возможности возникновения опасности размыва является проведение лабораторных экспериментов (гидродинамическое моделирование) в волновых бассейнах. Первые обнадеживающие результаты оценки размыва грунта в лабораторных условиях были получены при внедрении методов электрогидродинамических (ЭГДА) [94] и газогидравлических (ГАГА) аналогий [71]. В настоящее время история применения подобных методов составляет уже более половины столетия. Однако применимы они по большей части к задачам размыва несвязного грунта (например, песок), так как характерный размер частиц связного грунта (не более 0.01 мм [26]) затрудняет проведение лабораторных экспериментов. Следует отметить, что при должном внимании современные лабораторные установки могут воспроизвести инженерно-геологические характеристики грунта, шероховатости ложа водотока, гидродинамические параметры протекания воды и т.д., чтобы обеспечить приемлемую сходимость модельных и реальных результатов. Однако это связано с большими затратами, поскольку отбор, хранение, транспортировка монолитов грунта, проведение детальных лабораторных опытов очень трудоёмки, дороги и длительны, а также, зачастую, дают определенный ответ только при постановке узких конкретных задач.

Поэтому обычно при строительстве водных сооружений граница размыва грунта определяется геолого-инженерными методами. К геолого-инженерным методам относятся эмпирические формулы, полученные на основе лабораторных экспериментов с применением законов гидравлики, и полуэмпирические формулы, полученные в результате комплексных теоретических и эмпирических

исследований, раскрывающих в определенной мере физическую сущность процесса размыва.

Одним из примеров такого подхода служит концепция допустимой неразмывающей скорости для донного грунта, в которой критерием отсутствия размыва на границе «грунт – жидкость» является условие, что характерное значение скорости потока (обычно донная или средняя на вертикали скорость) не превышает некоторого критического значения. В [78], используя принципы расчета по методу предельных состояний и основываясь на детальном изучении механизма размыва связных грунтов, выведено экспериментально-теоретическое уравнение размывающей скорости. Следует заметить, что такой подход исторически основан на следующих теоретических работах [19, 32].

В настоящее время при строительстве допускаемые неразмывающие скорости течения воды для связных грунтов определяются согласно нормативным документам и могут отличаться для различных типов сооружений. К таким сооружениям относятся мелиоративные системы (СНиП 2.06.03-85 [92]), каналы (ВТР-П-25-80 [23]), морские стационарные платформы (ВСН 41.88 [21]), опоры сквозных сооружений и подводных стендов (ВСН 80-80 [22]), опоры мостов (СП 32-102-95 [93]) и другие.

Существующие стандартные методы определения допускаемых неразмывающих скоростей для связных грунтов имеют ряд недостатков. Используемые там характеристики только косвенно связаны с показателями размываемости грунта, что может приводить к большому разбросу результатов при малом изменении условий. Поэтому остается актуальной задача поиска более точных инженерных способов определения величины размыва. В [87] вводится комплексный показатель быстроты размокания грунта, который отражает основные свойства (плотность, влажность, состав, содержание солей и т.д.) и является прямой характеристикой размываемости. Такой подход позволяет снизить трудоёмкость, длительность и стоимость определения размываемости конкретного вида связного грунта. Другой подход заключается в поиске новых

методов интерпретации уже имеющихся данных, которые позволяют получить новые соотношения для определения неразмывающих скоростей [15].

В зарубежной инженерной практике более распространен подход к определению возможности начала процесса эрозии, основанный на понятии касательного напряжения, возникающего в потоке жидкости. В качестве параметра, определяющего начало перемещения донных частиц, используется отношение опрокидывающего момента, действующего на частицу со стороны потока, к удерживающему моменту, обусловленному действием силы тяжести [164].

К сожалению, не получены общие достоверные инженерные рекомендации по определению величины размыва грунта, которые подходили бы для любой формы водного сооружения. Поэтому при рассмотрении каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельные исследования. В монографии [99] представлены результаты исследований для создания инженерных методов прогноза характеристик местного размыва у морских сооружений больших поперечных размеров. В [85] проведены теоретические и экспериментальные исследования местных размывов грунта морского дна у шельфовых сооружений различных конструкций. В [11, 29] представлены результаты исследований по определению параметров местного размыва у оснований ледостойких сооружений.

Таким образом, в случае связного грунта лабораторные эксперименты технически сложны, а инженерные методы не всегда могут обеспечить получение корректной картины размыва. Поэтому становится актуальной задача математического моделирования процесса размыва связного грунта. Существующие математические модели делятся на стохастические, основанные на определении вероятности отрыва частицы грунта, и детерминистские.

Основы вероятностного подхода для расчета интенсивности эрозии почв и грунтов заложены в работах [79, 135, 150, 167]. К нему относятся гидрофизическая модель эрозии почв [67, 68], метод определения вероятности отрыва агрегатов грунта от дна при стохастическом превышении движущих сил над

стабилизирующими [90]. За рубежом этот подход получил развитие в работах [108, 131, 157].

К детерминистским относятся модели, включающие в себя непосредственное вычисление динамики движения жидкости и некоторый способ моделирования изменения формы поверхности между жидкостью и твердым грунтом на дне.

В [132] движение воды над поверхностью и внутри грунта описывается ламинарной моделью вязкой несжимаемой жидкости. Изменение поверхности описывается методом установления уровня (Level Set) [121] при использовании метода фиктивных областей [16, 17]. Таким образом, выделяется четкая граница между жидкостью и грунтом. Грунт считается сильно проницаемым для воды, а влияние вымываемых частиц грунта на динамику течения незначительным. Для описания движения жидкости внутри грунта вводится специализированный член, «тормозящий» поток.

В [103] используется метод эрозийного потенциала, который заключается в оценке «избыточного» касательного напряжения (относительно некоторого критического значения), при котором начинается размыв данного типа грунта. Сам связный грунт рассматривается как неньютоновская жидкость, для которой зависимость касательного напряжения от сдвиговой вязкости описывается соотношением Кессона [116]. При таком подходе процесс донной эрозии рассматривается, как изменение формы свободной поверхности более плотной неньютоновской жидкости под воздействием касательных напряжений, вызываемых турбулентным движением над ней менее плотной ньютоновской жидкости (воды).

В [145] моделируется размыв связного грунта под воздействием турбулентного потока. Грунт считается слабопроницаемым для воды, соответственно в нем исключаются какие-либо внутренние течения. Между грунтом и жидкостью выделяется четкая граница, движение жидкости описывается турбулентной моделью. Влияние вымытых частиц грунта на динамику потока считается незначительным, поэтому среда является однородной.

Размыв происходит вследствие превышения касательным напряжением на поверхности грунта некоторого критического значения и приводит к перестроению расчетной сетки в области.

Представленные выше подходы моделируют размыв связного грунта в результате воздействия только внутреннего течения. Однако важным фактором размыва грунта вблизи морского сооружения может быть продолжительное воздействие штормовых волнений. Более того, движение грунта на дне также оказывает влияние на поверхность воды. Таким образом, необходимо моделировать свободную поверхность между водой и воздухом, движение грунта на дне и их взаимодействие между собой.

Под свободной поверхностью жидкости понимается граница между жидкостью и находящимся над ней газом. Для математического моделирования задач возникновения и распространения волн на свободной поверхности существует несколько основных подходов [130, 147]. Поскольку плотность жидкости на несколько порядков больше плотности газа, влиянием газа на движение жидкости часто пренебрегают, полагая, что жидкость движется независимо от движения газа или «свободно». К такому подходу относятся модели волновой гидродинамики, включающие уравнения теории мелкой воды, уравнения движения идеальной жидкости и другие [6, 27, 98, 104].

Также для моделирования свободной поверхности часто используют бессеточный лагранжевый метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) [5, 122, 140, 149, 155, 156]. Бессеточные методы позволяют проводить расчеты течений с сильными деформациями границ расчетной области, которые допускают изменение связности и перехлест границ области расчета. Недостаток SPH по сравнению с сеточными методами состоит в том, что необходимы большие вычислительные мощности для проведения расчета с эквивалентной разрешающей способностью [159]. Также постановка граничных условий на входных, выходных и твердых стенках является одним из сложных технических вопросов в методе SPH [107, 155].

Для увеличения эффективности вычислений сеточные и бессеточные методы могут быть использованы в совокупности. Примером такого объединения является метод маркеров и ячеек (Marker-and-cell method, MAC) [125, 142]. Особенностью метода MAC является смешанный эйлеров–лагранжев подход при вычислении движения свободной поверхности. Изучаемая область разбивается неподвижной разнесенной эйлеровой сеткой на ячейки. Одновременно для определения положения свободной поверхности и визуализации течения используется лагранжева сетка частиц-маркеров, переносимых полем скоростей. В отличие от MAC, в методе объема жидкости (Volume of Fluid, VOF) было предложено ввести специальную функцию фазы вместо расчета большого количества частиц [127]. При наличии фазы в точке значение этой функции равно единице, при отсутствии – нулю. Преимуществами метода VOF являются относительно низкие вычислительные требования и теоретически возможная консервативность. Его недостатком являются высокие требования к решению уравнения переноса функции фазы, которые появляются из-за возможного размазывания границы свободной поверхности вследствие схемной вязкости.

Для преодоления этого эффекта был разработан метод установления уровня (Level Set) [121, 152, 160]. В нем также вводится специальная функция расстояния до свободной поверхности. Преимуществом метода является хорошая точность в определении геометрической формы контактной границы. Однако метод плохо применим именно для задач, где диспергирование и фрагментация жидкости физически возможны. Стоит отметить, что также предпринимались попытки разработки совместного Level Set и VOF метода, который объединяет преимущества обоих подходов [161].

Представленные выше подходы к моделированию свободной поверхности могут быть расширены применительно к задачам взаимодействия движущегося донного грунта и поверхности воды. Обычно рассматриваются задачи, в которых влияние носит в основном односторонний характер: либо воздействие поверхностных волн или движения воды в открытом бассейне на перенос грунта (размыв грунта во время шторма вблизи морского сооружения, вымывание грунта

при прорыве дамбы и другие [2, 111, 123]), либо воздействие движения грунта на поверхность жидкости (сход подводного или надводного оползня, приводящий к образованию длинной волны типа цунами [110, 118, 126, 136, 146, 148]). Обзор наиболее распространенных подходов к моделированию этих задач представлен в работах [133, 168], среди них уравнения теории мелкой воды [9, 141, 165], уравнения Буссинеска [166, 169], модель потенциального движения жидкости [129], система уравнений Навье-Стокса [60, 109, 128, 143, 158].

Цель настоящей работы состоит в построение модели размыва и переноса связного грунта вблизи большого прибрежного сооружения под действием внутренних течений и поверхностных волн, с учетом намокания и диффузии грунта в воде. А также применение модели к задачам возникновения и распространения поверхностных волн в результате движения подводного связного грунта на дне.

Для достижения поставленной цели требуется последовательно решить следующие задачи:

1) Получить дифференциальную модель трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости с наличием диффузии массы между компонентами, в частности применимую к задачам о размыве связного грунта, где одна из компонент моделирует воздушную фазу, другая – жидкую, а третья – намокший связный грунт, который ведет себя как некоторая вязкая и тяжелая жидкость.

2) Разработать, реализовать и верифицировать численные алгоритмы решения многомерных систем полученной модели трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости.

3) Разработать и провести валидацию алгоритма намокания твердых слоев грунта для задач размыва связного грунта под действием внутреннего течения.

4) Провести валидацию двухкомпонентной версии модели для задач распространения волн на поверхности жидкости.

5) Провести тестирование и валидацию трехкомпонентной версии модели на задачах по взаимодействию поверхностных волн и связного грунта на дне

(размыв связного грунта поверхностными волнами и возникновения поверхностных волн в результате движения связного грунта по наклонному дну).

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 176 наименований и списка иллюстративного материала из 82 рисунков. Общий объем диссертации составляет 154 страницы.

Глава 1 посвящена выводу односкоростной модели трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости с наличием диффузии массы и разработке численного алгоритма решения полученной модели. В первом параграфе приведены основные идеи и предпосылки модели, а также математический вывод системы дифференциальных уравнений на основании общих законов сохранения в сплошной среде. Рассматривается движение неоднородной среды, состоящей из трех несжимаемых смешивающихся жидкостей с постоянными плотностями и вязкостями. Между частицами смеси происходит диффузия массы по закону Фика. В рассматриваемой модели компоненты смеси, обладая свойством несжимаемости, при перемешивании образуют несжимаемую среду, плотность которой зависит только от концентрации компонент. Далее из уравнений баланса массы и количества движения, с учетом переменных вязкости и плотности среды и диффузии массы между компонентами, выводится дифференциальная система уравнений трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости. Для нахождения значений вязкости смеси используется зависимость от концентраций компонент. Вид этой зависимости рассматривается во втором параграфе. В третьем параграфе предложен численный алгоритм решения модели односкоростной трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости. На основании численного алгоритма был реализован комплекс программ. Для верификации методов решения были проведены тестовые расчеты для двух задач: течение Пуазейля в плоском канале и течение в квадратной каверне с подвижной верхней стенкой.

Глава 2 посвящена рассмотрению задач о размыве связного грунта внутренним течением. В ней предлагается и тестируется численный алгоритм размокания твердых слоев связного грунта. В первом параграфе рассматриваются тестовые задачи о вымывании примеси, имеющей отличную от среды вязкость и

плотность, из области под действием постоянного течения. Полученные численные решения показывают влияние значений вязкости, плотности, диффузии примеси на скорость и характер переноса. При увеличении вязкости и плотности примеси наблюдается замедление процесса переноса, все большую роль начинает играть диффузионная, а не конвективная составляющая процесса. Во втором параграфе предлагается численный алгоритм процесса размокания твердых слоев связного грунта. В третьем параграфе для валидации алгоритма размокания рассматриваются лабораторный эксперимент по размыву отверстия в грунте потоком жидкости Hole Erosion Test (HET) [145]. В четвертом параграфе представлены расчеты трехмерных задач размыва и переноса связного грунта в воде.

Глава 3 посвящена задачам образования и распространения волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости, а также взаимодействию поверхностных волн и придонного связного грунта. В первом параграфе представлено численное моделирование лабораторной задачи обрушения столба жидкости и проведена валидация модели на имеющихся экспериментальных данных из [138]. Во втором параграфе представлена модель образования и распространения одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС». На основании модели двухкомпонентной жидкости была разработана модель гидроволнового лотка и вакуумного волнопродуктора. Сравнение проводилось с лабораторными данными и с результатами расчетов потенциальной модели [6]. В третьем параграфе рассматривались задачи взаимодействия набегающей волны с препятствием и перемещения придонного грунта под действием поверхностных волн. В четвертом параграфе представлены задачи об образовании волны вследствие движения придонного связного грунта и проведено сравнение с численными результатами других моделей и лабораторными данными [158].

В заключении сформулированы основные выводы по результатам работы.

Настоящая работа выполнена в Институте вычислительных технологий СО РАН и в Кемеровском государственном университете на кафедре ЮНЕСКО по

Информационным вычислительным технологиям под руководством д.ф.-м.н., проф. Юрия Николаевича Захарова.

Основные результаты диссертации докладывались на 23-х конференциях: Международные научные студенческие конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2013 – 2015); Международная конференция «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование» (Кемерово, 2013); Международные конференции «Математические и информационные технологии» (Сербия, Врнячка Баня и Черногория, Будва, 2013, 2016); Всероссийские конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (Санкт-Петербург, 2014, 2016, 2018); Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Тюмень, 2014; Красноярск, 2015; Новосибирск, 2016; Иркутск, 2017; Кемерово, 2018); XIII международная научно-практическая конференция имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Анжеро-Судженск, 2014); Международные научные конференции студентов и молодых ученых «Образование, наука, инновации – вклад молодых исследователей» (Кемерово, 2015, 2019); VIII международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2015); Международная научно-практическая конференция «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании» (Казахстан, Алматы, 2015); III международная конференция «Устойчивость и процессы управления» (Санкт-Петербург, 2015); III международная конференция «Полярная механика – 2016» (Владивосток, 2016); X научно-техническая конференция «Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии» (Санкт-Петербург, 2016); XIII Международная научно-техническая конференция «Динамика систем, механизмов и машин» (Омск, 2019).

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры ЮНЕСКО по Информационным вычислительным технологиям КемГУ «Математические модели, методы решения», Кемерово (рук. проф. Ю.Н. Захаров);

ИВТ СО РАН «Информационно-вычислительные технологии», Новосибирск (рук. акад. Ю.И. Шокин и проф. В.М. Ковеня); Инженерно-строительного института СПбПУ Петра Великого, Санкт-Петербург (рук. проф. Н.И. Ватин).

Работа выполнена при поддержке государственного задания министерства науки и образования, проект № 1.630.2014/К (рук. проф. Ю.Н. Захаров) и при поддержке гранта РФФИ на реализацию научного проекта № 17-31-50065 «Численное моделирование взаимодействия поверхностных волн и препятствия, стоящего на связном грунте» (рук. проф. Л.Б. Чубаров). Кроме того, результаты моделирования задач по возникновению и распространению поверхностных волн получены совместно с институтом Вычислительных технологий СО РАН в рамках работы по государственным заданиям № 0316-2016-0001 проекта №2 «Разработка и тестовые испытания новых элементов математической технологии решения фундаментальных и прикладных задач зарождения, трансформации и воздействия на побережье длинных поверхностных волн в природных и искусственных акваториях (в акваториях различного масштаба)» и № 0316-2019-0001 «Разработка и исследование новых элементов вычислительной технологии решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики» в части изучения движения волн цунами на береговые сооружения.

По теме диссертации была опубликована 31 работа: 3 в журналах, индексируемых в базе данных Scopus [170, 174, 175]; 1 в журнале, индексируемом в базах данных Web of Science и Scopus [112]; 1 в журнале, индексируемом в базе данных Scopus и рекомендованном ВАК [89]; 1 в журнале, рекомендованном ВАК [77]; 1 свидетельство государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте [39]; 24 в тезисах докладов и сборниках трудов конференций [14, 33–38, 40–52, 124, 171–173].

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю Юрию Николаевичу Захарову за постоянное внимание, помощь и поддержку в работе, а также Владимиру Васильевичу Рагулину за большой вклад в развитие идеи диссертации.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕКТИВНОГО И ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА СВЯЗНОГО ГРУНТА В ВОДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ТЕЧЕНИЯ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Многие задачи современной гидродинамики могут быть сведены к рассмотрению сложных сред и условий, в которых они движутся. В частности, к ним относятся задачи для неоднородной жидкости. Неоднородность может быть обусловлена как непостоянством плотности или вязкости в силу зависимости этих характеристик от температуры, так и взаимодействием разных по гидродинамическим параметрам жидкостей (многокомпонентная или многофазная среда). Движение подобных жидкостей возникают во многих областях прикладной гидродинамики: метеорология, водной экология, океанология и гидрология (фильтрация несмешивающихся жидкостей, процесс плавки металлов, движение крови в кровеносных сосудах и другие). К таким задачам также относится проблема описания размыва связного грунта.

Модель размыва связного грунта вблизи препятствия должна учитывать движение и взаимодействие грунта и поверхностных волн, так как продолжительные поверхностные волнения, также, как и внутренние течения, оказывают влияние на величину размыва. Для этих целей удобно рассматривать намокший связный грунт, воду и воздух как компоненты одной среды, взаимодействующие друг с другом.

Помимо этого, важной особенностью процесса массопереноса намокшего связного грунта является диффузия грунта в воде, влияющая как на картину течения в целом, так и на протекание размыва и переноса грунта.

Для описания многокомпонентной или многофазной среды часто используют концепцию многоскоростного континуума, в котором каждая компонента имеет свои отдельные гидродинамические характеристики, а их

взаимодействие описывается с помощью эмпирических соотношений, осреднения по пространству или по времени и физических законов сохранения [63, 65, 80, 88]. Диффузии массы между компонентами в рамках такого подхода интерпретируется, как величина пропорциональная разности скорости движения индивидуального объема одной компоненты и всей среды в целом. Многоскоростная модель может содержать до $11N$ независимых уравнений [64], где N – это количество компонент в среде. Решение такой системы уравнений может потребовать применения значительных вычислительных ресурсов.

Поэтому другим распространенным подходом является рассмотрение односкоростной неоднородной среды, которая в каждой точке находится в определенном состоянии и имеет определенную скорость [31, 95]. Движение среды подчиняется универсальным законам сохранения, а для моделирования взаимодействия компонент используют уравнения переноса характеристик.

В этой главе получим математическую модель размыва и переноса связного грунта вблизи прибрежных гидротехнических сооружений, в частности платформы гравитационного типа под действием внутренних течений и поверхностных волн, с учетом диффузии грунта в воде.

В первом параграфе проводится вывод дифференциальной модели односкоростной трехкомпонентной жидкости из законов сохранения количества движения и массы, с учетом диффузии между компонентами. Во втором параграфе обсуждается вид возможных зависимостей вязкости смеси от вязкости отдельных компонент. В третьем параграфе описывается алгоритм численного решения системы дифференциальных уравнений полученной модели. Проводится верификация численных методов на задачах протекания жидкости в канале заданной ширины и движения жидкости в каверне с движущейся верхней стенкой.

§ 1.1. Односкоростная дифференциальная модель движения трехкомпонентной смеси

1.1.1 Основные определения и предпосылки

Рассматривается движение сплошной неоднородной по плотности и вязкости среды. Неоднородность обусловлена тем, что среда является смесью трех несжимаемых жидкостей с постоянными плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3 и вязкостями μ_1, μ_2, μ_3 . Смесь является изотермической средой и в ней отсутствуют химические взаимодействия между компонентами, однако присутствует диффузия массы. Компоненты смеси считаются смешивающимися, то есть они могут неограниченно распространяться друг среди друга до полного перемешивания [7].

Под частицей смеси будем понимать малую часть материального объема среды, которая выражается как решение $\bar{x} = \bar{x}(t)$ задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{V}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0,$$

где $\bar{V}(\bar{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости смеси в точке $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и момент времени t .

Через ω_t обозначим движущийся объем, состоящий для всех $t \in (a, b)$ из одних и тех же частиц.

Мы считаем, что компоненты смеси, обладая свойством несжимаемости, при перемешивании образуют несжимаемую среду. Тогда, ввиду свойства несжимаемости, любой движущийся объем ω_t неоднородной среды не меняет своей величины во времени [3]:

$$\frac{d}{dt} |\omega_t| = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} d\omega = 0, \tag{1.1.1}$$

где $\frac{d}{dt}$ – полная производная по времени.

Для дальнейшего преобразования (1.1.1) используем формулу дифференцирования по времени интеграла произвольной функции f , взятого по подвижному объему [88]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} f d\omega = \int_{\omega_t} \left[\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \bar{V} \right] d\omega. \quad (1.1.2)$$

где div – оператор дивергенции.

Тогда получаем следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} d\omega = \int_{\omega_t} \operatorname{div} \bar{V} d\omega = 0,$$

или, так как равенство нулю должно выполняться для любого индивидуального объема во всей области, то

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0. \quad (1.1.3)$$

Уравнение (1.1.3) является условием несжимаемости неоднородной среды. Отметим, что оно эквивалентно соленоидальности поля вектора скорости.

Обозначим через M массу сплошной среды в произвольном объеме ω , которая определяется по формуле:

$$M = \int_{\omega} \rho d\omega, \quad (1.1.4)$$

где $\rho(\bar{x}, t)$ – функция плотности неоднородной среды.

Рассмотрим произвольный объем $d\omega$, который имеет массу dM . Тогда его плотность равна:

$$\rho = \frac{dM}{d\omega}. \quad (1.1.5)$$

Так как среда представляет собой смесь компонент, то его объем и масса складываются из объемов и масс компонент:

$$dM = dM_1 + dM_2 + dM_3, \quad (1.1.6)$$

$$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3, \quad (1.1.7)$$

где нижний индекс означает номер компоненты.

Поскольку компоненты имеют постоянные плотности, масса i -ой компоненты находится по формуле:

$$dM_i = \rho_i d\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.8)$$

Подставляем формулы (1.1.5) и (1.1.8) в равенство (1.1.6):

$$\rho d\omega = \rho_1 d\omega_1 + \rho_2 d\omega_2 + \rho_3 d\omega_3.$$

Делим обе части на $d\omega$ и получаем соотношение для плотности среды:

$$\rho = \rho_1 \frac{d\omega_1}{d\omega} + \rho_2 \frac{d\omega_2}{d\omega} + \rho_3 \frac{d\omega_3}{d\omega}. \quad (1.1.9)$$

Через $C_i = \frac{d\omega_i}{d\omega}$ обозначим объемную концентрацию i -ой компоненты.

Формула (1.1.9) верна для любой частицы среды, тогда функция плотности $\rho = \rho(\bar{x}, t)$ определяется по формуле:

$$\rho = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3, \quad (1.1.10)$$

где $C_i = C_i(\bar{x}, t)$ – функция распределения объемной концентрации i -ой компоненты в среде, $\rho_i = const$ – истинная плотность i -ой компоненты.

В связи с формулой (1.1.7) концентрации компонент внутри любого индивидуального объема ω связаны между собой следующим соотношением:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1, \quad 0 \leq C_i \leq 1. \quad (1.1.11)$$

1.1.2 Закон сохранения массы с учетом диффузии между компонентами

В представленной модели между частицами смеси происходит диффузия массы. Так как среда рассматривается с позиций единых законов сохранения, возникновение диффузии должно менять вид закона сохранения массы и, как следствие, уравнения неразрывности [10]. Обычно оно заключается в переопределении понятия плотности потока массы, причем это может быть

необходимо не только при описании взаимодействия компонент в смеси. В [10] показан пример задачи, не имеющей решения в рамках стандартного подхода, то есть в случае использования в модели жидкости стандартного уравнения неразрывности. В указанной работе рассматривается задача о моделировании выравнивания скачка плотности в покоящейся жидкости при условии устойчивой стратификации.

Попытки модификации вида уравнения неразрывности предпринимались с середины прошлого века. Первыми диффузионную добавку к уравнению неразрывности предложили в работах [18, 69, 91], такое уравнение получило название уравнение диффузии плотности. В [4] была исследована разрешимость нестационарной краевой задачи для неоднородных моделей с диффузионным членом. В дальнейшем подобный подход рассматривался в работах [1, 10, 56, 58] и применялся для моделирования движения несжимаемых сплавов [55].

Мы определяем закон сохранения массы в неоднородной среде для каждого индивидуального объема ω_i следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_i} \rho d\omega + \int_{S_i} q_n dS = 0, \quad (1.1.12)$$

где первое слагаемое $\frac{d}{dt} \int_{\omega_i} \rho d\omega$ отвечает за перенос массы полем течения, а второе

слагаемое $\int_{S_i} q_n dS$ – диффузионным процессом, $S_i = \Omega\omega_i$ – поверхность

подвижного объема ω_i .

Вид члена q_n в уравнение (1.1.12) определяется законом Фика [83]:

$$q_n = -D \frac{\partial \rho}{\partial \bar{n}}, \quad (1.1.13)$$

где D – коэффициент диффузии массы в среде, $\frac{\partial}{\partial \bar{n}}$ – производная по внешней

нормали к границе объема ω_i .

В (1.1.12) подставляем значение диффузионного члена q_n из (1.1.13) и получаем интегральное уравнение для плотности в неоднородной среде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_i} \rho d\omega = \int_{S_i} D \frac{\partial \rho}{\partial \bar{n}} dS,$$

Для того чтобы получить однородный вид уравнения в правой части уравнения используем формулу (1.1.2), а в левой перейдем к интегралу по объему:

$$\int_{\omega_i} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{V} \right] d\omega = \int_{\omega_i} \operatorname{div} (D \nabla \rho) d\omega \quad (1.1.14)$$

Далее с учетом несжимаемости, выраженной формулой (1.1.3), получаем уравнение конвективной диффузии для плотности в дифференциальном виде:

$$\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} (D \nabla \rho), \quad (1.1.15)$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ – оператор набла.

Формула (1.1.15) дает условие сохранения баланса массы в несжимаемой неоднородной среде с диффузией. Изменение плотности в индивидуальном объеме происходит за счет изменения количества массы при неизменном значении объема.

Следует заметить, что существует другой способ описания закона сохранения массы для смеси несжимаемых жидкостей с диффузией между компонентами. При этом подходе жидкость считается несжимаемой в том смысле, что масса в любом индивидуальном объеме постоянна $\frac{d\rho}{dt} = 0$, но значение этого объема изменяется, и поле скоростей становится не соленоидальным, то есть $\operatorname{div} \bar{V} \neq 0$. Такое условие называют «квази-несжимаемостью» [106, 139]: в среде происходит изменение индивидуальных объемов только из-за процесса диффузии, при этом масса такого объема остается постоянной.

Выразим уравнение (1.1.15) через концентрации компонент, чтобы получить закон сохранения массы для смеси трех несжимаемых жидкостей.

В дальнейшем будем считать, что в рассматриваемых задачах грунт не взаимодействует с воздухом и отделен от него слоем жидкости, это означает, что первая и третья компоненты, которые моделируют поведение воздуха и грунта, напрямую не взаимодействуют:

$$\begin{cases} C_3 = 0, & C_1 \neq 0; \\ C_1 = 0, & C_3 \neq 0. \end{cases} \quad (1.1.16)$$

Тогда уравнение (1.1.10) для плотности принимает вид:

$$\rho = \begin{cases} C_1 \rho_1 + C_2 \rho_2, & C_3 = 0; \\ C_3 \rho_3 + C_2 \rho_2, & C_1 = 0. \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Или с учетом формулы (1.1.11)

$$\rho = \begin{cases} C_1 \rho_1 + (1 - C_1) \rho_2, & C_3 = 0; \\ C_3 \rho_3 + (1 - C_3) \rho_2, & C_1 = 0. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Коэффициент диффузии D принимаем равным:

$$D = \begin{cases} D_{12}, & C_3 = 0; \\ D_{23}, & C_1 = 0, \end{cases} \quad (1.1.19)$$

где $D_{12} = const$ – коэффициент диффузии между первой и второй компонентой,

$D_{23} = const$ – коэффициент диффузии между второй и третьей компонентой.

Отметим, что коэффициент диффузии в неоднородной среде может быть представлен в более сложном виде. Например, в виде диффузионной матрицы или функции, зависящей от концентраций компонент [137, 162].

Тогда, используя представление для плотности (1.1.18) и коэффициента диффузии (1.1.19), преобразуем уравнение (1.1.15) в следующую систему уравнений для концентраций компонент:

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = D_{12}\Delta C_1, & C_3 = 0; \\ \frac{dC_3}{dt} = D_{23}\Delta C_3, & C_1 = 0; \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \end{cases} \quad (1.1.20)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнения (1.1.20) выражают закон сохранения массы для несжимаемой смеси из трех компонент с диффузией массы между компонентами, при этом первая и третья компоненты между собой не взаимодействуют.

1.1.3 Закон сохранения количества движения

Для любого движущегося объема ω_t справедливо равенство:

$$\frac{d}{dt} K = F, \quad (1.1.21)$$

где K – количество движения (импульс), F – главный вектор сил.

Количество движения определяется как:

$$K = \int_{\omega} \rho \bar{V} d\omega.$$

Главный вектор сил складывается из внутренней поверхностной силы и внешней массовой силы:

$$F = \int_{\partial\omega} p_n d\sigma + \int_{\omega} \rho \bar{f} d\omega,$$

где p_n – напряжение поверхностных сил, действующих на область через площадку с внешней нормалью n , $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор массовых сил.

Тогда закон сохранения количества движения для движущегося объема ω_t записывается как:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \bar{V} d\omega = \int_{\partial\omega_t} p_n d\sigma + \int_{\omega_t} \rho \bar{f} d\omega. \quad (1.1.22)$$

Для полной производной по времени от количества движения применим формулы (1.1.2):

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_i} \rho \bar{V} d\omega = \int_{\omega_i} \left[\frac{d(\rho \bar{V})}{dt} + \rho \bar{V} \operatorname{div} \bar{V} \right] d\omega.$$

Внутренняя поверхностная сила выражается через тензор напряжений \mathbf{P} [3]:

$$\int_{\partial\omega_i} p_n d\sigma = \int_{\partial\omega_i} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\omega_i} \operatorname{div} \mathbf{P} d\omega.$$

Тогда закон сохранения (1.1.22) записывается как:

$$\int_{\omega_i} \left[\frac{d(\rho \bar{V})}{dt} + \rho \bar{V} \operatorname{div} \bar{V} \right] d\omega = \int_{\omega_i} \operatorname{div} \mathbf{P} d\omega + \int_{\omega_i} \rho \bar{f} d\omega,$$

или, с учетом несжимаемости среды (1.1.3), получаем дифференциальный вид уравнения сохранения количества движения неоднородной сплошной среды:

$$\frac{d(\rho \bar{V})}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \bar{f}. \quad (1.1.23)$$

Мы считаем, что среда является Ньютонской жидкостью, то есть тензор напряжений имеет линейную зависимость и для несжимаемой среды выражается в следующем виде [3]:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\nabla p + \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}), \quad (1.1.24)$$

где p – давление, $\mu = \mu(\bar{x}, t)$ – динамическая вязкость, \mathbf{D} – тензор скоростей деформаций, компоненты которого равны $\tau_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$.

Вязкость смеси μ определяется некоторой функцией $\mu(\bar{x}, t)$, вид которой зависит от свойств конкретных компонент и характера их взаимодействия при перемешивании. Для определения вязкости мы используем следующее соотношение (см. подробное описание в параграфе 1.2):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_3}{\mu_3},$$

или, что то же самое,

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1 + \mu_1 \mu_3 C_2 + \mu_1 \mu_2 C_3}. \quad (1.1.25)$$

Член $\frac{d(\rho \bar{V})}{dt}$ из уравнения (1.1.23), с учетом уравнения (1.1.15), можно

преобразить следующим образом:

$$\frac{d(\rho \bar{V})}{dt} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d\bar{V}}{dt} + \bar{V} \operatorname{div}(D\nabla\rho), \quad (1.1.26)$$

где слагаемое $\bar{V} \operatorname{div}(D\nabla\rho)$ выражает количество движения, возникающее вследствие диффузии массы в среде.

Подставляем (1.1.24) в уравнение (1.1.23) и получаем уравнение сохранения количества движения в неоднородной среде с переменными вязкостью и плотностью при наличии диффузии массы:

$$\frac{d(\rho \bar{V})}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) + \rho \bar{f}, \quad (1.1.27)$$

или, с учетом (1.1.26),

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -\bar{V} \operatorname{div}(D\nabla\rho) - \nabla p + \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) + \rho \bar{f}. \quad (1.1.28)$$

1.1.4 Итоговая система дифференциальных уравнений

Итоговая система дифференциальных уравнений односкоростной модели вязкой несжимаемой трехкомпонентной смеси (где первая и третья компоненты между собой не взаимодействуют) с переменными вязкостью и плотностью, и диффузией массы между компонентами состоит из:

- условия несжимаемости среды (1.1.3);

- уравнений сохранения массы трехкомпонентной смеси с учетом процесса диффузии между компонентами (1.1.20);
- уравнения сохранения количества движения (1.1.27) с учетом переменных вязкости и плотности;
- соотношений для нахождения вязкости (1.1.25) и плотности (1.1.10).

Описанная система имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_3} \right) = -\bar{V} \operatorname{div}(D \nabla \rho) - \nabla p + \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) + \rho \bar{f}, \\ \operatorname{div} \bar{V} = 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = \operatorname{div}(D_{12} \nabla C_1), \\ \frac{\partial C_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial C_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial C_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = \operatorname{div}(D_{23} \nabla C_3), \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\ \mu = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1 + \mu_1 \mu_3 C_2 + \mu_1 \mu_2 C_3}, \\ \rho = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3, \end{array} \right. \quad (1.1.29)$$

где $\bar{V}(\bar{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор скорости смеси в точке $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и момент времени t , $\mu(\bar{x}, t)$ – динамическая вязкость, $\rho(\bar{x}, t)$ – плотность, $C_1(\bar{x}, t)$, $C_2(\bar{x}, t)$, $C_3(\bar{x}, t)$ – объемные концентрации компонент с постоянными плотностями ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и вязкостями μ_1 , μ_2 , μ_3 , $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор массовых сил, p – давление,

\mathbf{D} – тензор скоростей деформаций, компоненты которого равны $\tau_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$,

$D_{12} = \text{const}$ – коэффициент диффузии между первой и второй компонентой,

$D_{23} = \text{const}$ – коэффициент диффузии между второй и третьей компонентой.

Для дальнейших задач нам понадобится также двухкомпонентная версия модели, которую мы получаем при $C_3 \equiv 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_3} \right) = -\bar{V} \operatorname{div}(D \nabla \rho) - \nabla p + \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) + \rho \bar{f}, \\ \operatorname{div} \bar{V} = 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial C_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial C_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial C_1}{\partial x_3} = \operatorname{div}(D_{12} \nabla C_1), \\ C_2 = 1 - C_1, \\ \mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 C_1 + \mu_1 C_2}, \\ \rho = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2, \end{array} \right. \quad (1.1.30)$$

где используются те же самые обозначения, что и для системы (1.1.29).

1.1.5 Безразмерный вид модели

В данном пункте проводится обезразмеривание системы уравнений (1.1.29). Это сделано для изучения общих закономерностей процесса движения многокомпонентной вязкой несжимаемой жидкости при различных условиях. В результате мы получаем несколько чисел подобия для данной модели. Выбор чисел подобия позволяет, например, привести переменные математической модели к одинаковому порядку, что положительно скажется на вычислительном алгоритме. Подробное описание физического смысла чисел подобия дано в [70].

Для того чтобы обезразмерить полученную систему уравнений берем следующие характерные величины:

$$\tilde{v}_i = \frac{v_i}{U}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x}{L}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{P}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\hat{\rho}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hat{\mu}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T}.$$

Здесь U – характерная скорость, L – характерная длина, P – характерное давление, $\hat{\rho}$ – характерная плотность, $\hat{\mu}$ – характерная динамическая вязкость, T – характерное время.

В качестве характерной плотности и вязкости принимаются значения интересующей нас компоненты. В нашем случае, в зависимости от задачи, это может быть компонента, моделирующая глину или воду.

Тогда система (1.1.29) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{\rho}U}{T} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}})}{\partial\tilde{t}} + \frac{\hat{\rho}U^2}{L} \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}}) \right) = -\frac{P}{L} \nabla\tilde{p} + \frac{\hat{\mu}U}{L^2} \operatorname{div}(\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{D}}) + \hat{\rho}\tilde{f}, \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \frac{1}{T} \frac{\partial C_1}{\partial\tilde{t}} + \frac{U}{L} \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla C_1 \right) = \frac{1}{L^2} D_{12} \Delta C_1, \\ \frac{1}{T} \frac{\partial C_3}{\partial\tilde{t}} + \frac{U}{L} \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla C_3 \right) = \frac{1}{L^2} D_{23} \Delta C_3, \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\ \tilde{\mu} = \frac{1}{\hat{\mu}} \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_2\mu_3C_1 + \mu_1\mu_3C_2 + \mu_1\mu_2C_3}, \\ \tilde{\rho} = \frac{1}{\hat{\rho}} (\rho_1C_1 + \rho_2C_2 + \rho_3C_3), \end{array} \right.$$

Уравнение движения умножим на $\frac{L}{U^2\hat{\rho}}$, а уравнения конвективной диффузии на $\frac{L}{U}$, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{L}{UT} \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}})}{\partial\tilde{t}} + \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}}) \right) = -\frac{P}{U^2\hat{\rho}} \nabla\tilde{p} + \frac{\hat{\mu}}{UL\hat{\rho}} \operatorname{div}(\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{D}}) + \frac{L\tilde{f}}{U^2} \tilde{\rho}, \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \frac{L}{UT} \frac{\partial C_1}{\partial\tilde{t}} + \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla C_1 \right) = \frac{D_{12}}{UL} \Delta C_1, \\ \frac{L}{UT} \frac{\partial C_3}{\partial\tilde{t}} + \left(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla C_3 \right) = \frac{D_{23}}{UL} \Delta C_3, \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\ \tilde{\mu} = \frac{1}{\hat{\mu}} \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_2\mu_3C_1 + \mu_1\mu_3C_2 + \mu_1\mu_2C_3}, \\ \tilde{\rho} = \frac{1}{\hat{\rho}} (\rho_1C_1 + \rho_2C_2 + \rho_3C_3), \end{array} \right.$$

Таким образом, мы получили следующие числа подобия [70]:

1. Аналог числа Рейнольдса для неоднородной по плотности и вязкости среды, выраженный через постоянную плотность и вязкость одной из

компонент:
$$\overline{Re} = \frac{UL\hat{\rho}}{\hat{\mu}}$$

Число Рейнольдса отражает соотношение между силой инерции и силой вязкости в потоке. Высокие значения числа Рейнольдса описывают ситуацию, когда силы вязкости относительно малы и не способны сгладить турбулентные завихрения потока. Малые значения числа Рейнольдса соответствуют ситуации, когда силы вязкости гасят турбулентность, делая поток ламинарным.

2. Число Фруда:
$$Fr = \frac{U^2}{L\overline{F}}$$

Число Фруда характеризует соотношение между силой инерции и внешней силой.

3. Аналог числа Эйлера для неоднородной по плотности и вязкости среды, выраженный через постоянную плотность и вязкость одной из

компонент:
$$\overline{Eu} = \frac{P}{U^2\hat{\rho}}$$

Число Эйлера характеризует отношение сил давления к потоку импульса.

4. Число Струхала:
$$Sh = \frac{UT}{L}$$

Число Струхала характеризует инерционные гидродинамические силы, возникающие при нестационарном движении жидкости.

5. Число Пекле:
$$Pe = \frac{UL}{D}$$

Число Пекле характеризует соотношение между конвективным и молекулярным процессами переноса концентраций компонент в среде.

Для удобства переобозначим безразмерные переменные:

$$\tilde{v}_i = v_i, \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \tilde{p} = p, \quad \tilde{\rho} = \rho, \quad \tilde{\mu} = \mu, \quad \tilde{t} = t.$$

Тогда система (1.1.29) будет иметь следующий безразмерный вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{Sh} \frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla(\rho \bar{V})) = -\overline{Eu} \nabla p + \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\mu \mathbf{D}) + \frac{1}{Fr} \rho, \\
\operatorname{div} \bar{V} = 0, \\
\frac{1}{Sh} \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{t}} + (\bar{V} \cdot \nabla C_1) = \frac{1}{Pe} \Delta C_1, \\
\frac{1}{Sh} \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{t}} + (\bar{V} \cdot \nabla C_3) = \frac{1}{Pe} \Delta C_3, \\
C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\
\mu = \frac{1}{\hat{\mu}} \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1 + \mu_1 \mu_3 C_2 + \mu_1 \mu_2 C_3}, \\
\rho = \frac{1}{\hat{\rho}} (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3),
\end{array} \right. \quad (1.1.31)$$

§ 1.2. Выбор соотношения для определения вязкости среды

Смесь связного грунта и воды является суспензией, содержащей мельчайшие коллоидные частицы, которые зачастую не выпадают в осадок. Газоводяная смесь на границе между водой и воздухом также создает область неоднородности. Рассматривая воздух, воду и связный грунт как единую вязкую несжимаемую среду, необходимо некоторым образом определять значения ее вязкости и плотности в зависимости от концентрации компонент. Соотношение для плотности выражается через понятие смеси компонент (см. параграф 1.1).

Так как воздух и связный грунт в представленных нами задачах не взаимодействуют напрямую, можно отдельно рассматривать соотношения вязкостей для смесей воздух — вода и вода — связный грунт.

Для пары вода — связный грунт такое соотношение может быть получено при помощи двух интерпретаций физического явления взаимодействия воды и связного грунта. Первая рассматривает воду как несущую фазу, а грунт как множество мелких твердых частиц, меняющих так называемую эффективную вязкость среды. В этом случае мы говорим о вязкости суспензии. Вторая рассматривает намокший связный грунт как некоторую жидкость, имеющую свою вязкость и плотность. Таким образом, вся среда является эмульсией и представляет собой смесь двух жидкостей.

Реологии суспензий с начала двадцатого века посвящено много работ [62, 72, 100]. Несмотря на это однозначного взгляда на данную проблему нет. Первая теоретическая модель вязкости сильно разбавленных суспензий невзаимодействующих сферических частиц была предложена А. Эйнштейном. Он показал, что вязкость суспензии является следствием возмущений, вносимых твердыми частицами в жидкой фазе, и выражается следующим образом [66]:

$$\mu = \mu_0 (1 + \alpha\varphi), \quad (1.2.1)$$

где μ – вязкость суспензии, μ_0 – вязкость жидкой фазы, φ – объемная концентрация твердой фазы, α – поправочный коэффициент, зависящий от формы частиц твердой фазы.

В разных работах предпринимались многочисленные попытки обобщения уравнения Эйнштейна [75]. Однако главным недостатком таких уравнений остается невозможность их применения для суспензий с высокой концентрацией твердого вещества.

Согласно современным представлениям реология суспензий определяется как результат контактного взаимодействия составляющих ее частиц, самопроизвольного, обусловленного физико-химическими факторами либо вызванного действием внешних сил, образования и разрушения смешанных структур разного типа [100]. При этом модели, построенные с точки зрения теории контактных взаимодействий, зачастую не соответствуют экспериментальным данным и с трудом могут быть использованы для практических целей.

Для расчета вязкости суспензий в промышленности применяют эмпирические формулы. Однако они могут иметь узкие границы применимости, плохо согласоваться с теоретическими данными и друг с другом.

При другом подходе намокший связный грунт рассматривается как вязкая жидкость с известной вязкостью, а получившаяся среда – как смесь жидкостей.

Вопрос о предсказании величины вязкости смеси жидкостей достаточно сложен. Это связано с тем, что она не определяется по правилу аддитивности вязкостей компонент и может быть меньше или больше ожидаемого среднего значения. В этом случае вводится понятие текучести среды и компонент (величины $\frac{1}{\mu}$), которая считается аддитивной в смеси. В [74] вязкость смеси жидкостей выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{(C_i)^{\alpha_i}}{\mu_i}, \quad i = \overline{1 \dots n}, \quad (1.2.2)$$

где μ – вязкость смеси, C_i – концентрация i -ой компоненты, μ_i – вязкость i -ой компоненты, α_i – эмпирическая постоянная, в идеальном случае равная 1.

Еще один способ не аддитивного определения вязкости смеси может быть выражен следующим соотношением [101, 144]:

$$\lg \mu = \sum_i C_i \lg \mu_i, \quad i = \overline{1..n}, \quad (1.2.3)$$

где используются такие же обозначения, как и для формулы (1.2.2).

В инженерной практике могут быть использованы аналоги формул (1.2.2) и (1.2.3) с дополнительными поправочными членами или коэффициентами [97, 117, 176].

В многокомпонентной среде могут быть различные законы изменения вязкости при взаимоперемешивании различных компонент. Определение верных соотношений для вязкости конкретных смесей требует дополнительных экспериментальных и теоретических исследований. В дальнейших задачах для определения вязкости среды мы будем использовать идеализированную формулу (1.2.2) для трех компонент:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2} + \frac{C_3}{\mu_3}. \quad (1.2.4)$$

§ 1.3. Численный алгоритм решения

В данном параграфе рассматривается численный алгоритм решения модели трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости (1.1.29), представленной в параграфе 1.1.

Математическая модель, описанная уравнениями системы (1.1.29), рассматривает движение смеси вязких несжимаемых жидкостей, которые составляют единую сплошную среду с переменными по времени и пространству значениями плотности и вязкости. Преимущество такого подхода заключается в том, что при составлении численного алгоритма нет необходимости выделять особенности решения на границах между компонентами, а движение всей среды описывается единой системой уравнений. Таким образом, для численного решения системы (1.1.29) можно использовать схемы «сквозного счета».

Система уравнений (1.1.29) в дивергентной форме записи может быть представлена в следующем виде [59]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho \bar{V})}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{F}_0, \\ \operatorname{div} \bar{V} = 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{P}_i^{C_1}}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial C_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{P}_i^{C_3}}{\partial x_i} = 0, \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\ \mu = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1 + \mu_1 \mu_3 C_2 + \mu_1 \mu_2 C_3}, \\ \rho = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3, \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

$$\text{где } \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_i^2 + \mathbf{F}_i^3, \quad \mathbf{F}_i^1 = \begin{pmatrix} v_i \rho v_1 \\ v_i \rho v_2 \\ v_i \rho v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i^2 = \begin{pmatrix} \delta_{1i} p \\ \delta_{2i} p \\ \delta_{3i} p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_i^3 = \begin{pmatrix} -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \end{pmatrix},$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \text{компоненты тензора вязких напряжений}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

$$- \text{ символ Кронекера, } \mathbf{P}_i^C = v_i C - D \frac{\partial C}{\partial x_i}.$$

Вектор \mathbf{F}_0 выражает массовые силы. Вектор \mathbf{F}_i учитывает действие физических процессов различной природы по направлению x_i , а именно, \mathbf{F}_i^1 – конвективные перенос количества движения, \mathbf{F}_i^2 – давление, \mathbf{F}_i^3 – диффузионный перенос количества движения, \mathbf{P}_i^C – поток переноса концентрации.

Также система уравнений может быть записана в недивергентной форме [59]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \bar{V} + \mathbf{B}^2 p = \mathbf{B}_0, \\ \text{div } \bar{V} = 0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{\Pi}_i C_1 = 0, \\ \frac{\partial C_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{\Pi}_i C_3 = 0, \\ C_2 = 1 - C_1 - C_3, \\ \mu = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1 + \mu_1 \mu_3 C_2 + \mu_1 \mu_2 C_3}, \\ \rho = \rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 + \rho_3 C_3, \end{array} \right. \quad (1.3.2)$$

$$\text{где } \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i^1 + \mathbf{B}_i^3, \quad \mathbf{B}_i^1 = \begin{pmatrix} B_{i1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{i2}^1 & 0 \\ 0 & 0 & B_{i3}^1 \end{pmatrix}, \quad B_{ij}^1 = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (1 + \delta_{ij}) \mu \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} D \Delta \rho & B_{12}^3 & B_{13}^3 \\ B_{21}^3 & -\frac{1}{\rho} D \Delta \rho & B_{23}^3 \\ B_{31}^3 & B_{32}^3 & -\frac{1}{\rho} D \Delta \rho \end{pmatrix}, \quad B_{ij}^3 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\Pi_i = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - D \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Вектор \mathbf{B}_0 выражает массовые силы. Матричный оператор \mathbf{B}_i учитывает действие физических процессов различной природы по направлению x_i , а именно, \mathbf{B}_i^1 – конвективные и часть вязких членов (только повторные производные), \mathbf{B}^2 – вектор производных по давлению, \mathbf{B}_i^3 – вязкие члены для смешанных производных и член $D \Delta \rho$, возникающий вследствие наличия диффузии массы в среде.

1.3.1 Разностные сетки

В области решения $\Omega_T = \Omega \times [0; T]$ систем (1.3.1) и (1.3.2) построим неравномерную сетку по времени $\Omega_t = \{t_n : n = \overline{0, P}; t_0 = 0, t_P = T\}$ и неравномерную прямоугольную согласованную с границами области сетку с шагами (H^{v1}, H^{v2}, H^{v3}) по пространственным направлениям (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned} H^{v1} &= \{H_i^{v1} : i = \overline{0, N}\}, \\ H^{v2} &= \{H_j^{v2} : j = \overline{0, M}\}, \\ H^{v3} &= \{H_k^{v3} : k = \overline{0, L}\}, \end{aligned}$$

где (N, M, L) – количество узлов по направлениям (x_1, x_2, x_3) .

Таким образом, область разбивается непересекающимися ячейками, в трехмерном случае принимающими вид параллелепипеда. На основании этого построения введем следующий набор сеток:

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \left\{ (X_i^1, X_j^2, X_k^3) : i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L} \right\}, \\ \Omega_h^1 &= \left\{ (X_i^{v1}, X_j^2, X_k^3) : i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L} \right\}, \\ \Omega_h^2 &= \left\{ (X_i^1, X_j^{v2}, X_k^3) : i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L} \right\}, \\ \Omega_h^3 &= \left\{ (X_i^1, X_j^2, X_k^{v3}) : i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L} \right\},\end{aligned}$$

где (X_i^1, X_j^2, X_k^3) – координата центра ячейки с индексом (i, j, k) , $X_i^{v1} = X_i^1 - \frac{H_i^{v1}}{2}$, $X_j^{v2} = X_j^2 - \frac{H_j^{v2}}{2}$, $X_k^{v3} = X_k^3 - \frac{H_k^{v3}}{2}$ – сдвиги на грани ячейки с индексом (i, j, k) по соответствующим направлениям.

Через (H^1, H^2, H^3) обозначим набор шагов по направлениям для сетки Ω_h :

$$\begin{aligned}H^1 &= \left\{ H_i^1 = X_{i+1}^1 - X_i^1 : i = \overline{0, N-1} \right\}, \\ H^2 &= \left\{ H_j^2 = X_{j+1}^2 - X_j^2 : j = \overline{0, M-1} \right\}, \\ H^3 &= \left\{ H_k^3 = X_{k+1}^3 - X_k^3 : k = \overline{0, L-1} \right\}.\end{aligned}$$

Введем сеточные функции $V^n = (v_1^n, v_2^n, v_3^n)$, p^n , C_1^n , C_2^n , C_3^n , ρ^n , μ^n . Для дискретизации систем (1.3.1) и (1.3.2) по пространственным переменным используется метод конечных разностей на прямоугольной неравномерной сетке с шахматным расположением узлов [82]: давление, дивергенция скорости, концентрация компонент, плотность и вязкость среды определяются в центрах ячеек (сетка Ω_h), а компоненты вектора скорости – на границах ячеек (сетки Ω_h^1 , Ω_h^2 и Ω_h^3 соответственно). Применение разнесенной сетки позволяет связать значения скорости и давления в соседних узлах и избежать появления осцилляций в решении, которые возникают при использовании центральных разностей на совмещенной сетке. Также шахматное расположение узлов позволяет

автоматически удовлетворять дискретному представлению условия несжимаемости $\text{div } \bar{V} = 0$ [20]. На рисунке 1.1 представлена схема расположения узлов, разнесенных для двумерного случая.

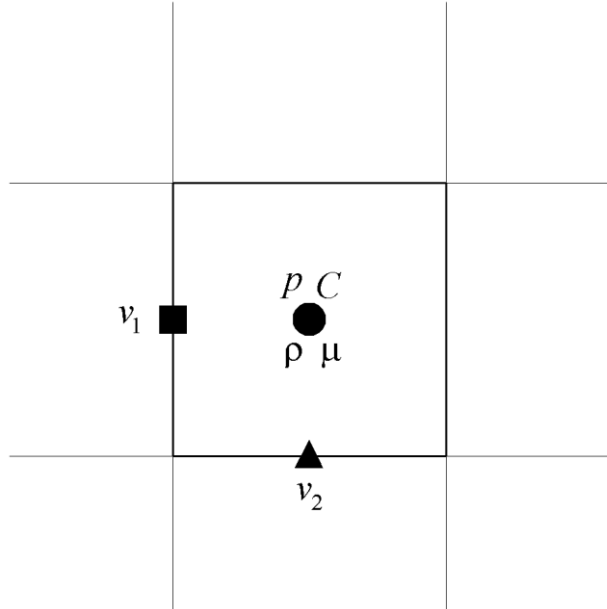


Рисунок 1.1 – Расположение узлов сеточных функций в ячейке разнесенной сетки для двумерного случая

Для аппроксимации первых и вторых производных по пространству на сетке Ω_h в точке с индексом (s, r) введем обозначения Λ_i , Λ_{i+} , Λ_{i-} , $\bar{\Lambda}_i$, Λ_{ii} и Λ_{ij} :

$$\Lambda_i f_s = \frac{f_{s+1} - f_{s-1}}{H_s^i + H_{s-1}^i},$$

$$\Lambda_{i+} f_s = \frac{f_{s+1} - f_s}{H_s^i},$$

$$\Lambda_{i-} f_s = \frac{f_s - f_{s-1}}{H_{s-1}^i},$$

$$a \bar{\Lambda}_i f_s = \begin{cases} a \Lambda_{i+} f_s, & a < 0, \\ a \Lambda_{i-} f_s, & a \geq 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_{ii} f_{sr} = \frac{\Lambda_{i+} f_{sr} - \Lambda_{i-} f_{sr}}{0.5(H_s^i + H_{s-1}^i)},$$

$$\Lambda_{ij} f_{sr} = \frac{\Lambda_i f_{sr+1} - \Lambda_i f_{sr-1}}{H_r^j + H_{r-1}^j},$$

где i, j – направления по пространству.

Аппроксимацию по времени на сетке Ω_t в момент времени n обозначим через Λ_t :

$$\Lambda_t f^{n+1} = \frac{f^{n+1} - f^n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Тогда система уравнений (1.3.1) аппроксимируется на сеточных функциях $V^n = (v_1^n, v_2^n, v_3^n)$, p^n , C_1^n , C_2^n , C_3^n , ρ^n , μ^n в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_t (\rho^n V^n) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{ih} = \mathbf{F}_{0h}, \\ \operatorname{div}_h V^n = 0, \\ \Lambda_t C_1^n + \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_{ih}^{C_1^n} = 0, \\ \Lambda_t C_3^n + \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_{ih}^{C_3^n} = 0, \\ C_2^n = 1 - C_1^n - C_3^n, \\ \mu^n = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1^n + \mu_1 \mu_3 C_2^n + \mu_1 \mu_2 C_3^n}, \\ \rho^n = \rho_1 C_1^n + \rho_2 C_2^n + \rho_3 C_3^n, \end{array} \right. \quad (1.3.3)$$

$$\text{где } \mathbf{F}_{0h} = \begin{pmatrix} \rho^n f_1 \\ \rho^n f_2 \\ \rho^n f_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ih} = \mathbf{F}_{ih}^1 + \mathbf{F}_{ih}^2 + \mathbf{F}_{ih}^3, \quad \mathbf{F}_{ih}^1 = \begin{pmatrix} \Lambda_i v_i^n \rho v_1^n \\ \Lambda_i v_i^n \rho v_2^n \\ \Lambda_i v_i^n \rho v_3^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ih}^2 = \begin{pmatrix} \Lambda_i \delta_{1i} p^n \\ \Lambda_i \delta_{2i} p^n \\ \Lambda_i \delta_{3i} p^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{ih}^3 = \begin{pmatrix} -\Lambda_i \mu^n (\Lambda_i v_1^n + \Lambda_1 v_i^n) \\ -\Lambda_i \mu^n (\Lambda_i v_2^n + \Lambda_2 v_i^n) \\ -\Lambda_i \mu^n (\Lambda_i v_3^n + \Lambda_3 v_i^n) \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad - \quad \text{символ Кронекера,}$$

$$\operatorname{div}_h V^n = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i v_i^n, \quad \mathbf{P}_{ih}^C = \Lambda_i (v_i^n C^n - D \Lambda_i C^n).$$

На равномерной сетке система конечно-разностных уравнений (1.3.3) имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и первый – по временной [59].

Аналогично запишем аппроксимацию системы (1.3.2) в недивергентном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_t V^n + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_{ih} V^n + \mathbf{B}_h^2 p^n = \mathbf{B}_0, \\ \operatorname{div}_h V^n = 0, \\ \Lambda_t C_1^n + \sum_{i=1}^3 \mathbf{\Pi}_{ih} C_1^n = 0, \\ \Lambda_t C_3^n + \sum_{i=1}^3 \mathbf{\Pi}_{ih} C_3^n = 0, \\ C_2^n = 1 - C_1^n - C_3^n, \\ \mu^n = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_2 \mu_3 C_1^n + \mu_1 \mu_3 C_2^n + \mu_1 \mu_2 C_3^n}, \\ \rho^n = \rho_1 C_1^n + \rho_2 C_2^n + \rho_3 C_3^n, \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

где $\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_{ih} = \mathbf{B}_{ih}^1 + \mathbf{B}_{ih}^3$, $\mathbf{B}_{ih}^1 = \begin{pmatrix} B_{i1h}^1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{i2h}^1 & 0 \\ 0 & 0 & B_{i3h}^1 \end{pmatrix}$,

$$B_{ijh}^1 = v_i^n \bar{\Lambda}_i - \frac{1}{\rho^n} \Lambda_i (1 + \delta_{ij}) \mu^n \Lambda_i, \quad \mathbf{B}_h^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^n} \Lambda_1 \\ \frac{1}{\rho^n} \Lambda_2 \\ \frac{1}{\rho^n} \Lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{ih}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho^n} D\Lambda_{11}\rho^n & B_{12h}^3 & B_{13h}^3 \\ B_{21h}^3 & -\frac{1}{\rho^n} D\Lambda_{22}\rho^n & B_{23h}^3 \\ B_{31h}^3 & B_{32h}^3 & -\frac{1}{\rho^n} D\Lambda_{33}\rho^n \end{pmatrix}, \quad B_{ijh}^3 = \frac{1}{\rho^n} \Lambda_j \mu^n \Lambda_i, \quad \operatorname{div}_h V^n = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i v_i^n$$

$$, \quad \mathbf{\Pi}_{ih} = v_i^n \bar{\Lambda}_i - D\Lambda_{ii}.$$

На равномерной сетке система конечно-разностных уравнений (1.3.4) имеет первый порядок аппроксимации, как по пространственным переменным, так и по временной [59].

1.3.2 Численные методы решения

Для нахождения решения одного временного слоя используется алгоритм, состоящий из следующих этапов:

1. С учетом известных вектора скорости и распределения концентрации (а значит и значений плотности и вязкости), совершается шаг по времени для уравнений движения системы (1.3.1).
2. Используя полученные значения компонент скорости, делается шаг по времени для уравнения конвективной диффузии первой и третьей компоненты системы (1.3.1).
3. По соотношению (1.1.11) вычисляется значение концентрации второй компоненты.

4. Производится пересчет значений плотности и вязкости в среде по формулам (1.1.10) и (1.1.25). Затем следует переход на первый этап следующего шага по времени.

Для определения значений скоростей и давления в среде необходимо решить многомерную нелинейную систему уравнений движения. Одним из эффективных способов решения подобных систем является использование идеологии расщепления задачи при построение разностной схемы [105]. Основная идея расщепления заключается в сведении решения многомерной задачи к ряду задач более простой структуры.

В случае решения уравнений движения это достигается применением расщепления по физическим процессам [12], с учетом переменных вязкости и плотности. Такое расщепление основано на предположение, что на промежуточном слое по времени при вычислении поля скоростей градиент давления равен нулю и перенос количества движения происходит только за счет конвекции и диффузии. Затем давление восстанавливается на полном шаге, с учетом выполнения условия несжимаемости. Таким образом, уравнения движения системы (1.3.1) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t_{n+1}} + \frac{1}{\rho^n} (\tilde{\mathbf{F}}_{1h} + \tilde{\mathbf{F}}_{3h}) = \frac{1}{\rho^n} \mathbf{F}_{0h}^n, \\ \frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\Delta t_{n+1}} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1}, \\ \operatorname{div}_h V^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Для определения промежуточного поля скоростей \tilde{V} необходимо решить первое уравнение системы (1.3.5):

$$\frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t_{n+1}} + \frac{1}{\rho^n} (\tilde{\mathbf{F}}_{1h} + \tilde{\mathbf{F}}_{3h}) = \frac{1}{\rho^n} \mathbf{F}_{0h}^n \quad (1.3.6)$$

Для решения системы (1.3.6) используется метод предиктор-корректор [105], который является одной из разновидностей метода расщепления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V^{n+1/6} - V^n}{\Delta t_{n+1}/2} + \mathbf{B}_{1h}^1 V^{n+1/6} = 0, \\ \frac{V^{n+2/6} - V^{n+1/6}}{\Delta t_{n+1}/2} + \mathbf{B}_{2h}^1 V^{n+2/6} = 0, \\ \frac{V^{n+3/6} - V^{n+2/6}}{\Delta t_{n+1}/2} + \mathbf{B}_{3h}^1 V^{n+3/6} = 0, \\ \frac{\tilde{V} - V^n}{\Delta t_{n+1}} + \frac{1}{\rho^n} (\mathbf{F}_{1h}^{n+3/6} + \mathbf{F}_{3h}^{n+3/6}) = \frac{1}{\rho^n} \mathbf{F}_{0h}^n. \end{array} \right. \quad (1.3.7)$$

На этапе предиктора уравнения в недивергентном виде решаются по неявной схеме, что создает запас устойчивости, а консервативность схемы восстанавливается на этапе корректора при аппроксимации уравнений в дивергентной форме [59]. Следует отметить также экономичность данного метода, так как каждый дробный шаг предиктора решается скалярными прогонками.

Не смотря на то, что полученное промежуточное поле скоростей \tilde{V} не удовлетворяет уравнению неразрывности, оно имеет физический смысл, так как сохраняет вихревые характеристики во внутренних точках [20].

Далее необходимо рассчитать поле давления и поле скоростей, решив оставшиеся два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\Delta t_{n+1}} &= -\frac{1}{\rho^n} \nabla p^{n+1}, \\ \operatorname{div}_h V^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Их непосредственная реализация затруднена, поэтому обычно поступают следующим образом. Выражаем поле скоростей V^{n+1} из первого уравнения и подставляем его в уравнение неразрывности. Тогда, с учетом переменной плотности, получаем следующее уравнение для давления:

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho^n} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{\operatorname{div}_h \tilde{V}}{\Delta t_{n+1}} \quad (1.3.9)$$

Решение системы алгебраических уравнений, полученной в результате дискретизации уравнения для нахождения давления в (1.3.9), представляет собой один из наиболее важных и доминирующих моментов вычислительной процедуры с точки зрения затрат машинных ресурсов. Матрица для этой системы может терять свойство самосопряженности в случаях, когда оно решается на неравномерной сетке или при некоторых граничных условиях, что значительно усложняет решение соответствующей СЛАУ. Для решения этого этапа вычислительного процесса используется градиентный итерационный метод бисопряженных градиентов со стабилизирующей поправкой BiCGStab [163]. Это обусловлено универсальностью метода и его применимостью к достаточно широкому классу систем [73]. Алгоритм метода BiCGStab для системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, $A \in M(\mathbb{R})_{N \times N}$, $x, b \in \mathbb{R}^N$ имеет вид:

1. Подготовка перед запуском итерационного цикла:

$$\forall x^0, \quad r^0 = b - Ax^0, \quad p^0 = r^0, \quad \forall r_*^0 : (r_*^0, r^0) \neq 0.$$

2. Тело итерационного цикла, который продолжается до выполнения условия на значение нормы невязки решения СЛАУ:

$$\alpha_n = \frac{(r_*^0, r^n)}{(Ap^n, r_*^0)}; \quad s^n = r^n - \alpha_n Ap^n; \quad \omega_n = \frac{(As^n, s^n)}{(As^n, As^n)};$$

$$x^{n+1} = x^n + \alpha_n p^n + \omega_n s^n;$$

$$r^{n+1} = s^n - \omega_n As^n; \quad \beta_n = \frac{\alpha_n (r^{n+1}, r_*^0)}{\omega_n (r^n, r_*^0)};$$

$$p^{n+1} = r^{n+1} + \beta_n (p^n - \omega_n Ap^n).$$

Здесь x^n – вектор решения, r^n – вектор невязки, p^n – вектор коррекции, α_n , ω_n , β_n – итерационные коэффициенты.

На третьем шаге перенос количества движения осуществляется только за счет градиента найденного давления:

$$\frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\Delta t_{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1}. \quad (1.3.10)$$

Для решения уравнений конвективной диффузии системы (1.3.3) используется схема предиктор-корректор с аппроксимацией конвективных слагаемых против потока [105]:

$$\begin{cases} \frac{C^{n+1/6} - C^n}{\Delta t_{n+1}/2} + \Pi_{1h} C^{n+1/6} = 0, \\ \frac{C^{n+2/6} - C^{n+1/6}}{\Delta t_{n+1}/2} + \Pi_{2h} C^{n+2/6} = 0, \\ \frac{C^{n+3/6} - C^{n+2/6}}{\Delta t_{n+1}/2} + \Pi_{3h} C^{n+3/6} = 0, \\ \frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t_{n+1}} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}_{ih} C^{n+3/6} = 0. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

После нахождения концентраций компонент явным образом пересчитываются значения плотности и вязкости в среде по формулам (1.1.10) и (1.1.25).

Начальные и граничные условия для системы уравнений (1.1.29) указываются далее при постановке каждой решаемой задачи.

Шаг по времени t_n выбирался на основе оценки конвективных и диффузионных потоков [20]:

$$t_n = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3),$$

$$\text{где } \tau_1 \leq K_1 \min_{c \in \Omega_h} \left\{ \frac{H_c^i}{|v_c^i|} \right\}, \quad \tau_2 \leq K_2 \min_{c \in \Omega_h} \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_c}{\rho_c (H_c^i)^2} \right)^{-1} \right\}, \quad \tau_3 \leq K_3 \min_{c \in \Omega_h} \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \frac{D}{(H_c^i)^2} \right)^{-1} \right\}.$$

Такой выбор шага по времени используется для обеспечения приемлемой точности расчета и обусловлен физической скоростью изменения параметров среды. Например, частица жидкости за один шаг по времени не должна продвинуться больше, чем на один пространственный шаг. Иначе результат разностной схемы может не стремиться к решению дифференциального

уравнения. На практике это может привести к получению неправильных скорости распространения и формы движущейся волны. Поэтому расстояние, которое компонента или физическое возмущение пройдет за один шаг по времени (в результате конвекции или диффузии), не должно превышать характерный размер ячейки в данной области.

1.3.3 Программная реализация

Для расчёта задач, моделируемых движением двух- и трехкомпонентной среды (перенос придонного связного грунта внутренним течением, распространение поверхностных волн, возникновением поверхностной волны в результате движения подводного деформируемого оползня по склону), был разработан программный комплекс, включающий в себя реализацию численных алгоритмов для решения системы уравнений (1.1.29). Программный комплекс состоит из препроцессора, процессора и постпроцессора.

Препроцессор выполняет подготовительные действия для проведения расчета: формирует геометрию области, проводит ее дискретизацию, определяет маску расчетных и граничных узлов, задает начальное расположение компонент.

В процессоре реализованы численные алгоритмы решения нестационарных уравнений движения многокомпонентной (двух- и трех-) вязкой несжимаемой жидкости. Количество компонент, их вязкости и плотности, граничные условия и прочие параметры расчета зависят от решаемой задачи и задаются перед запуском процессора.

Для дальнейшей интерпретации численных результатов постпроцессор выполняет их вывод в виде специальных файлов. Поля скоростей, давления и концентрации компонент сохраняются в файл формата программы Tecplot. Также могут быть выведены дополнительные данные для проведения анализа или построения графиков, например, изменение высоты волны в определенном месте области или величина оказываемого давления на твердую стенку.

Программный комплекс реализован на языке программирования C++, что обеспечивает высокую скорость выполнения базовых арифметических операций

и позволяет использовать его на разных платформах (Windows, UNIX). Основные этапы численного расчета выделены в отдельные функции. Созданный программный комплекс был зарегистрирован и на него получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ номер 2017610030 «Программный комплекс для численного расчета динамики размыва связного грунта на дне водоема под действием внутреннего течения и диффузии «Cohesive Soil Erosion on the Bottom of Reservoirs»» [39].

1.3.4 Течение жидкости в каверне с движущейся верхней стенкой

В следующих двух пунктах проведем верификацию представленных численных методов решения системы уравнений (1.1.29).

Рассмотрим задачу движения однородной жидкости в двумерной квадратной каверне (см. рисунок 1.2). В результате постоянного движения верхней стенки образуется первичный вихрь в центре области и вторичные вихри вблизи углов каверны [120].

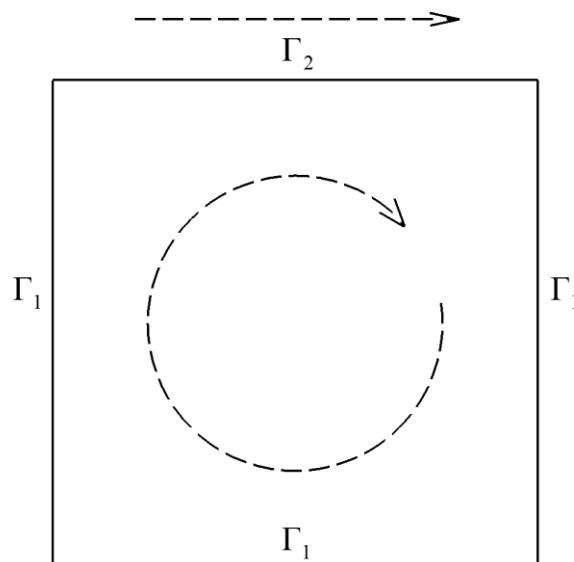


Рисунок 1.2 – Схема каверны с движущейся верхней крышкой

Так как жидкость однородная, то система уравнений (1.1.29) сводится к однокомпонентной $C_1 \equiv 1$, $\mu = \mu_1 = const$, $\rho = \rho_1 = const$, и принимает вид уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \bar{V} + \rho \bar{f}, \\ \operatorname{div} \bar{V} = 0, \end{cases} \quad (1.3.12)$$

где $\frac{d}{dt}$ – полная производная по времени, ∇ – оператор набла, div – оператор дивергенции, Δ – оператор Лапласа, $\bar{V}(\bar{x}, t) = (v_1, v_2)$ – вектор скорости среды в точке $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и момент времени t , $\mu = \text{const}$ – динамическая вязкость, $\rho = \text{const}$ – плотность, $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор массовых сил, p – давление.

Обозначения границ области приведены на рисунке 1.2. Здесь:

Γ_1 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница с постоянной ненулевой горизонтальной компонентой скорости, приводящая в движение жидкость в каверне

$$v_1|_{\Gamma_2} = 1.0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Интенсивность вихрей в каверне зависит от числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}$, где

U – характерная скорость, L – характерный линейный размер области. В качестве L возьмем длину каверны, а в качестве U – скорость на верхней стенке.

На рисунке 1.3 представлена картина установившегося течения в каверне, полученная при помощи метода установления [25], для числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = 100$.

Для проверки правильности решения были проведены расчеты на последовательности равномерных сеток с уменьшающимся шагом по пространству.

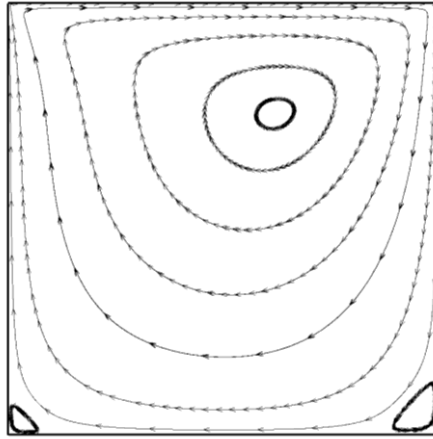


Рисунок 1.3 – Картина установившегося течения в каверне для числа Рейнольдса $Re = 100$

На рисунке 1.4 представлены профили горизонтальной и вертикальной компонент скорости в срезах по геометрическому центру каверны, вычисленные на двух сетках размерами 50×50 и 200×200 узлов. Также для сравнения на рисунке нанесены результаты, полученные в работе [120].

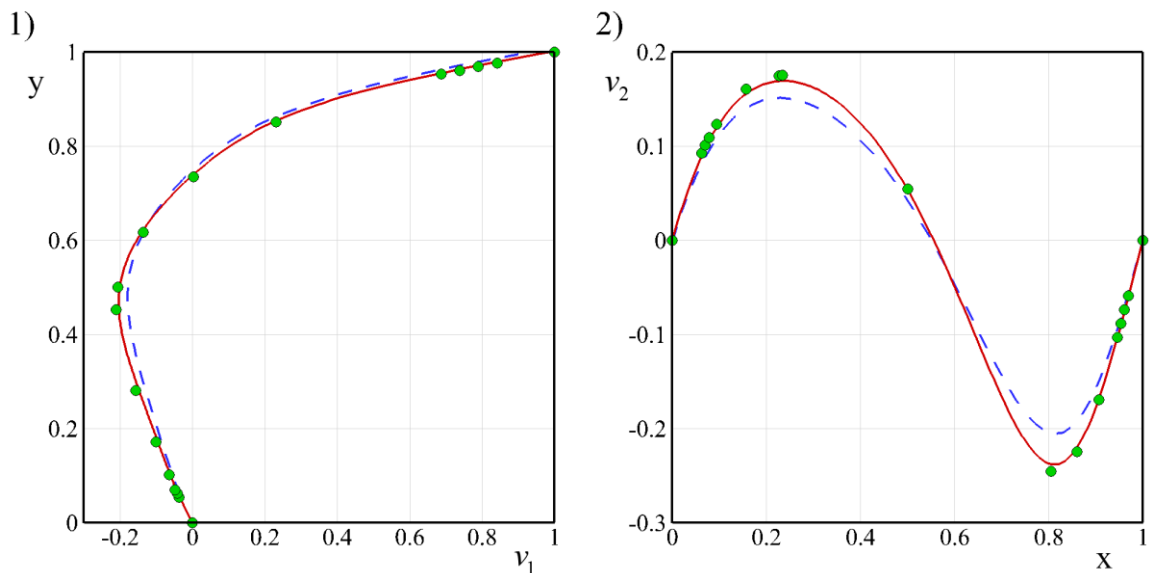


Рисунок 1.4 – Графики профилей компонент скорости по геометрическому центру каверны: 1) Горизонтальная компонента скорости, 2) Вертикальная компонента скорости. Синей прерывистой и красной сплошной линиями обозначены расчеты, полученные на сетках 50×50 и 200×200 узлов соответственно, зелеными кругами – результаты из работы [120]

Таким образом, при измельчении сетки решение сходится к результатам расчетов из работы [120], что свидетельствует о верификации и сеточной сходимости представленных методов решения для задачи движения однородной жидкости в двумерной квадратной каверне.

1.3.5 Протекание жидкости в канале постоянной ширины

Рассмотрим двумерную задачу протекания однородной жидкости в канале заданной ширины. При постоянном перепаде давления между входом и выходом в канале возникает течение Пуазейля (см. рисунок 1.5).

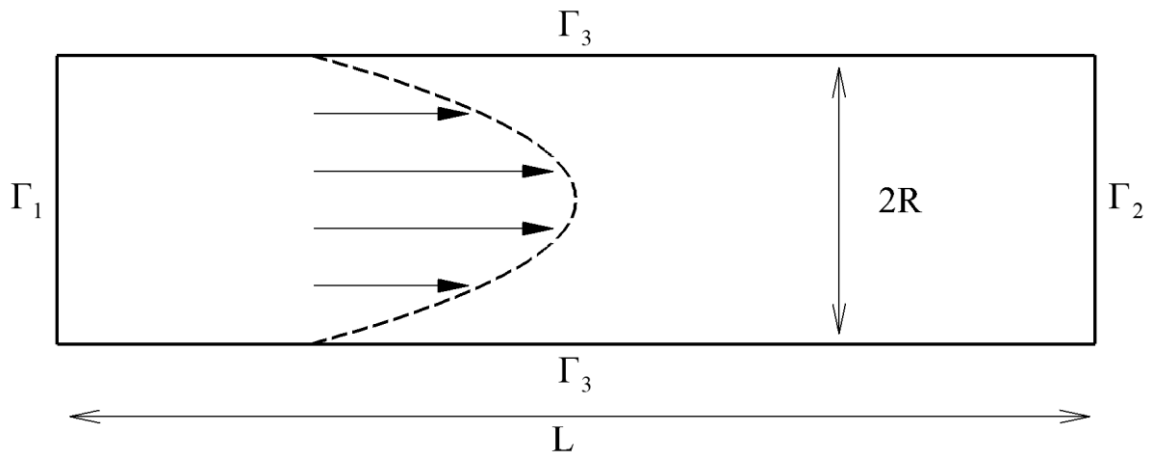


Рисунок 1.5 – Схема канала, в котором образуется течение Пуазейля

Для моделирования данной задачи, как и в предыдущем пункте, используем модель однородной несжимаемой жидкости (1.3.12).

Обозначения границ области приведены на рисунке 1.5. Здесь:

Γ_1 – входная граница, через которую жидкость втекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 3.2 \cdot 10^{-6}.$$

Γ_2 – выходная граница, через которую жидкость вытекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_3} = 0.$$

Течение Пуазейля подходит для проведения верификации методов решения, так как вертикальная компонента вектора скорости равна нулю, а горизонтальная имеет параболический профиль и является точным решением системы уравнений движения однородной несжимаемой жидкости [66]:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L} (R^2 - r^2), \quad (1.3.13)$$

где $v = v_1(r)$ – горизонтальная компонента вектора скорости, $p_1 = p|_{\Gamma_1}$, $p_2 = p|_{\Gamma_2}$ – давление на входе и выходе канала, $\mu = const$ – динамическая вязкость среды, L – длина канала, $2R$ – ширина канала, r – расстояние от горизонтальной центральной оси канала.

В расчете использовались следующие значения параметров:

$$p_1 - p_2 = 3.2 \cdot 10^{-6}, \quad \mu = 10^{-3}, \quad L = 4.0, \quad R = 0.5.$$

Тогда, согласно формуле (1.3.13), максимальное значение скорости достигается в центре канала:

$$v_{\max} = 10^{-4}.$$

На рисунке 1.6 представлены графики распределения горизонтальной компоненты скорости по сравнению с точным решением на различные моменты времени в сечении $L/2$ посередине канала.

Погрешность решения после момента времени 10^7 становится не больше одного процента. Таким образом, горизонтальная компонента вектора скорости распределена по параболическому закону и соответствует теоретическому решению (1.3.13), что свидетельствует о верификации представленных методов решения для задачи протекания жидкости в канале постоянной ширины.

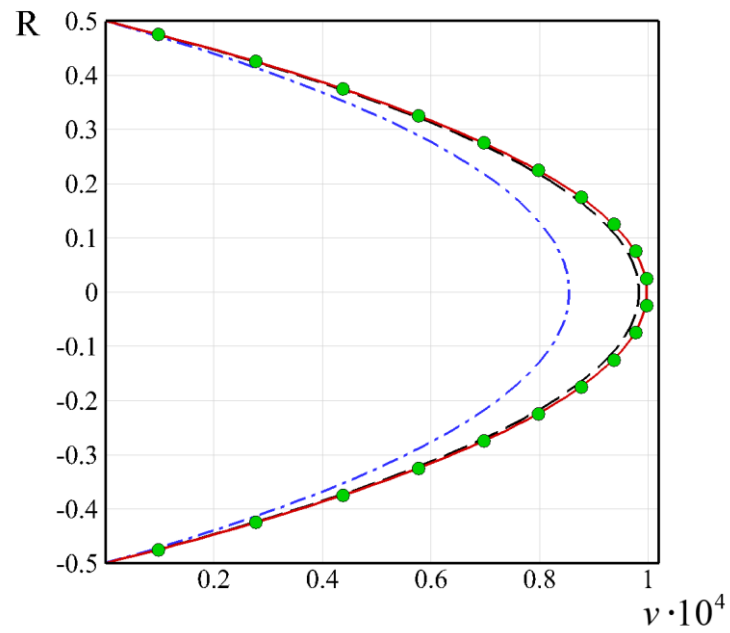


Рисунок 1.6 – График профилей горизонтальной компоненты скорости в канале на разные моменты времени: 1) $2 \cdot 10^6$ (синяя линия точка-тире) 2) $4 \cdot 10^6$ (черная прерывистая линия) 3) 10^7 (красная сплошная линия) 4) точное решение (1.3.13) (зеленые круги)

ГЛАВА 2. РАЗМЫВ СВЯЗНОГО ГРУНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ТЕЧЕНИЯ

Платформа гравитационного типа, стоящая на прибрежном шельфе, находится под постоянным воздействием переменного внутреннего течения. При набегании на основание платформы течение распадается на разнонаправленные пристеночные потоки. Одна часть этих потоков огибает платформу по бокам, имея большую по сравнению с невозмущенным течением скорость. Другая часть устремляется вверх, что приводит к местному повышению уровня воды. А третья часть направляется вниз, следствием чего становится образование придонных пристеночных вихрей. Характер распределения этих потоков зависит от формы препятствия, с которым происходит столкновение внутреннего течения [115, 151].

Потоки активно размывают верхний слой водонасыщенного связного грунта, обнажая ненамокшие нижние твердые слои. Со временем вода проникает в эти слои, что приводит к насыщению и размоканию грунта. На скорость и характер размыва связного грунта также влияет диффузионный перенос [76].

В данной главе моделируется размыв грунта внутренним течением, с учетом процесса размокания и диффузии грунта в воде. В первом параграфе рассматриваются тестовые задачи о вымывании примеси, имеющей отличную от среды вязкость и плотность, из области под действием постоянного течения. Показано влияние значений вязкости, плотности, диффузии примеси на скорость и характер переноса. Во втором параграфе предложен алгоритм процесса размокания твердых слоев связного грунта. Проведены расчеты двух- и трехмерных задач о намокании и размыве твердого связного грунта. Показано влияние параметра размокания на скорость размыва. В третьем параграфе проведена валидация модели размокания и размыва на лабораторной задаче Hole Erosion Test, представлены результаты сравнения с известным теоретическим решением и данными лабораторного эксперимента. В четвертом параграфе

представлены результаты расчетов трехмерных задач размыва и переноса связного грунта в воде.

§ 2.1. Перенос и размыв примеси потоком жидкости

Целью настоящего параграфа является моделирование переноса примеси, с отличными от среды значениями вязкости и плотности, внутренним течением при помощи модели двухкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде (см. подробнее пункт 1.1.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\rho \bar{V})}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \text{div}(\mu \bar{\mathbf{D}}) + \rho \bar{f}, \\ \text{div} \bar{V} = 0, \\ \frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{Pe} \Delta C_1, \\ C_2 = 1 - C_1, \\ \mu = \hat{\mu} \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 C_1 + \mu_1 C_2} \right), \\ \rho = \hat{\rho} (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2), \end{array} \right. \quad (1.3.14)$$

где $\bar{V}(\bar{x}, t) = (v_1, v_2)$ – вектор скорости смеси в точке $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и момент времени t , $\mu(\bar{x}, t)$ – динамическая вязкость, $\rho(\bar{x}, t)$ – плотность, $\bar{F} = (0, -1)$ – вектор массовых сил, $C_1(\bar{x}, t)$, $C_2(\bar{x}, t)$ – объемные концентрации компонент, $\hat{\rho}$ – характерная плотность, $\hat{\mu}$ – характерная динамическая вязкость, $\text{Re} = \frac{UL\hat{\rho}}{\hat{\mu}}$ – число Рейнольдса для характерной скорости U и характерной длины L , $Pe = \frac{UL}{D}$ – число Пекле при коэффициенте диффузии D .

Вторая компонента обозначает несущую жидкость, а первая – распространяющуюся в ней примесь. В качестве характерных плотности и вязкости берутся плотность и вязкость примеси.

Во всех расчетах этого параграфа вязкость и плотность несущей жидкости имеет значение $\mu_2 = 0.01$ и $\rho_2 = 1.0$. В качестве примеси использовались жидкости, у которых плотность и вязкость принимают следующие значения: больше в десять и сто раз, чем у несущей жидкости. В случае, когда вязкость и

плотность у компонент равны, мы считаем, что в области движется пассивная примесь, то есть не влияющая на динамику потока. Далее термин пассивная примесь будет применяться для обозначения подобных случаев.

Представленные задачи рассматривались в двумерной постановке. Вектор массовой силы соответствует $\vec{F} = (0, -1)$. Движение в области возникает за счет перепада давления на входной и выходной границах.

В качестве результатов представлены картины расположения примеси различной концентрации в области на определенные моменты времени.

2.1.1 Перенос примеси в канале переменной ширины с каверной

Рассмотрим задачу о распространение примеси в области. Область представляет собой канал переменной ширины (см. рисунок 2.1). В начальный момент времени около каверны находится прямоугольник примеси. С течением времени примесь уносится потоком из области.

Геометрия и размеры области, начальное расположение примеси указаны на рисунке 2.1.

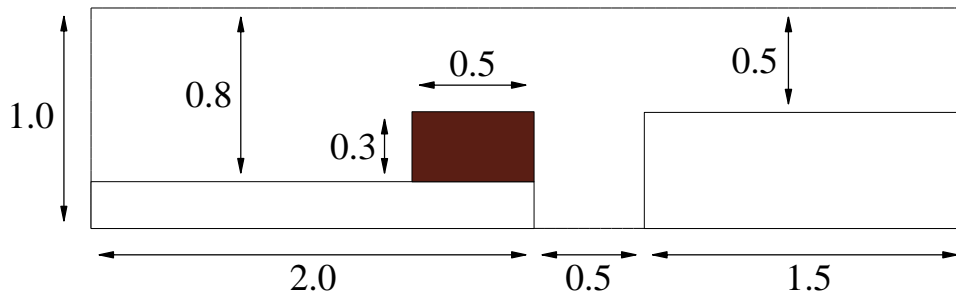


Рисунок 2.1 – Схема канала переменной ширины и расположение примеси в начальный момент времени

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.2. Здесь:

Γ_1 – граница, через которую жидкость втекает в область горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 1.0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница, через которую жидкость вытекает из области горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая стенка, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

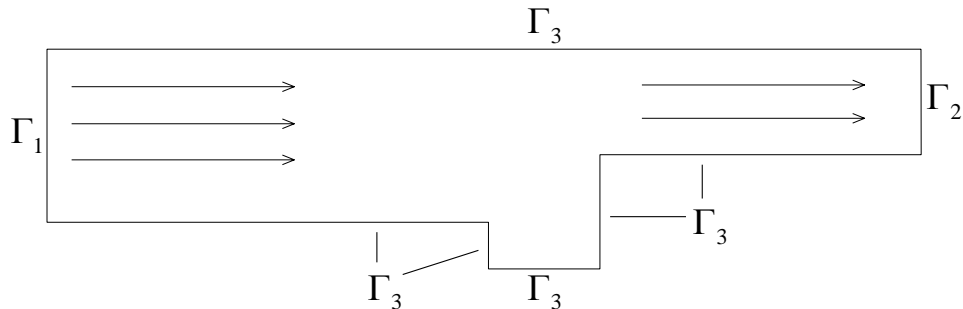


Рисунок 2.2 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 и твердой стенки Γ_3 для канала с переменной шириной

На рисунках 2.3 – 2.8 представлены картины переноса примеси и возникающие течения для значений плотности и вязкости: $\rho_1 = 1.0$, $\mu_1 = 0.01$; $\rho_1 = 10.0$, $\mu_1 = 0.1$; $\rho_1 = 100.0$, $\mu_1 = 1.0$.

Из проделанных численных расчетов можно сделать следующие выводы. Так как в каверне образуется вихрь, то пассивная примесь сносится потоком, не задерживаясь в области и не попадая в каверну. При увеличении вязкости и плотности примеси наблюдается замедление процесса переноса. Вследствие геометрии области после попадания примеси в каверну перенос происходит в большей степени благодаря диффузионному, нежели конвективному процессу. Плотность примеси является препятствием для несущей жидкости, вследствие чего развивается сложная структура течения, внутри каверны образуется большой диагональный вихрь, а перед ней подвижные вихри.

Таким образом, при увеличении вязкости и плотности примеси все большую роль в процессе переноса начинает играть диффузия.



Рисунок 2.3 – Распространение пассивной примеси (вязкость $\mu_1 = 0.01$, плотность $\rho_1 = 1.0$) в канале на моменты времени 5.5, 8.0, 15.0

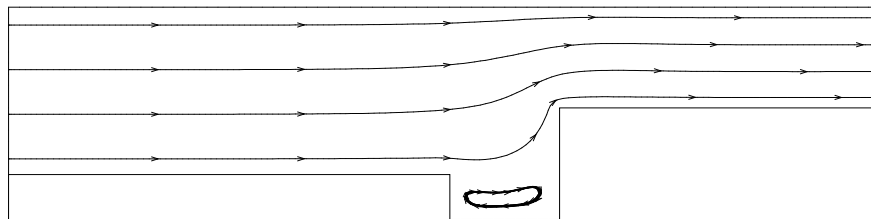


Рисунок 2.4 – Картина течения в канале для пассивной примеси на момент времени 15.0

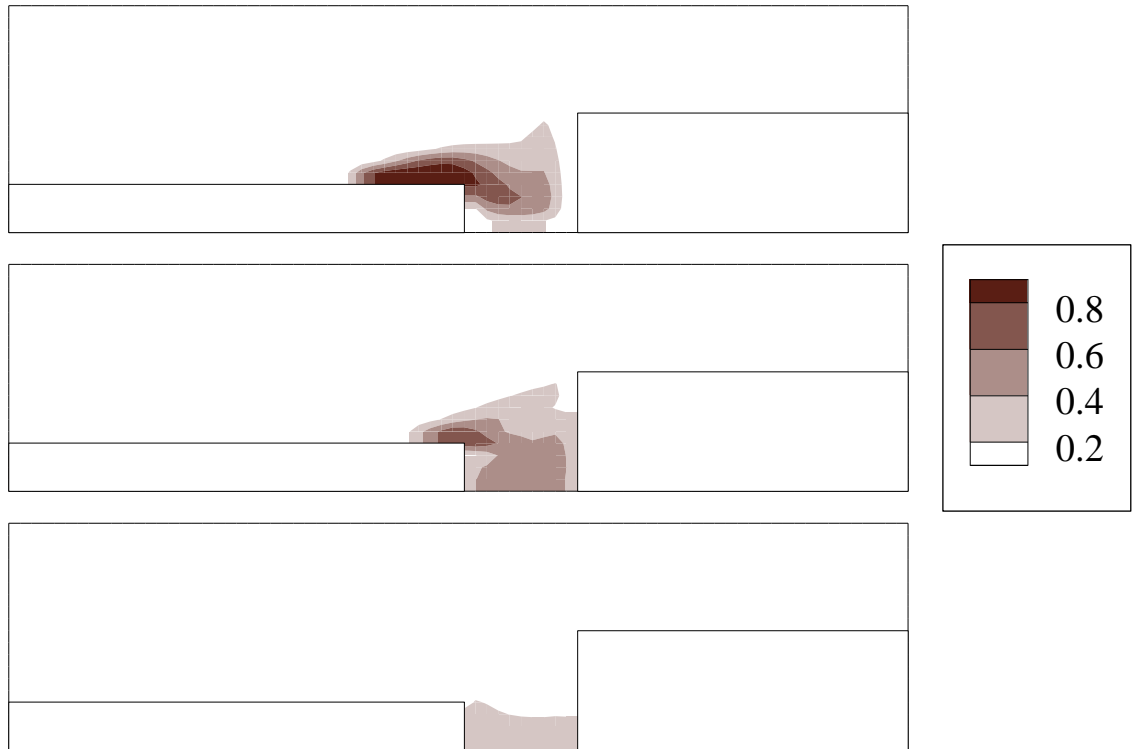


Рисунок 2.5 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0

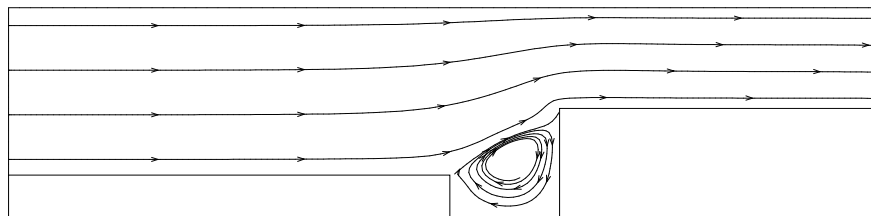


Рисунок 2.6 – Картина течения в канале для примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ на момент времени 500.0

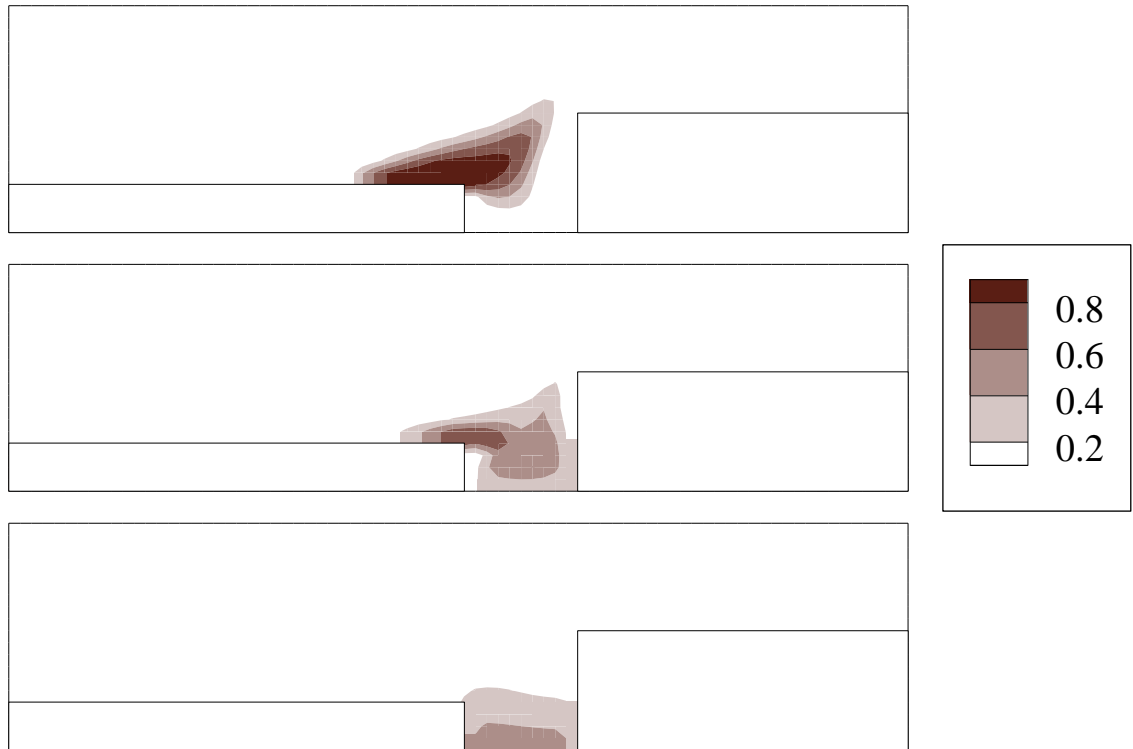


Рисунок 2.7 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0

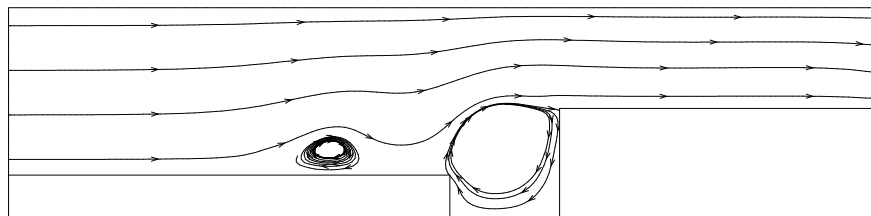


Рисунок 2.8 – Картина течения в канале для примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ на момент времени 500.0

2.1.2 Размыв примеси в канале с препятствием

В этом пункте рассмотрим задачу размыва примеси вблизи препятствия. Область решения представляет собой канал, в котором находится препятствие в виде прямоугольника. Под ним располагается примесь, которая может иметь различные значения вязкости и плотности.

Геометрия и размеры области и препятствия, начальное расположение примеси указаны на рисунке 2.9.

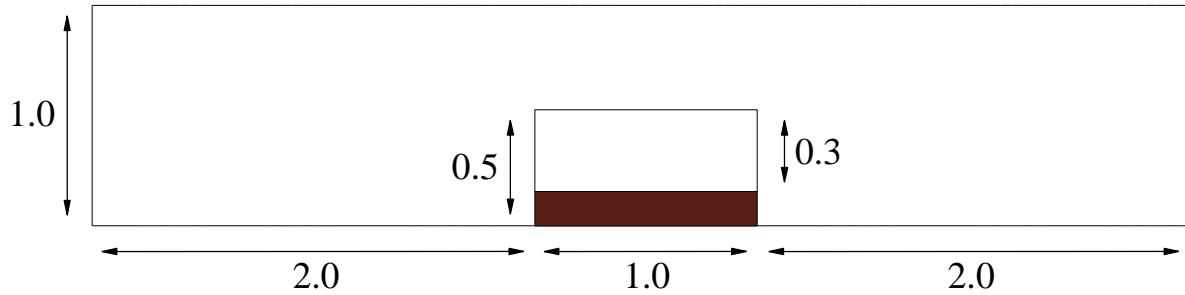


Рисунок 2.9 – Схема канала с прямоугольным препятствием и расположение примеси в начальный момент времени

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.10.

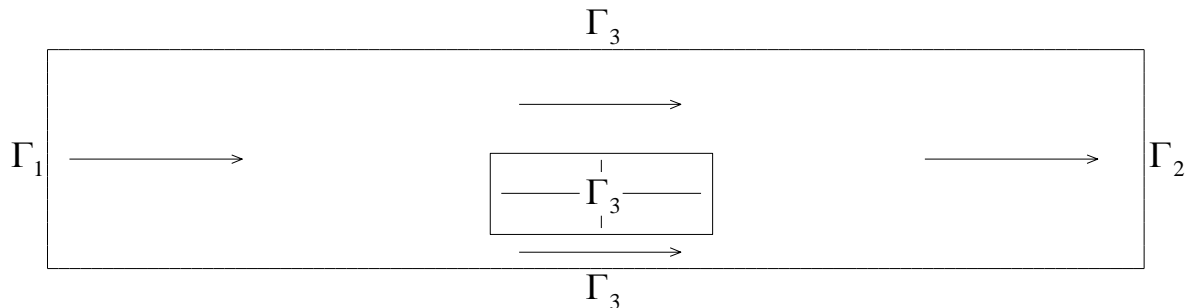


Рисунок 2.10 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 и твердой стенки Γ_3 для канала с препятствием

Здесь:

Γ_1 – граница, через которую жидкость втекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 0.01, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница, через которую жидкость вытекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая стенка, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

На рисунке 2.11 – 2.16 представлены картины размыва примеси и возникающие течения для различных значений плотности и вязкости: $\rho_1 = 1.0$, $\mu_1 = 0.01$; $\rho_1 = 10.0$, $\mu_1 = 0.1$; $\rho_1 = 100.0$, $\mu_1 = 1.0$.

При увеличении вязкости и плотности примеси скорость движения под препятствием падает. Перед ним возникает вихрь, а основная часть потока огибает его сверху.

На рисунках 2.13 и 2.15 видно, что перед препятствием образуются подвижные вихри, а вклад диффузионной составляющей в процесс переноса становится все более значительным.

Таким образом, выбор параметров размываемого вещества непосредственно влияет не только на скорость размыва, но и на динамику движения всей среды.



Рисунок 2.11 – Распространение пассивной примеси в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 180.0, 380.0

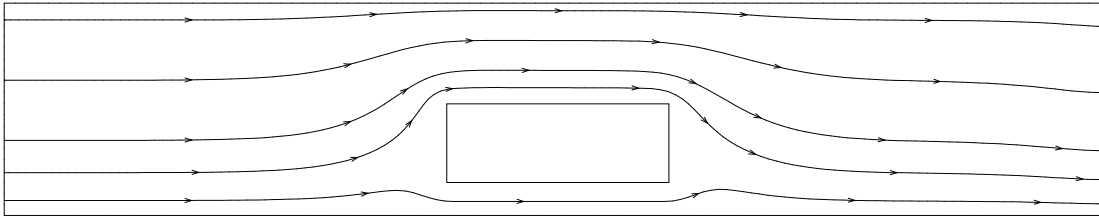


Рисунок 2.12 – Картина течения в канале с препятствием для пассивной примеси на момент времени 380.0

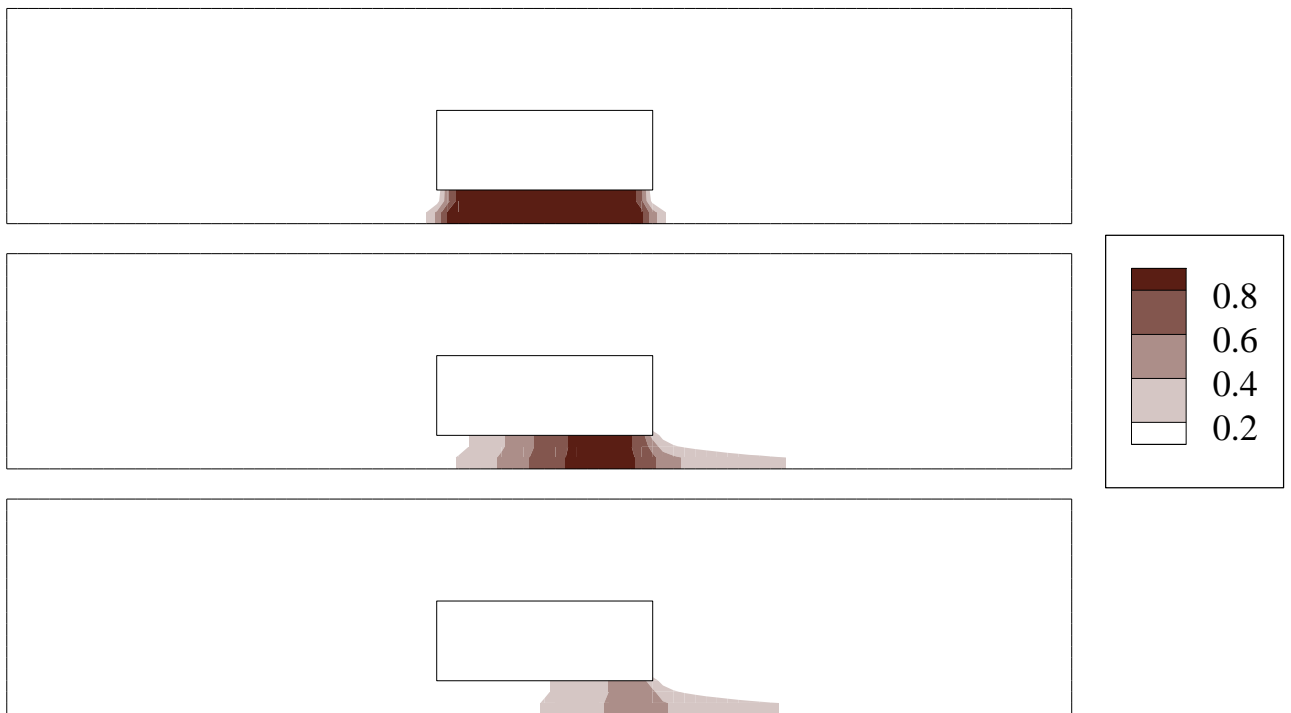


Рисунок 2.13 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0

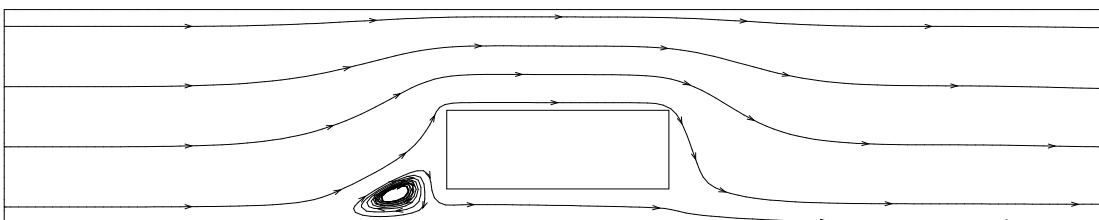


Рисунок 2.14 – Картина течения в канале с препятствием для примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ на момент времени 5000.0

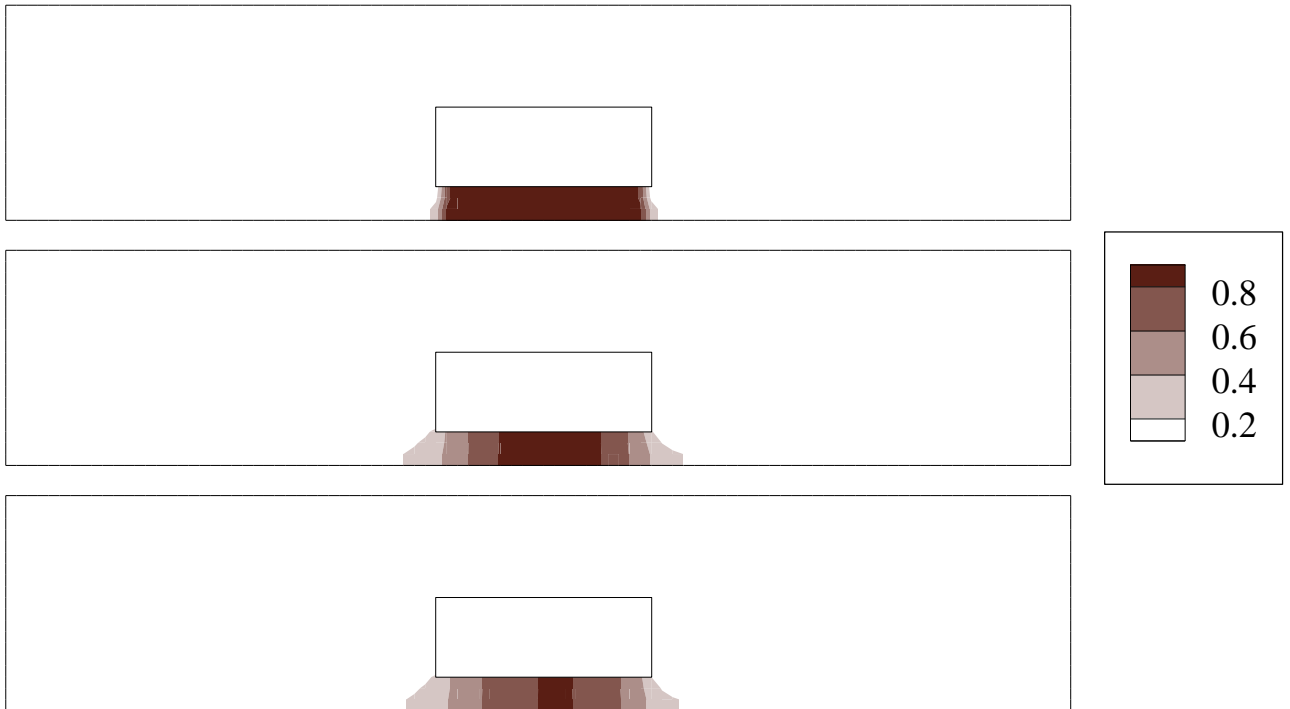


Рисунок 2.15 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0

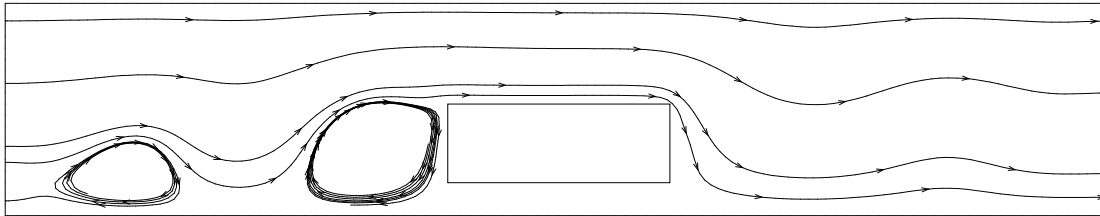


Рисунок 2.16 – Картина течения в канале с препятствием для примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ на момент времени 5000.0

2.1.3 Перенос намокшего связного грунта в воде

В пунктах 2.1.1 и 2.1.2 было продемонстрировано поведение модели в соответствующих задачах для различных тестовых значений вязкости и плотности примеси. Эти значения не отвечали какому-то конкретному грунту, а выбирались для исследования поведения и возможностей модели. Рассмотрение намокшего связного грунта как примеси в воде накладывает естественные ограничения на значения вязкости и плотности. Так плотность намокшего связного грунта обычно

не более чем в 3-4 раза превышает плотность воды. При этом вязкость может быть больше чем вязкость воды на несколько порядков.

В данном пункте приведены результаты расчетов задач этого параграфа для значений вязкости и плотности примеси, которые соответствуют параметрам некоторого намокшего связного грунта. Для этого вязкость примеси $\mu_1 = 10.0$, плотность $\rho_1 = 3.0$. В остальном постановки задач соответствуют пунктам 2.1.1 и 2.1.2.

Результаты распространения намокшего связного грунта в канале с каверной и в канале с препятствием представлены на рисунках 2.17 и 2.18 соответственно.

Проведенные расчеты показали применимость модели двухкомпонентной среды для задач переноса внутренним течением связного грунта, который ведет себя как вязкая жидкость.

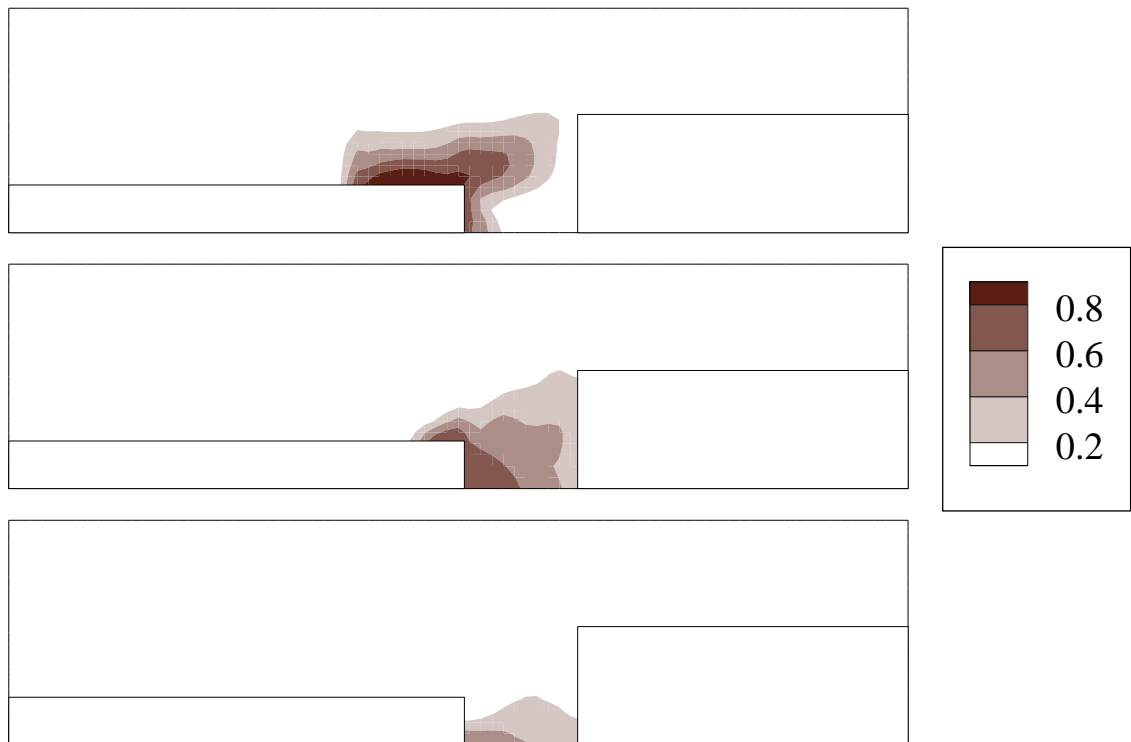


Рисунок 2.17 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 10.0$ и плотностью $\rho_1 = 3.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0

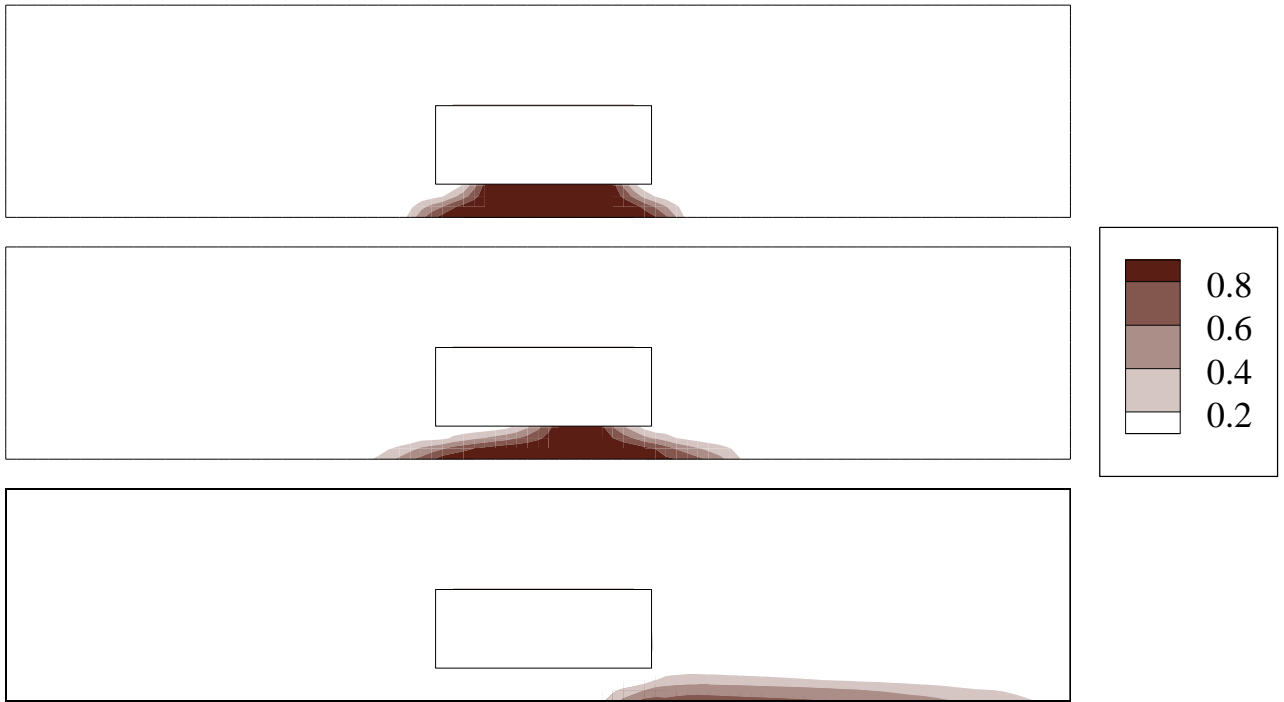


Рисунок 2.18 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 10.0$ и плотностью $\rho_1 = 3.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0

§ 2.2. Моделирование размокания внутренних слоев связного грунта

Намокший поверхностный слой придонного грунта ведет себя как некоторая вязкая плотная жидкость [84, 96], которая перемещается под действием придонного течения. Внутренние слои таких грунтов зачастую находятся в твердом состоянии и размокают лишь по мере проникновения в них воды.

Свойство грунтов, при котором они теряют связность и превращаются в рыхлую массу с частичной или полной потерей несущей способности, когда взаимодействуют со спокойной водой, называется размокаемостью [96]. Это свойство проявляется в процессе их гидратации из-за ослабления и растворения структурных связей между элементарными частицами и агрегатами грунта.

Для характеристики размокаемости грунтов обычно используют два показателя:

1) время размокания – время, в течение которого образец грунта, помещенный в воду, теряет связность и распадается на структурные элементы разного размера;

2) характер размокания, отражающий качественную картину распада образца грунта.

Процесс размокания твердых слоев грунта необходимо учитывать при продолжительных по времени размывах.

Цель настоящего параграфа заключается в разработке и построении численной модели размокания твердого связного грунта и его перехода в текучее состояние. Мы рассмотрим двух- и трехмерные задачи вымывания грунта внутренним течением при различных параметрах модели намокания. Для моделирования переноса примеси в жидкости используется двухкомпонентная версия модели вязкой несжимаемой жидкости (1.3.14).

2.2.1 Алгоритм размокания

Связный грунт условно разделим на две части: не насыщенную водой часть, которая считается твердым непроницаемым телом, и водонасыщенная часть,

которая ведет себя как некоторая вязкая жидкость. На рисунке 2.19 изображена схема такого разделения: буквой А обозначена водная среда, буквой В слой размокшего связного грунта, под которым находится неразмокший твердый грунт, обозначенный буквой С.

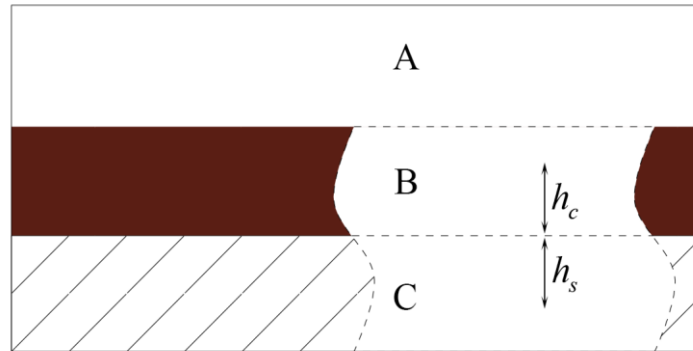


Рисунок 2.19 – Схема разделения грунта на две части. А – вода, В – размокшая часть грунта (закрашена сплошным цветом), С – неразмокшая часть грунта (заштрихована)

Размокание связного грунта возникает из-за диффузионного обмена между грунтом и водой или, иными словами, насыщения грунта водой. Введем следующие параметры для моделирования этого процесса:

- 1) h_s – глубина размокания, указывающая какое количество грунта переходит в жидкое состояние за единицу времени,
- 2) C^* – параметр размокания,
- 3) h_c – расстояние от поверхности твердого грунта до точки, в которой измеряется параметр размокания.

Мы будем считать, что часть твердого грунта В размокает на глубину h_s , если на расстояние h_c от поверхности концентрация размокшего грунта становится меньше параметра размокания C^* . Это приводит к изменению границы между намокшим и не намокшим грунтом. Таким образом, мы можем регулировать время размокания грунта на определенную глубину при помощи изменения параметров h_s , h_c и C^* . Следует заметить, что C^* может быть сложной

функцией, зависящей от времени и пространства, которая может быть получена, в частности, по результатам проведения соответствующих экспериментов для каждого конкретного типа грунта.

2.2.2 Размокание вещества под действием потока в канале

Работу алгоритма модели размокания грунта рассмотрим на примере следующей задачи. В области с течением находится прямоугольник примеси, который состоит из твердых внутренних слоев и размокшего внешнего. Геометрия области и расположение примеси в начальный момент времени представлены на рисунке 2.20.

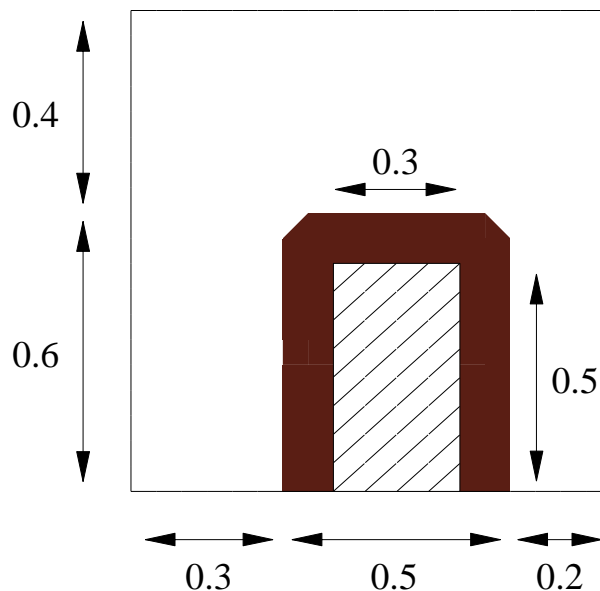


Рисунок 2.20 – Схема канала и расположение вещества в начальный момент времени. Твердая часть вещества заштрихована, размокшая обозначена сплошным цветом

Вязкость и плотность несущей жидкости и примеси принимались равными $\mu_2 = 0.1$ и $\rho_2 = 1.0$, т.е. примесь является пассивной. Таким образом, чтобы отдельно рассмотреть работу алгоритма размокания, мы берем примесь, которая не оказывает влияния на общую картину течения. Движение среды возникает за счет перепада давления на входной и выходной границах.

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.21.

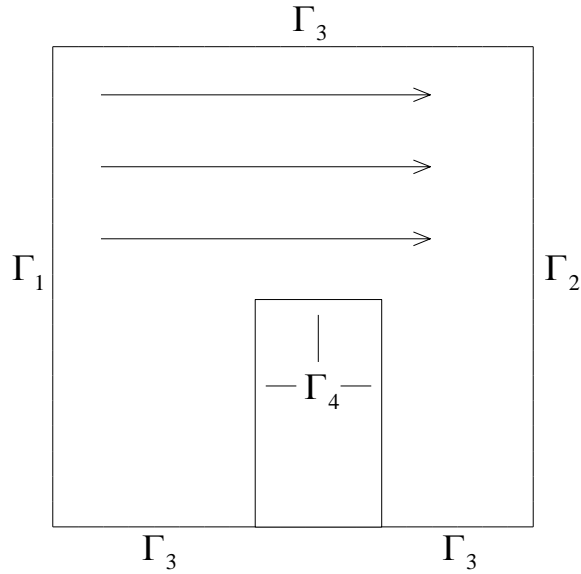


Рисунок 2.21 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 , твердой стенки Γ_3 и меняющейся по мере размокания границы Γ_4

Здесь:

Γ_1 – граница, через которую жидкость втекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 0.1, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница, через которую жидкость вытекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая стенка, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

Γ_4 – граница между твердой и жидкой примесью, на которой выполняется условие прилипания и заданы параметры размокания

$$v_1|_{\Gamma_4} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_4} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_4} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_4} = 0.$$

$$h_s = 0.05, \quad h_c = 0.05.$$

Значение параметра C^* указывается отдельно для каждого расчета.

Для проверки работоспособности алгоритма размокания были проведены расчеты для различных значений параметра C^* . На рисунках 2.22, 2.23 и 2.24 представлены расчеты размыва и переноса примеси для значений C^* равных 0.9, 0.6 и 0.1 соответственно.

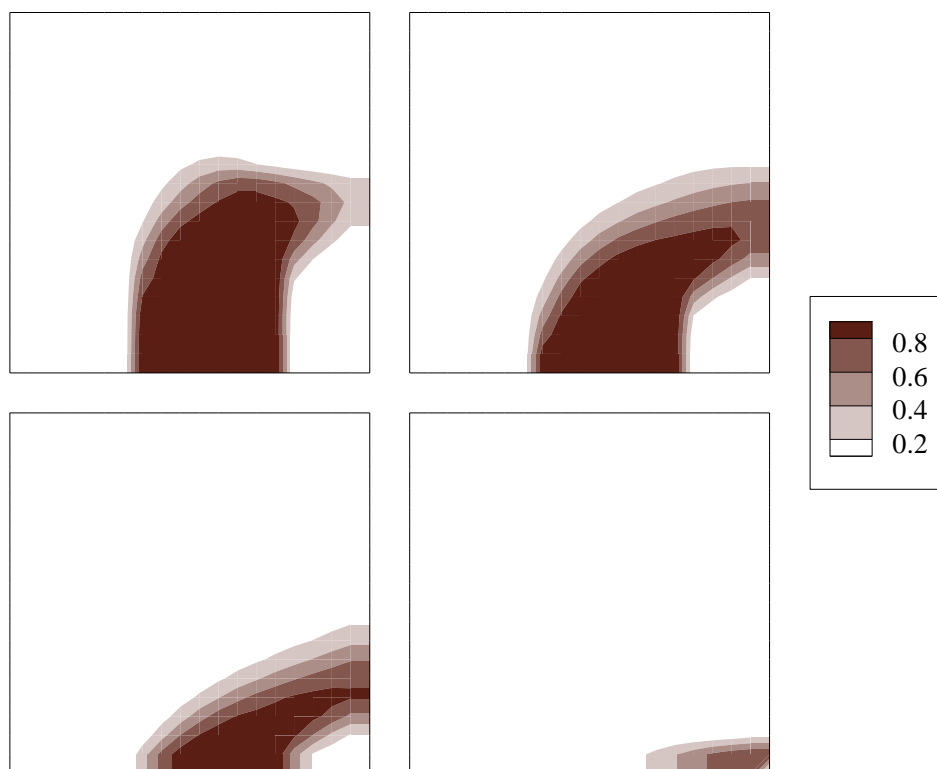


Рисунок 2.22 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени 5.2, 10.5, 15.8, 26.3

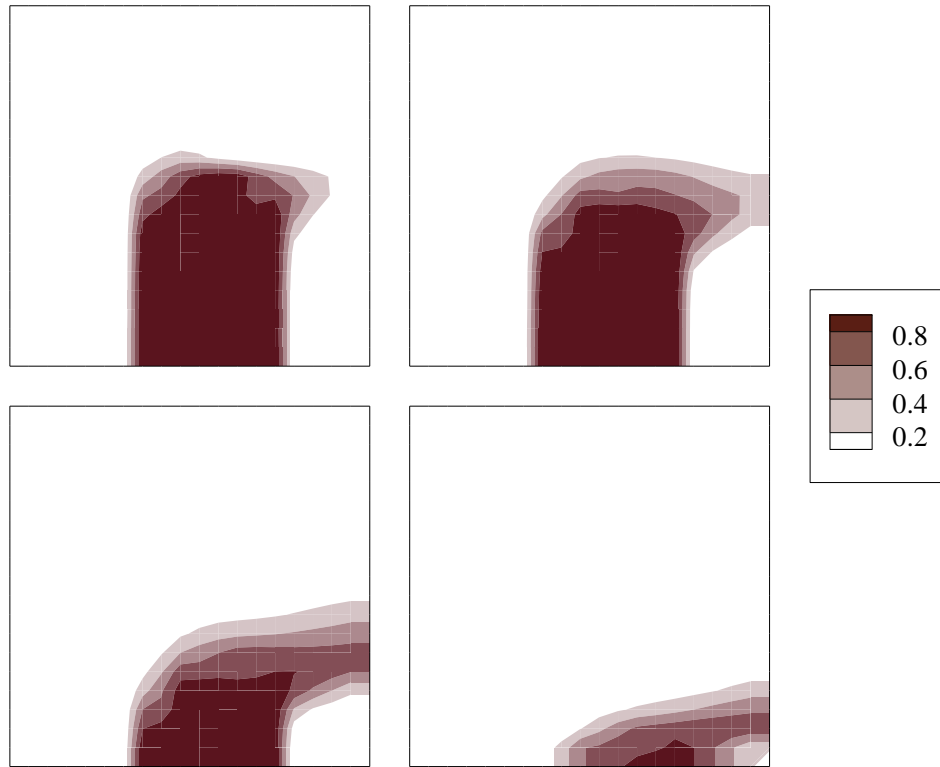


Рисунок 2.23 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.6$ на моменты безразмерного времени 5.2, 12.6, 27.9, 42.6

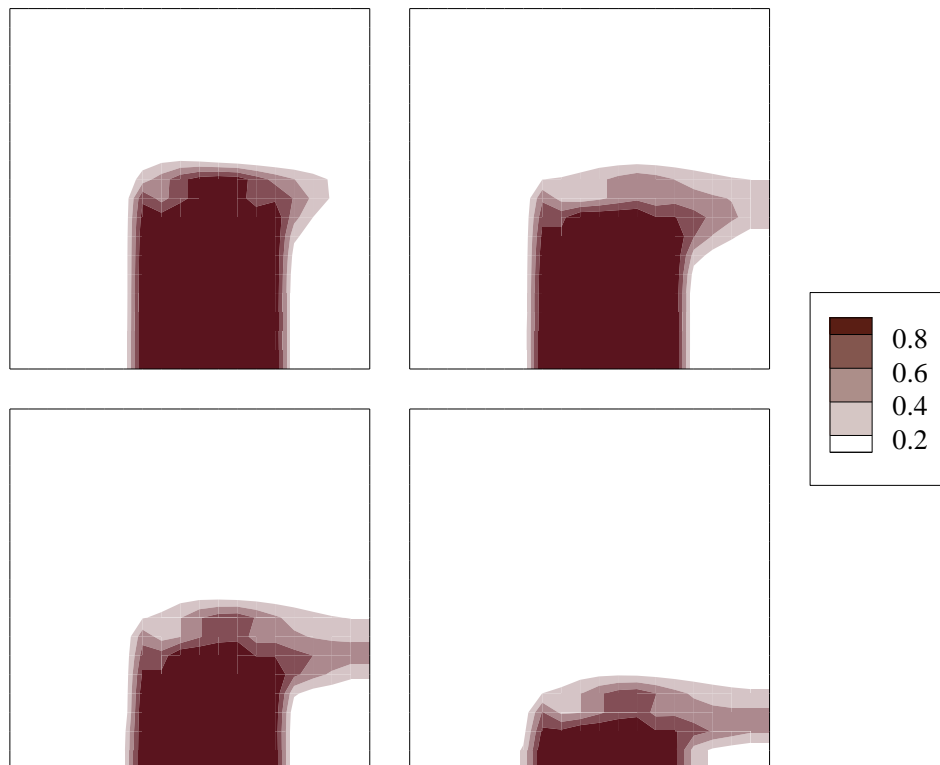


Рисунок 2.24 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени 5.2, 15.8, 65.8, 136.8

При уменьшении параметра C^* время полного вымывания вещества из области увеличивается. Для $C^* = 0.9$ оно составляет 30.5, в то время как для $C^* = 0.1$ оно увеличивается до 235.7.

В трехмерном случае примесь также разделяется на две части: внешний намокший слой и внутренняя твердая часть, которая размокает. На рисунке 2.25 представлена область течения и начальное расположение примеси.

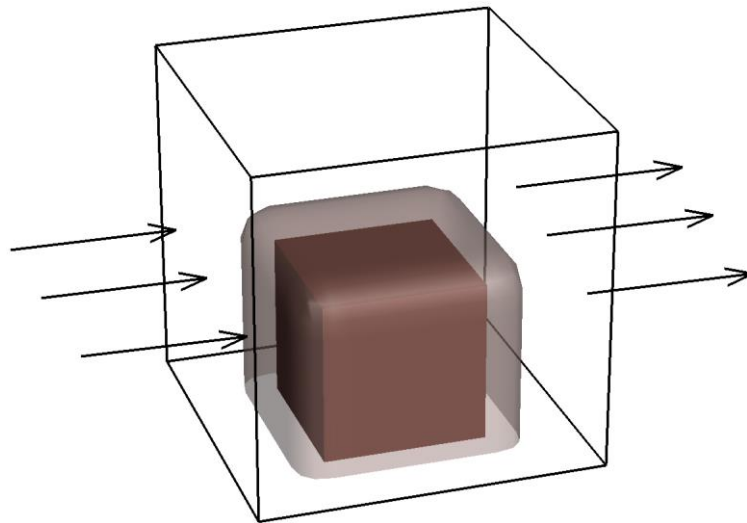


Рисунок 2.25 – Начальное расположение примеси в области. Сплошным цветом закрашена неразмокшая твердая часть грунта, прозрачным – размокшая жидкая часть. Стрелки указывают направление течения

Как и в случае двумерном, на входе и выходе задается перепад давления $\Delta p = 0.1$ и условия свободного вытекания жидкости. На твердых стенках ставится условие прилипания. Вязкость и плотность несущей жидкости и примеси принимались $\mu_1 = \mu_2 = 1.0$ и $\rho_1 = \rho_2 = 1.0$.

В продолжение проверки работы алгоритма размокания были проведены расчеты для различных значений параметра C^* . На рисунках 2.26, 2.27 и 2.28 представлены расчеты размыва и переноса примеси для значений C^* равных 0.9, 0.6 и 0.1 соответственно.

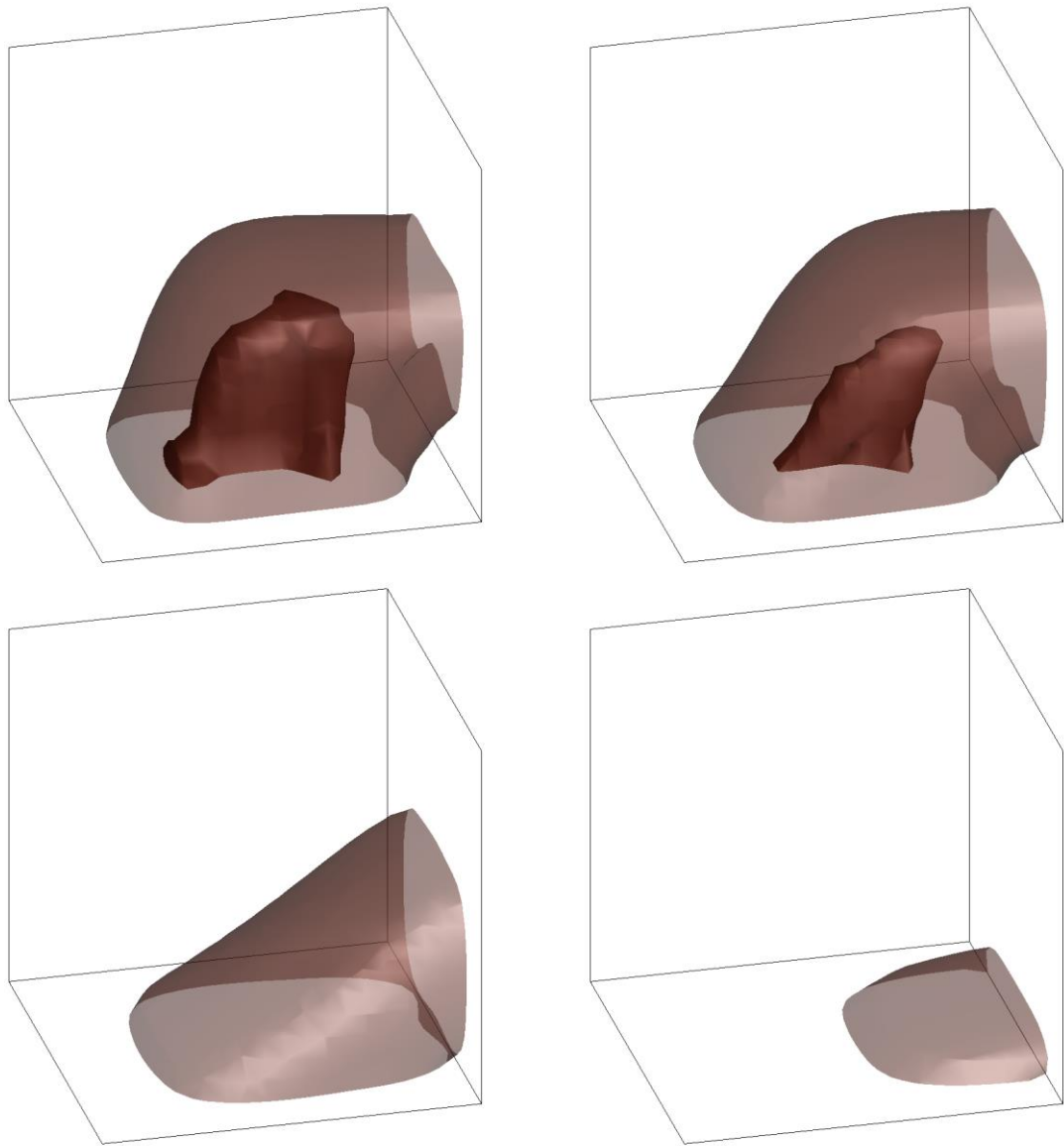


Рисунок 2.26 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени 104.9, 146.9, 230.8,

587.6

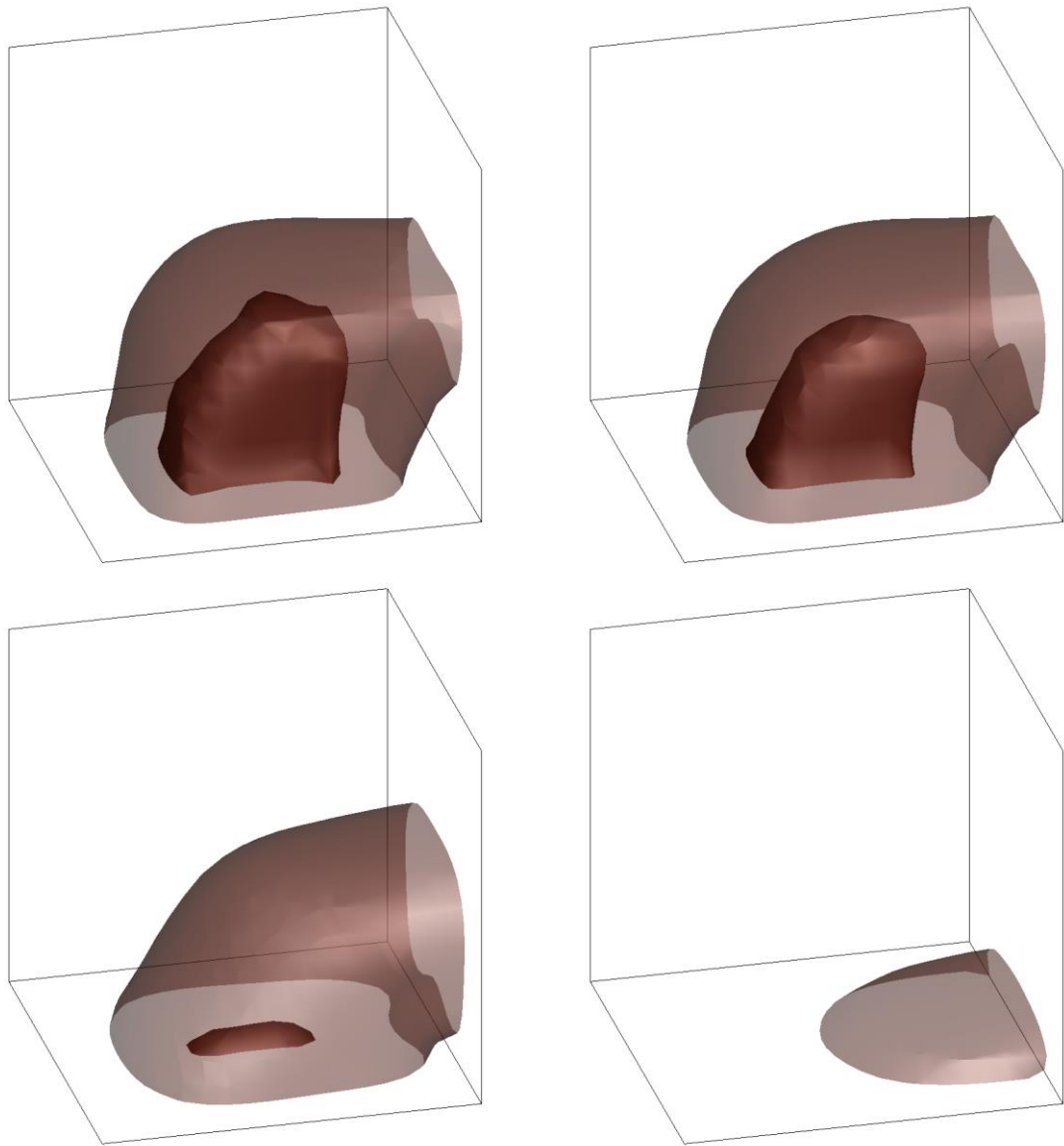


Рисунок 2.27 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.6$ на моменты безразмерного времени 104.9, 146.9, 251.8,

671.5

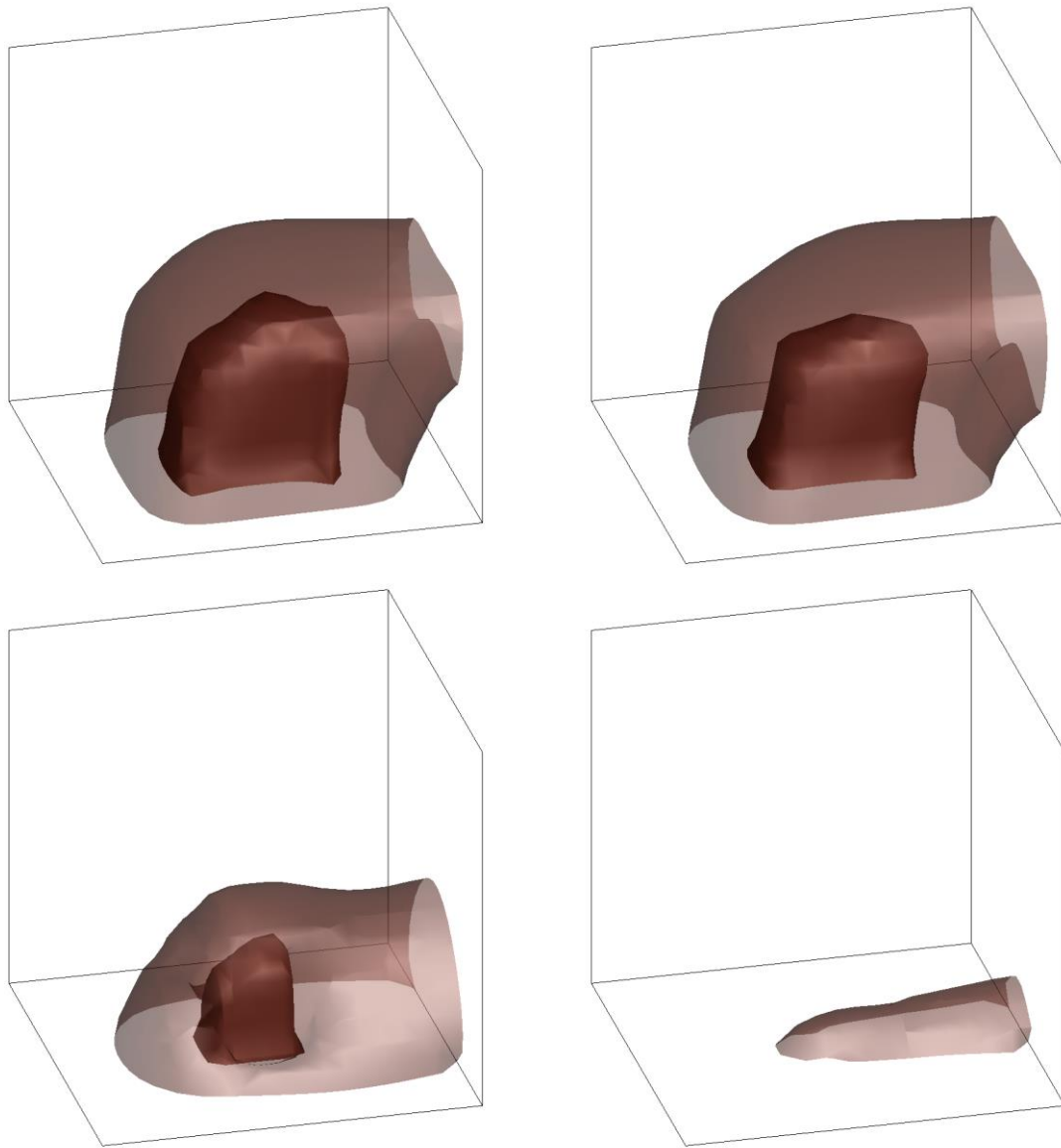


Рисунок 2.28 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени 104.9 , 146.9 , 608.6 , 1385.0

Таким образом, и в двухмерном, и в трехмерном случаях видна тенденция на замедление скорости размыва примеси при понижении порогового значения параметра намочания.

§ 2.3. Размыв грунта в лабораторном эксперименте Hole Erosion Test

В параграфе представлены результаты валидации модели размокания и размыва связного грунта (см. параграф 2.2) с результатами теоретических исследований, лабораторными и численными экспериментами.

Мы рассмотрим лабораторный эксперимент по размыву отверстия в грунте потоком жидкости, известный как Hole Erosion Test (HET) [113, 119, 134, 145]. Для его проведения используется специализированное оборудование, в которое помещается образец грунта (см. рисунок 2.29).

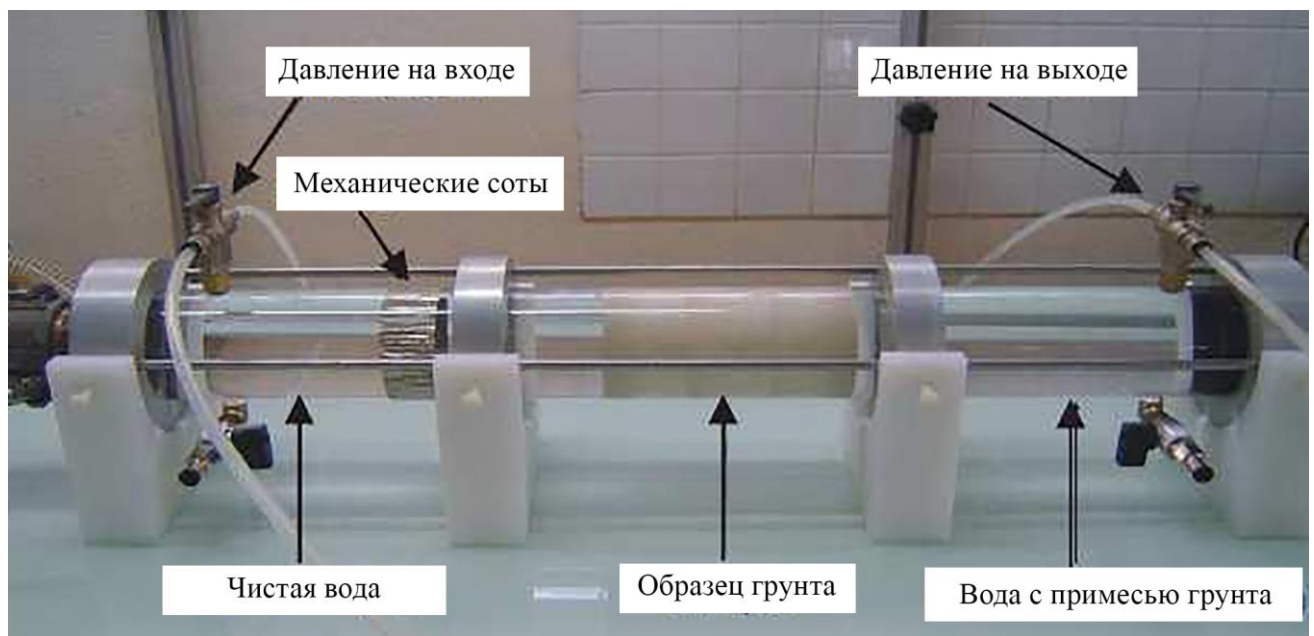


Рисунок 2.29 – Лабораторное оборудование для проведения Hole Erosion Test (HET) в институте IRSTEA, Франция [145]

Образец грунта представляет собой цилиндр с проделанным по оси каналом постоянного диаметра. С одной стороны установки подается постоянный поток воды, который проходит по каналу, размывая и изменяя его ширину. Устройство может быть оснащено набором специальных датчиков, измеряющих давление, прозрачность жидкости и другие характеристики.

2.3.1 Разрыв стенок двумерного канала потоком жидкости

В этом пункте мы рассматриваем течение жидкости в двумерном канале, которое возникает за счет постоянного перепада давления на входе и выходе канала. Подобная задача имеет аналитическое решение в виде течения Пуазейля [66]. Особенность задачи заключается в том, что боковые твердые стенки канала могут размокать и размываться. Схема области представлена на рисунке 2.30.

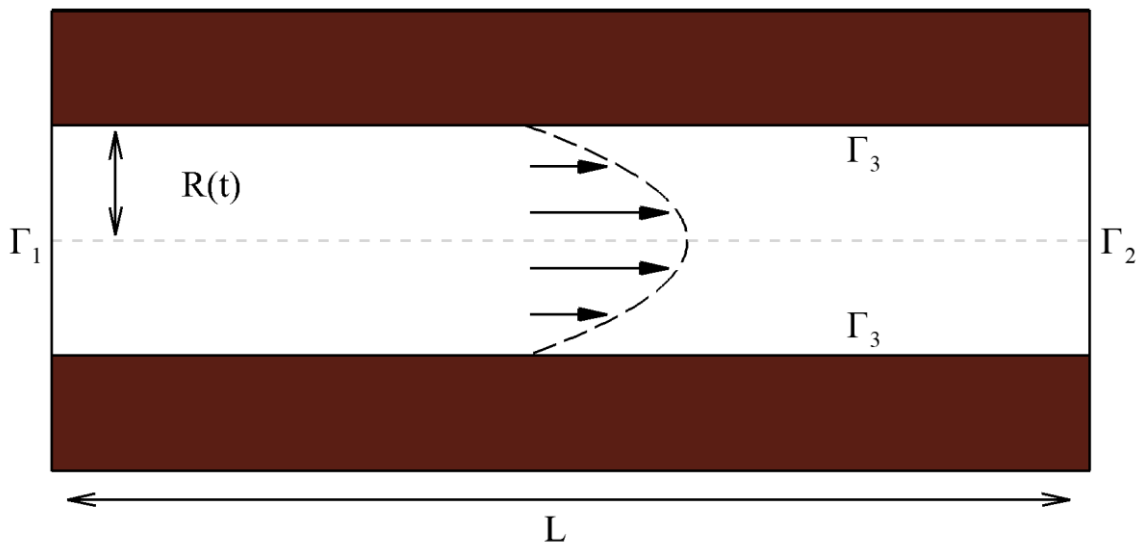


Рисунок 2.30 – Схема области канала с размывающимися боковыми стенками

Длина канала $L = 10^{-2} \text{ м}$, радиус канала в начальный момент времени $R(0) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Вязкость и плотность жидкости и примеси соответственно равны $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\rho_1 = \rho_2 = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, таким образом, примесь не влияет на динамику потока.

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.30. Здесь:

Γ_1 – входная граница, через которую жидкость втекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 10^{-2} \text{ Па}, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – выходная граница, через которую жидкость вытекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – размокающая твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

В работе [114] представлено теоретическое решение этой задачи, согласно которому увеличение радиуса канала происходит по экспоненциальному закону:

$$R(t) = R(0) \cdot e^{\frac{t}{t_{er}}}, \quad (1.3.15)$$

где $t_{er} = \frac{2L}{k_d \Delta P}$ – характерное время, $k_d = 10^{-6} \frac{M^2 c}{\kappa z}$ – коэффициент эрозии.

Мы выбрали функцию $C^*(t)$ так, чтобы скорость изменения радиуса канал соответствовала теоретической формуле (1.3.15). На рисунке 2.31 приведен график изменения функции $C^*(t)$, которая позволяет получить необходимую скорость размыва стенок канала.

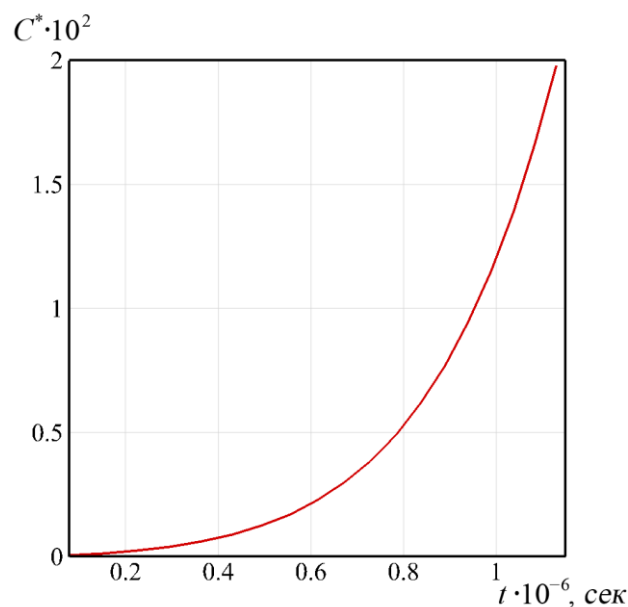


Рисунок 2.31 – График изменения порогового значения $C^*(t)$ со временем

На рисунке 2.32 представлены профили горизонтальной компоненты вектора скорости в зависимости от радиуса канала на различные моменты времени.

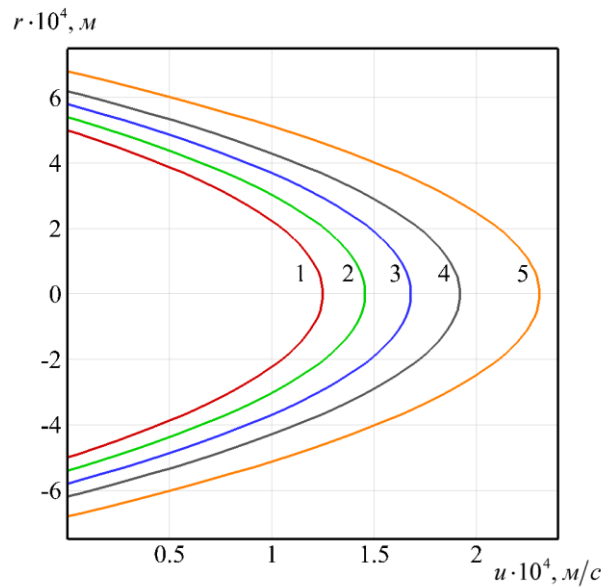


Рисунок 2.32 – Профили горизонтальной компоненты вектора скорости в канале на моменты времени (в секундах): 1) 0, 2) $1.5 \cdot 10^5$, 3) $3 \cdot 10^5$, 4) $4.5 \cdot 10^5$, 5) $6 \cdot 10^5$

На рисунке 2.33 приведены график изменения радиуса канала со временем.

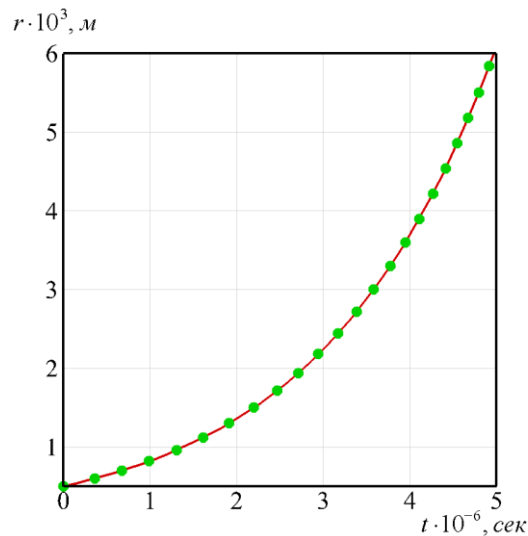


Рисунок 2.33 – График изменения радиуса канала со временем. Красная сплошная линия – теоретическое решение, выраженное формулой (1.3.15), зеленые точки – численное решение

Таким образом, путем правильного выбора порогового значения удалось добиться соответствия скорости и характера размыва боковых стенок, разница между теоретическим результатом и численным расчетом не превышает 2 %.

2.3.2 Моделирование размыва боковых стенок течением в лабораторном тесте Hole Erosion Test (HET)

В данном пункте проводится сравнение с экспериментальными и численными данными по лабораторному тесту HET [145]. В силу симметричности области решения задача представлена в двумерной постановке. В качестве граничных условий используются скорости, соответствующие постоянному расходу жидкости. Схема области приведена на рисунке 2.34.

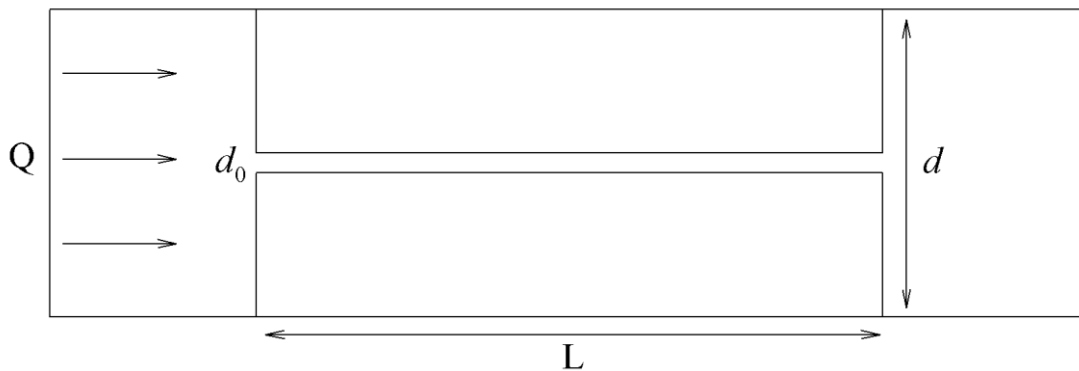


Рисунок 2.34 – Схема области лабораторного теста HET

Расход воды $Q = 0.53 \frac{\text{л}}{\text{ч}}$, длина образца $L = 0.12 \text{ м}$, диаметр образца $d = 0.08 \text{ м}$, диаметр отверстия $d_0 = 0.006 \text{ м}$.

На рисунке 2.35 приведены поле горизонтальной компоненты вектора скорости в начальный момент времени.

Аналогично предыдущему пункту выбираем параметр размокания $C^*(t)$, как функцию пространства-времени так, чтобы отличие между данными не превышали 10 процентов. На рисунке 2.36 представлена поверхность между образцом грунта и водой на начальный момент времени и по прошествии 7 секунд.



Рисунок 2.35 – Поле горизонтальной компоненты вектора скорости в начальный момент времени для задачи НЕТ

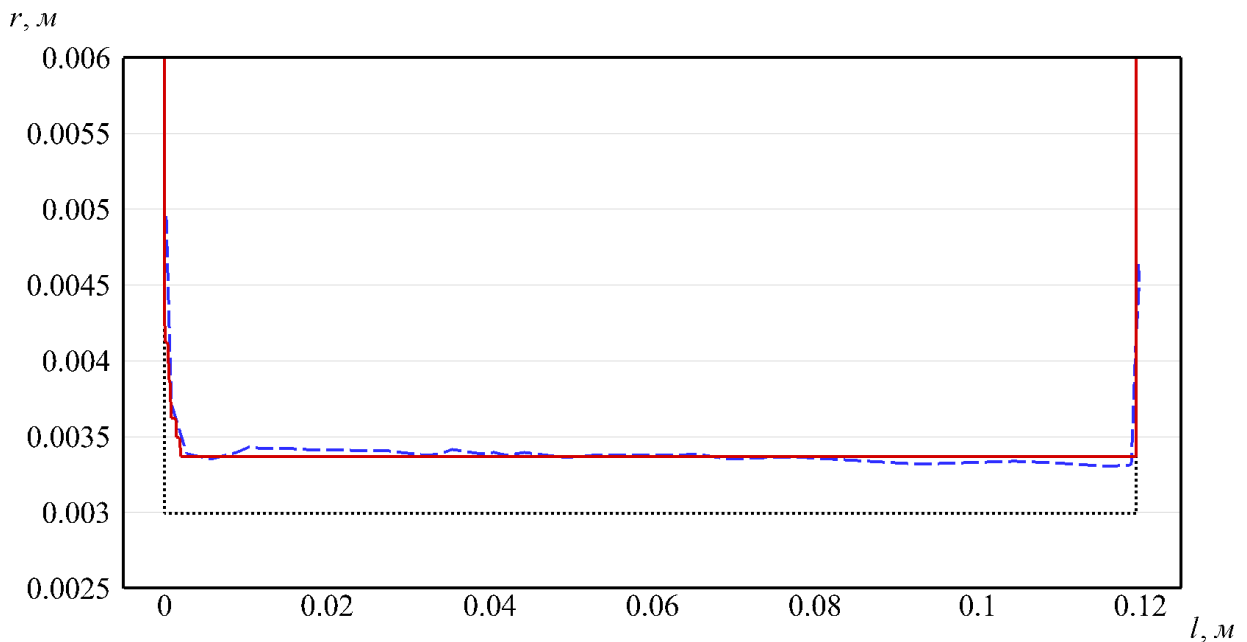


Рисунок 2.36 – Поверхность между образцом грунта и водой. Черная пунктирная линия – в начальный момент времени, синяя прерывистая – результат, полученный в работе [145] на момент времени 7 секунд, красная сплошная – результат представленной в данной работе модели на момент времени 7 секунд

Таким образом, при помощи представленного подхода был промоделирован процесс размыва отверстия в образце грунта с совпадением качественной картины и количественных характеристик изменения радиуса (с погрешностью не более 3 процентов).

§ 2.4. Размыв и перенос связного грунта в трехмерном случае

В данном параграфе представлены результаты численных расчетов трехмерных задач размыва и переноса связного грунта в воде. Для моделирования этого явления применяется трехмерная модель двухкомпонентной (вода-грунт) вязкой несжимаемой жидкости в безразмерном виде (1.1.31). Также в задаче размыва используется численная модель размокания твердых слоев связного грунта, представленная в параграфе 2.2.

Цель данного параграфа заключается в выявлении зависимостей поведения связного грунта от значения вязкости и параметра размокания твердых слоев. Также проведение указанных расчетов является тестированием численного алгоритма решения системы уравнений движения жидкости на трехмерных задачах с перестроением области.

2.4.1 Обрушение и распространение связного грунта в воде под действием силы тяжести

В этом пункте рассматривается задача обрушения трехмерного столба связного грунта в воде под действием силы тяжести. Область решения представляет собой единичный куб с твердыми боковыми стенками и открытой для свободного течения жидкости верхней крышкой. Схема области и начальное положение столба связного грунта представлены на рисунке 2.37.

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.37. Здесь:

Γ_1 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_3|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница свободного вытекания, на которой действует постоянное давление

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial v_3}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 1, \quad \frac{\partial C_2}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0.$$

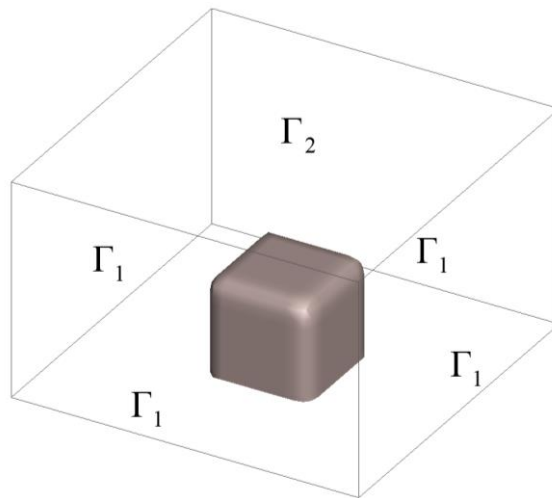


Рисунок 2.37 – Схема области, обозначения границ и начальное положение столба вязкого грунта

Для воды заданы следующие значения вязкости и плотности: $\mu_1 = 0.001$, $\rho_1 = 1.0$. У вязкого грунта значение плотности во всех расчетах равно $\rho_2 = 3.0$, а значение вязкости определяется отдельно. На рисунках 2.38, 2.39 представлены картины обрушения и распространения вязкого грунта в воде для значений вязкости грунта $\mu_2 = 0.01$ и $\mu_2 = 1.0$. При отображении на рисунках граница раздела вода-грунт определялась по значению концентрации грунта $C = 0.1$.

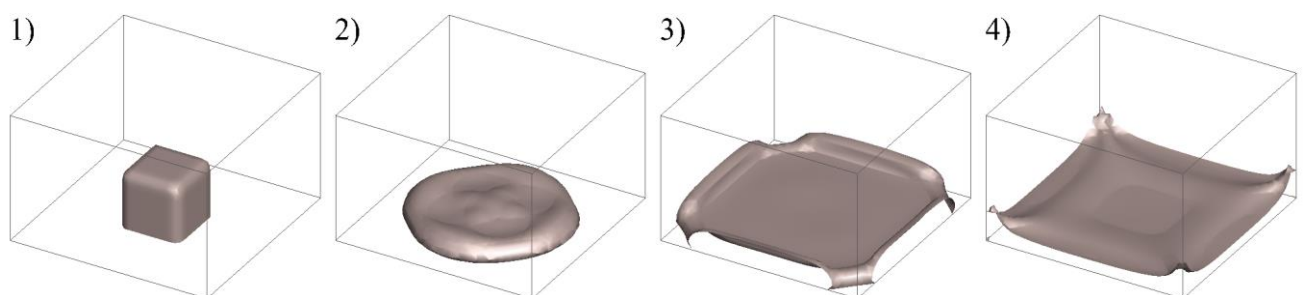


Рисунок 2.38 – Распространение намокшего вязкого грунта со значением вязкости $\mu_2 = 0.01$ на моменты безразмерного времени: 1) 0.0, 2) 1.0, 3) 2.6, 4) 4.6

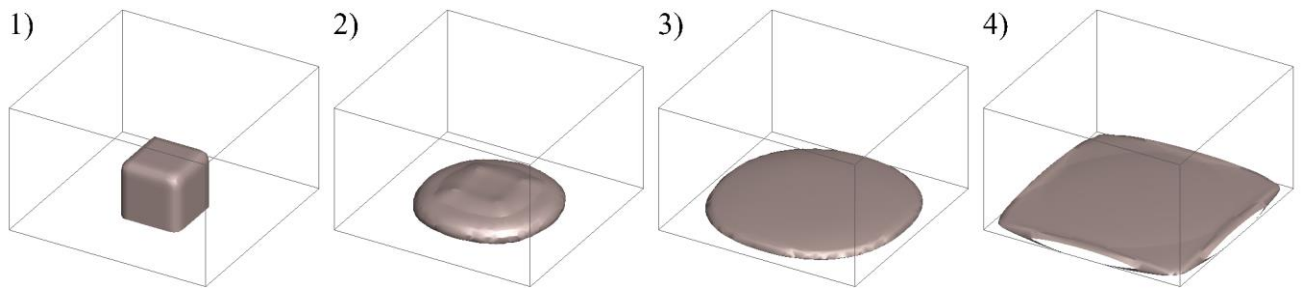


Рисунок 2.39 – Распространение намокшего связного грунта со значением вязкости $\mu_2 = 1.0$ на моменты безразмерного времени: 1) 0.0, 2) 1.4, 3) 3.4, 4) 18.8

В случае меньшей вязкости грунт достигает боковых стенок области на момент безразмерного времени 1.6 и полностью покрывает дно к моменту времени 3.6. При этом на поверхности грунта возникает заметное движение волн вследствие взаимодействия со стенками области. Когда вязкость имеет большее значение, время достижения стенок составляет 11.2, а дно становится покрытым полностью только к моменту времени 20.

Таким образом, расчеты показывают, что значение вязкости намокшего связного грунта влияют на скорость и характер его распространения в воде при обрушении: чем вязкость больше, тем медленней движется грунт. Также отметим, что в расчетах ожидаемо сохраняется симметричность характеристик распространения связного грунта по направлению к боковым стенкам области.

2.4.2 Размыв связного грунта вблизи стоящего на дне препятствия в форме бруска

В данном пункте представлены результаты трехмерных расчетов размыва связного грунта внутренним течением. Геометрия области представлена на рисунке 2.40. Дно области является твердым связным грунтом, который может размокать. Оно покрыто слоем намокшего текучего грунта, с отличающимися от жидкости вязкостью и плотностью. В центре области располагается препятствие в форме бруска.

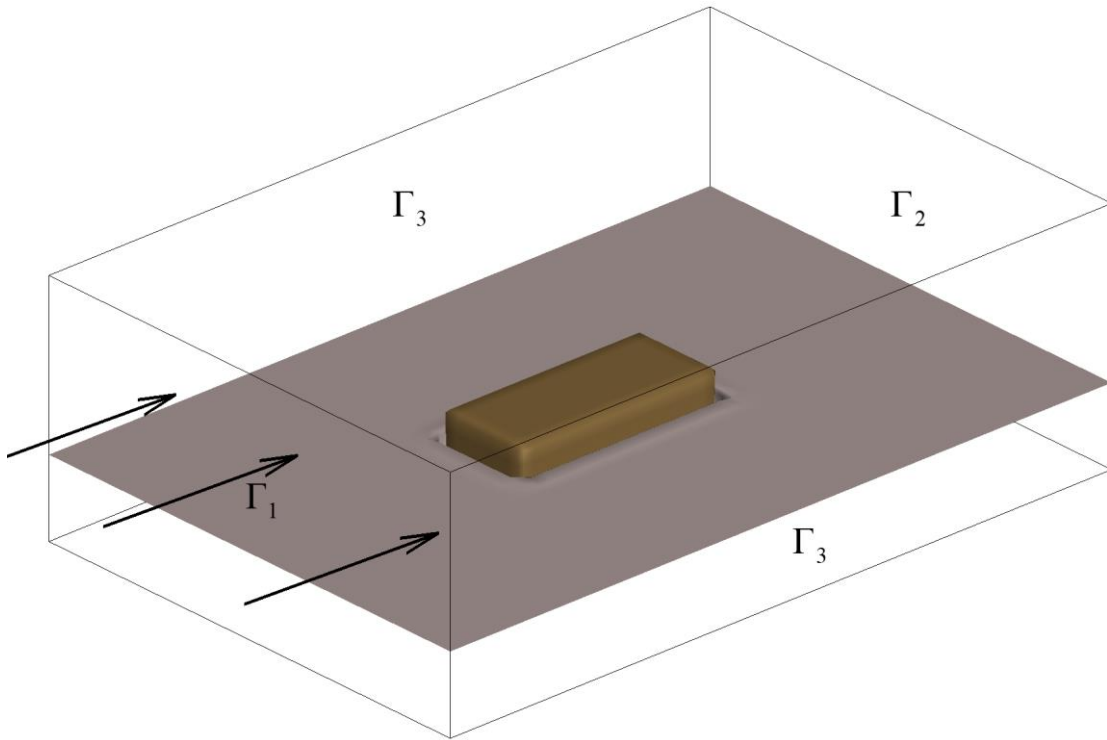


Рисунок 2.40 – Геометрия и обозначение границ области

Обозначения границ области приведены на рисунке 2.40. Здесь:

Γ_1 – входная граница, через которую жидкость втекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_3|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 0.2.$$

Γ_2 – выходная граница, через которую жидкость вытекает горизонтально

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_3|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_3|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

Для компонент заданы следующие значения вязкости и плотности: $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 1.0$, $\rho_1 = 1.0$, $\rho_2 = 3.0$. При отображении на рисунках граница раздела вода-грунт определялась по значению концентрации грунта $C = 0.8$.

На рисунке 2.41 представлены продольный и поперечные срезы, отображающие поле давления и вектора скорости в начальный момент времени.

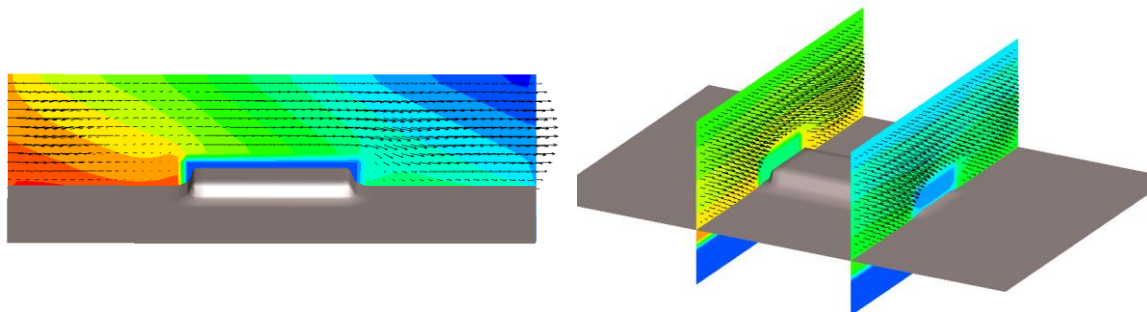


Рисунок 2.41 – Продольный и поперечные срезы, отображающие поле давления, и вектора скорости в начальный момент времени

На рисунке 2.42 представлены картины размыва на различные моменты времени для значений пороговой концентрации размывания твердого дна $C^* = 0.9$.

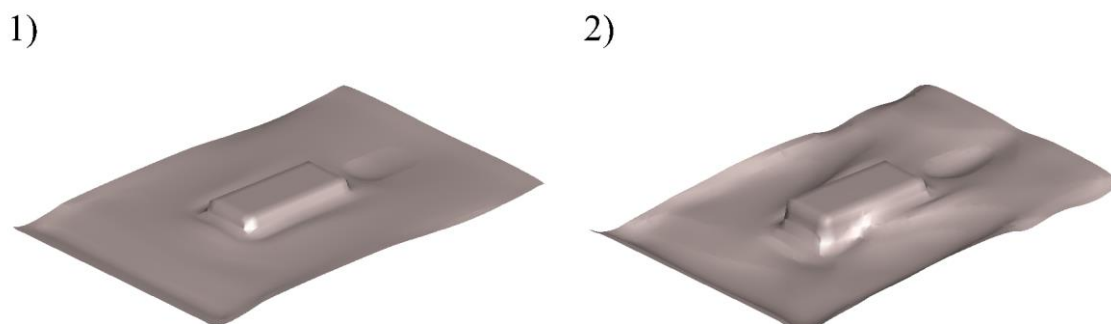


Рисунок 2.42 – Размыв грунта для параметра намочания $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени: 1) 1.6, 2) 4.2

Расчет проводился до того момента, как из-под бруска не начнет вымываться связный грунт, что может повлиять на его устойчивость. На рисунке 2.43 представлен момент безразмерного времени 5.6, когда из-под переднего края препятствия вымывается значительная часть грунта.

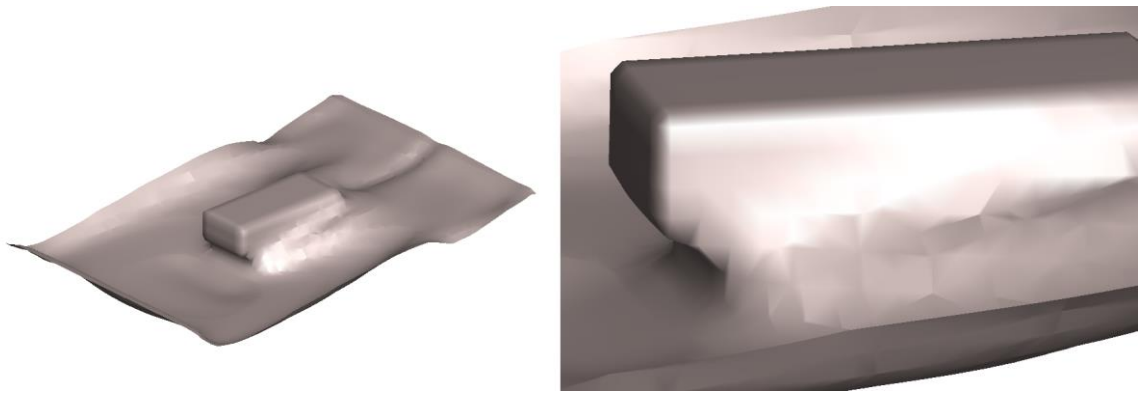


Рисунок 2.43 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.9$ на момент безразмерного времени 5.6 с двух ракурсов

Значение пороговой концентрации размокания твердого дна влияет на скорость и характер размыва связного грунта. На рисунке 2.44 представлена картина размыва в различные моменты времени при значении пороговой концентрации намокания $C^* = 0.1$.

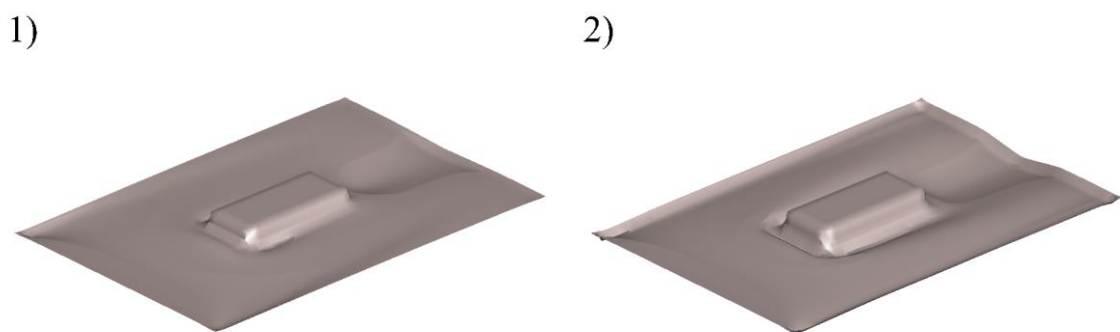


Рисунок 2.44 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени: 1) 2.8, 2) 38.4

При $C^* = 0.9$ размокание перед бруском происходит быстрее, чем за ним, что приводит к появлению зоны размыва на лицевой стороне бруска. При уменьшении значения параметра размокания твердых слоев грунта наблюдается изменение характера размыва. Область перед бруском становится более устойчивой к размыву, зато за бруском вследствие более высокой скорости

появляется зона размыва (см. рисунок 2.45). Также весь процесс существенно замедляется.

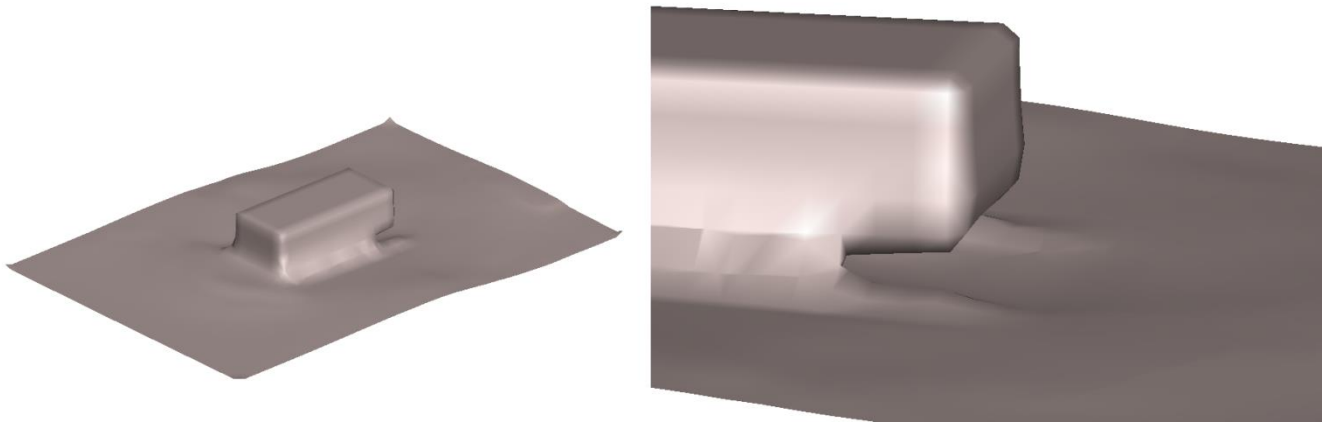


Рисунок 2.45 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.1$ на момент безразмерного времени 96.0 с двух ракурсов

Таким образом, представленный подход позволяет моделировать размыв связного грунта внутренним течением вблизи препятствия. При этом учитываются процессы намокания твердой части грунта и диффузии жидкой части. Также значение пороговой концентрации размокания твердого дна влияет на скорость и характер размыва связного грунта вблизи препятствия.

ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН И ПРИДОННОГО СВЯЗНОГО ГРУНТА

Донный грунт и поверхность жидкости оказывают взаимное влияние друг на друга. Это означает, что как грунт своим движением может порождать волны на поверхности, так и интенсивные волны могут перемещать грунт на дне. Поэтому обрушение грунта может запускать опасные длинные волны. Такие волны могут угрожать береговым сооружениям, так как значительно увеличивают свою высоту при накате на берег. А для определения картины размыва связного грунта около основания прибрежного сооружения требуется помимо внутреннего течения учитывать и поверхностное волнение, его влияние на донные и пристеночные области. Для описания этого процесса используется система уравнений (1.1.29), описывающая движение трехкомпонентной среды (воздух, вода и связный грунт). Это позволяет рассматривать движение свободной поверхности одновременно с перемещением донного связного грунта.

В первом параграфе представлено численное моделирование лабораторной задачи обрушения столба жидкости и проведена валидация модели на имеющихся экспериментальных данных из работы [138]. Во втором параграфе представлена модель образования и распространения одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ», включающая в себя работу вакуумного волнопродуктора. Проведены сравнения с показаниями волномеров и результатами расчетов модели потенциальной жидкости. В третьем параграфе рассматривались задачи взаимодействия набегающей волны с препятствием и перемещения придонного грунта под действием поверхностных волн. В четвертом параграфе представлены задачи об образовании волны вследствие движения придонного связного грунта и проведено сравнение с численными результатами других моделей и лабораторными данными из работы [158].

§ 3.1. Обрушение столба жидкости

Задача обрушения столба жидкости часто используется для проверки моделей движения свободной поверхности, в силу простоты постановки и большого количества экспериментальных данных.

Теоретические, экспериментальные и численные исследования задачи обрушения столба жидкости активно проводятся с середины прошлого века. Результаты таких исследований могут быть использованы для предсказания и предотвращения катастрофических последствий при разрушении дамб и плотин. Основными измеряемыми данными являются профиль поверхности волны в различные моменты времени и давление, возникающее при взаимодействии жидкости с препятствиями.

В работе [138] приведены результаты лабораторного эксперимента по обрушению столба жидкости в лотке с размерами $1.61 \text{ м} \times 0.6 \text{ м} \times 0.15 \text{ м}$ в длину, высоту и ширину соответственно. Лоток разделен на две части задвижкой, которая быстро убирается специальным скользящим механизмом. В одной из частей располагается вода, которая при срабатывании механизма обрушается в сторону противоположной стенки.

Мы моделируем данную задачу при помощи двухкомпонентной версии модели (1.1.30), где одна из компонент это вода, а вторая компонента – воздух. Так как эксперимент проводился с температурой воды 25°C , то значения динамической вязкости и плотности воды при такой температуре равнялись

соответственно $\mu_1 = 8.87 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\rho_1 = 997.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Мы считаем, что воздух имеет

такую же температуру как вода, следовательно, его динамическая вязкость и

плотность равны $\mu_2 = 1.85 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\rho_2 = 1.184 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Традиционно такую задачу рассматривают в двухмерной постановке, считая, что при данной ширине лотка боковые стенки не оказывают существенного влияния на динамику потока.

Геометрия области эксперимента, расположение точек измерения высоты волны и датчиков давления представлены на рисунке 3.1. В левой части рисунка указаны размеры области по длине и высоте, расположение столба жидкости высотой H в начальный момент времени (в численных расчетах рассматривался вариант эксперимента для $H = 0.3 \text{ м}$) и точки $H1-H4$, в которых измерялась высота волны. В правой части рисунка 3.1 указаны размеры области по высоте и ширине, а также расположение пяти датчиков, измеряющих давление на левой стенке лотка.

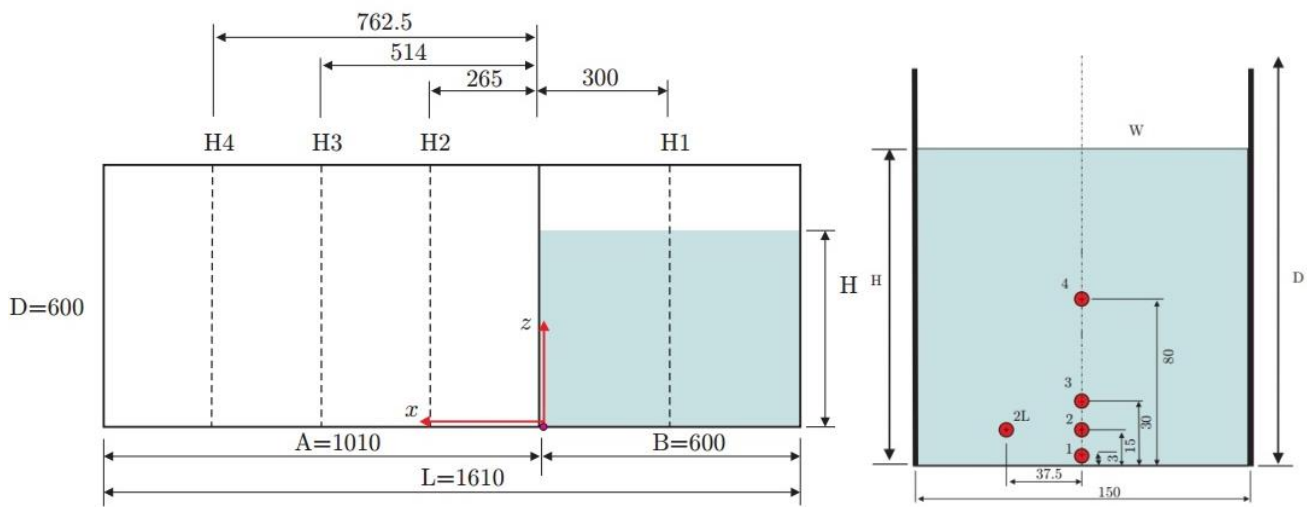


Рисунок 3.1 – Схема лотка, расположение точек измерения высоты волны и датчиков измерения значения давления (см. [138])

Обозначения границ области приведены на рисунке 3.2. Здесь:

Γ_1 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_1} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница свободного вытекания, на которой действует атмосферное давление

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 101325 \text{ Па}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial y}|_{\Gamma_2} = 0.$$

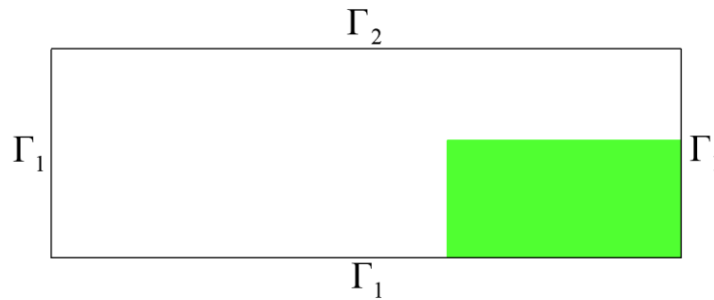


Рисунок 3.2 – Расположение твердой границы Γ_1 и границы свободного вытекания Γ_2

В начальный момент времени перегородка поднималась, в результате чего столб жидкости под действием силы тяжести обрушался и двигался в сторону левой стенки. На рисунке 3.3 приведены лабораторные и численные результаты распространения жидкости на различные моменты времени. Здесь и в дальнейших расчетах для визуального отображения границ раздела компонент, моделирующих воду и воздух, принималась $C_1 = 0.5$.

Рисунок 3.3 показывает процесс распада столба, распространение и отражение волны в лотке. Скорость распространения и форма поверхности близки для численного эксперимента и лабораторных данных до момента столкновения со стенкой. Отличия в поведении поверхности жидкости в расчётах и эксперименте появляются после ее отражения от стенки, когда начинают взаимодействовать разнонаправленные придонный и поверхностный потоки (рисунок 3.3 под номерами 7, 8 и 9).

Численное решение, которое мы получаем, представляет собой поле скоростей, давления и концентраций компонент. Визуальное отображение границы раздела компонент получается при помощи выбора определенного значения концентрации. Обычно для поверхности вода-воздух в качестве такового принимают $C_1 = 0.5$, при этом граница раздела превращается в четкую линию. Однако, как видно из эксперимента на рисунке 3.3, между водой и воздухом может возникать «пелена» – слой на поверхности жидкости, в котором воздух перемешался с мелкими каплями воды. Тогда для отображения этого эффекта

можно выделить еще одну границу раздела между водой и воздухом. На рисунке 3.4 представлены картины распространения волны с водно-воздушными границами $C_1 = 0.5$ и $C_1 = 0.2$ для моментов времени 862.3, 1023.3 и 1166.6 миллисекунд.

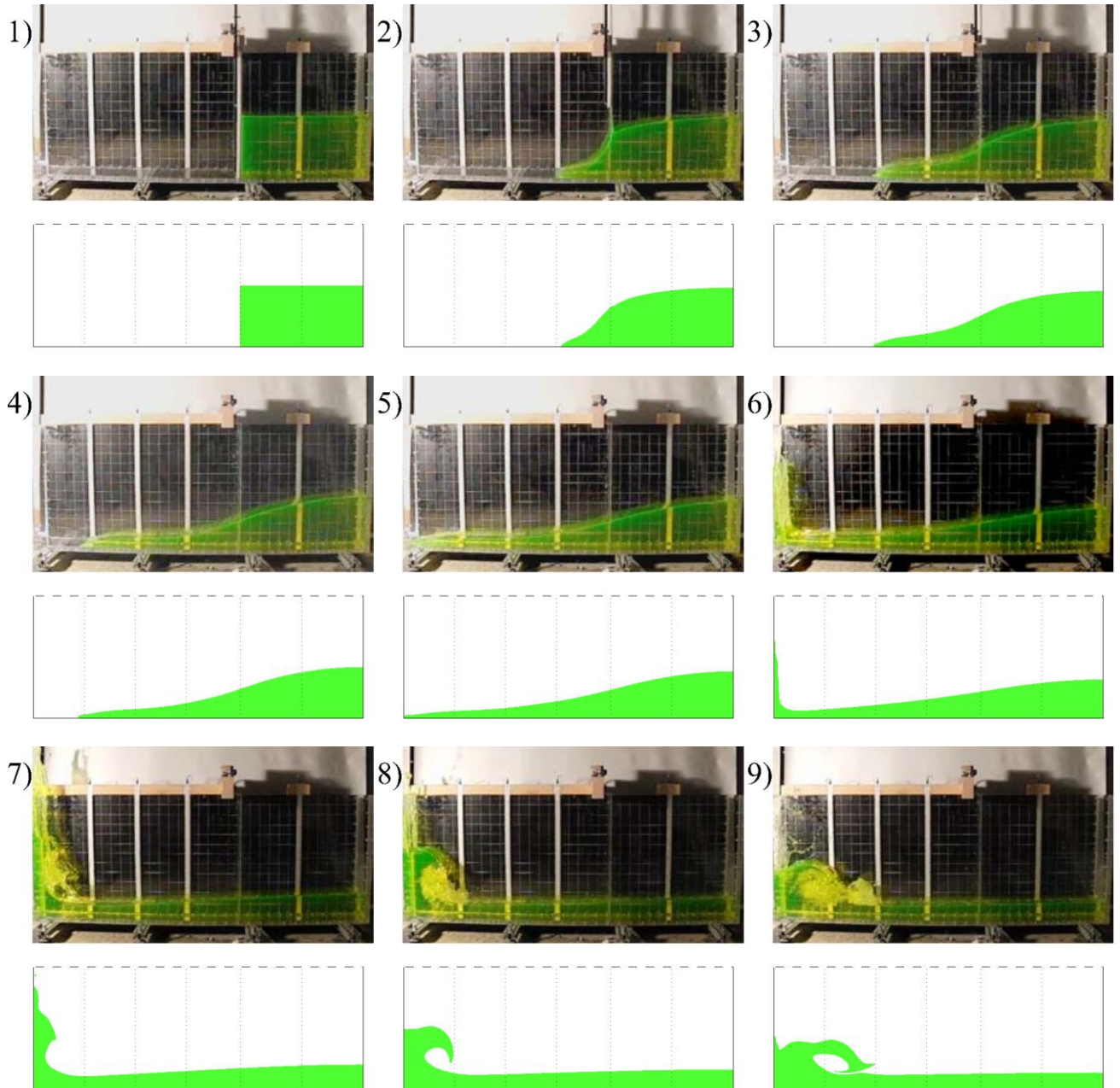


Рисунок 3.3 – Картины распространения волны в лабораторном эксперименте (сверху) и в численном расчете (снизу) на моменты времени (в миллисекундах): 1) 0.0, 2) 159.9, 3) 276.6, 4) 373.3, 5) 449.9, 6) 573.3, 7) 862.3, 8) 1023.3, 9) 1166.6

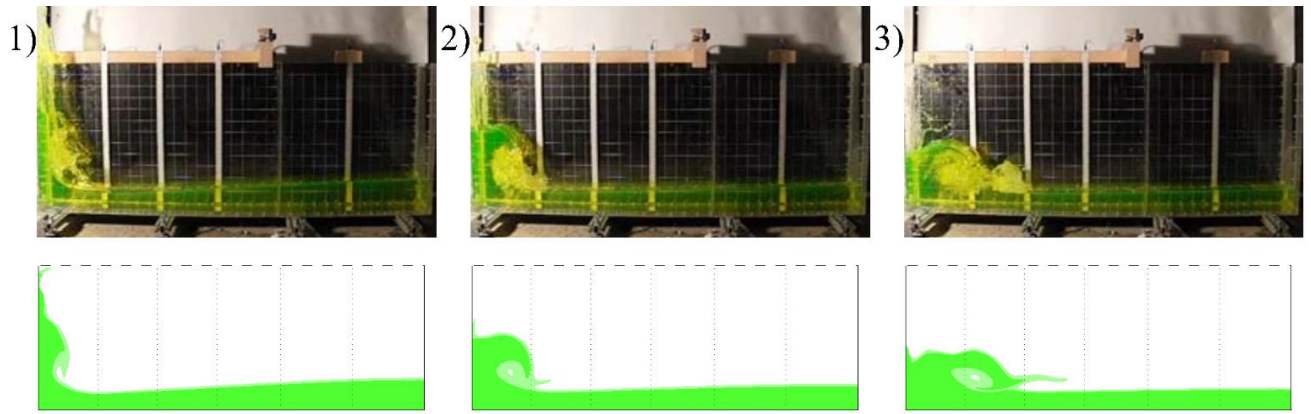


Рисунок 3.4 – Картины распространения волны в лабораторном эксперименте (сверху) и в численном расчете (снизу) для двух границ раздела $C_1 = 0.5$ и $C_1 = 0.2$ на моменты времени (в миллисекундах):

1) 862.3, 2) 1023.3, 3) 1166.6

На рисунке 3.5 представлены графики изменения высоты волны со временем для четырех волномеров $H1-H4$, расположение которых показано на рисунке 3.1.

Для каждого волномера характерно хорошее количественное совпадение численного и лабораторного результатов (в пределах нескольких процентов погрешности) до прихода отраженной от стенки волны. На рисунке это выражается в виде резкого подъема уровня поверхности и дальнейшего количественного и качественного расхождения значений численного решения и лабораторного эксперимента. Для волномеров $H1-H4$ такое расхождение в данных появляется в моменты времени 1.71, 1.15, 1.08, 1.03 секунд соответственно. После отражения от стенки на поверхности жидкости возникает воздушно-водяная пена, которая осложняет определение четкой границы поверхности в точках расположения волномеров. Предоставленные в работе [138] лабораторные данные являются усредненным результатом более сотни типовых экспериментов, и именно приход отраженной волны дает самое существенное отличие поведения поверхности в разных экспериментах.

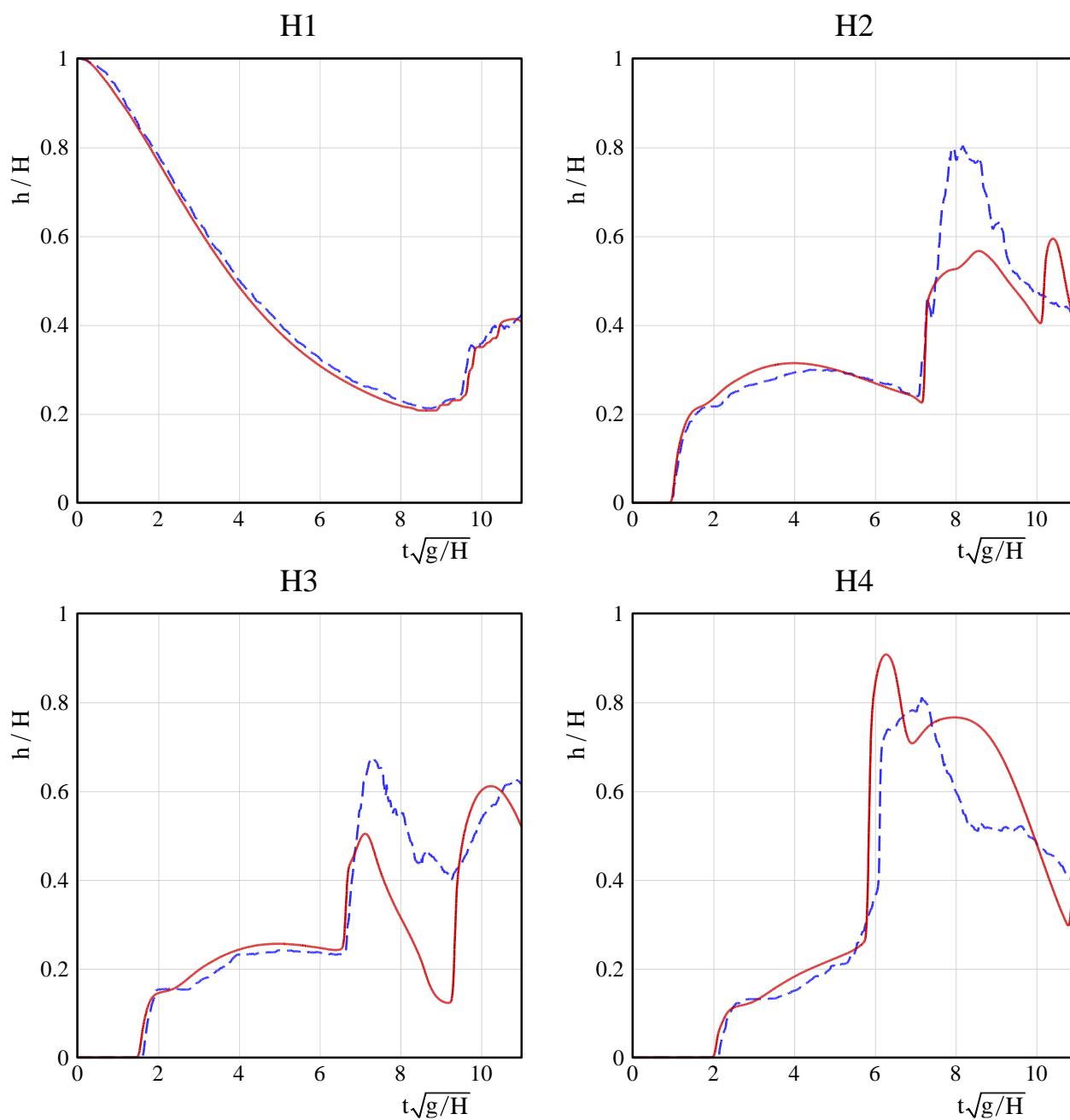
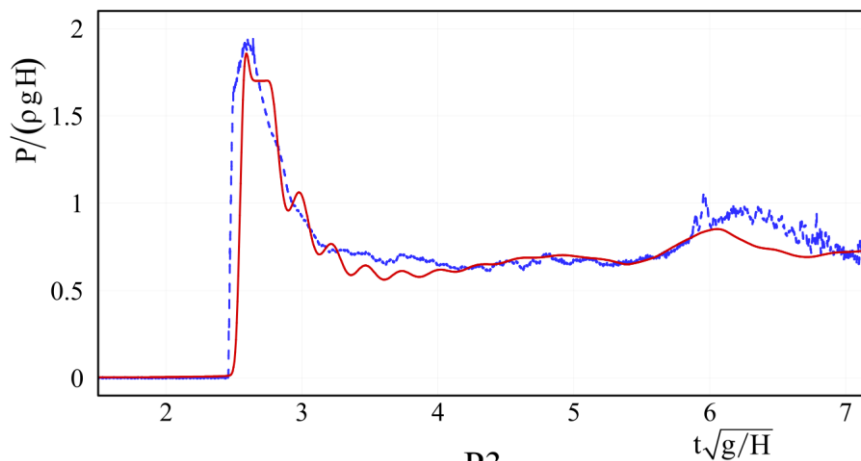


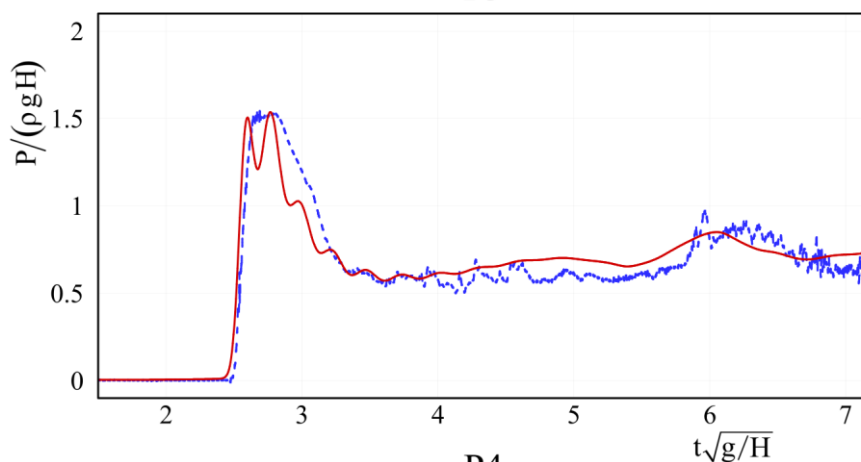
Рисунок 3.5 – Графики изменения высоты волны со временем для четырех волномеров $H1-H4$ (синяя штрихпунктирная линия – эксперимент, красная сплошная – двухкомпонентная модель)

На рисунке 3.6 представлены графики изменения давления на левой стенке области для мест расположения трех датчиков давления $P2-P4$.

P2



P3



P4

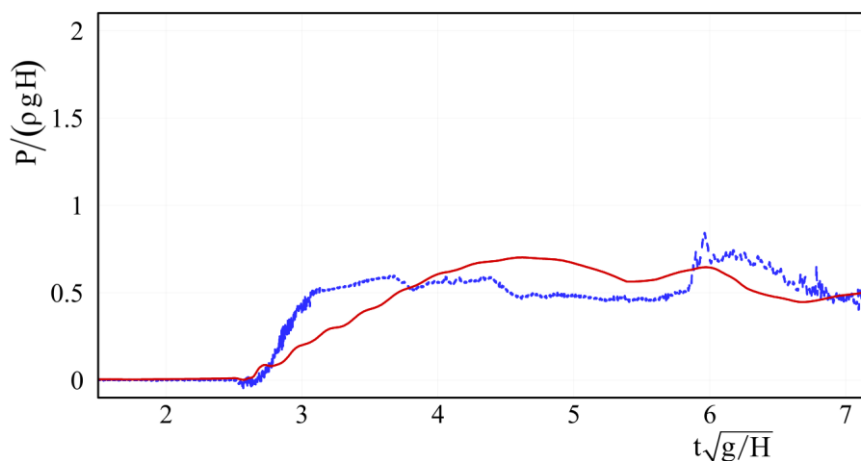


Рисунок 3.6 – Графики изменения давления на левой стенке для датчиков давления $P2 - P4$ (синяя штрихпунктирная линия – эксперимент, красная сплошная – двухкомпонентная модель)

Численный расчет улавливает два пика для каждого из датчиков давления: первоначальный удар жидкости о стенку (начало в момент времени 0.44 секунды, см. рисунок 3.3 под номерами 5 и 6) и приход массы после обрушения отраженной

волны (начало в момент времени 0.96 секунды, см. рисунок 3.3 под номерами 8 и 9). Это согласуется с результатом лабораторного эксперимента, хотя для датчика *P4* в численных расчетах из-за его высокого положения пики сдвинуты по времени.

Для высот волны заметное отличие численных данных от эксперимента возникает после прихода отраженной от стенки волны, до этого оно не превышает 2%. Для давления на левой стенке в датчиках *P2* и *P3* имеется количественное соответствие между численными результатами и лабораторными данными, отличие не превышает 10%. Численный результат для датчика *P4* качественно совпадает с лабораторными данными, оба пика отражены на графике.

В данном параграфе была проведена валидация модели двухкомпонентной жидкости на задаче обрушения столба жидкости под действием силы тяжести. Численные результаты показали, что модель качественно и количественно хорошо отображает процесс обрушения столба жидкости и, следовательно, может использоваться для задач со свободной поверхностью.

§ 3.2. Образование и распространение одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ»

В настоящее время является актуальной задача определения качественного и количественного поведения одиночной волны при набегании на берег или препятствие. В частности, такие волны исследуются при помощи лабораторных экспериментов в гидроволновом лотке. Однако проведение подобного эксперимента является дорогостоящим и требует достаточно большого времени для подготовки. В этом случае актуально применение математического моделирования, которое позволяет относительно быстро получать результаты для различных вариантов начальных условий задачи и при необходимости расширять возможности лабораторных экспериментов.

Целью параграфа является построение и валидация модели многокомпонентной жидкости для задачи возникновения и распространения одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ».

В «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС» (г. Санкт-Петербург) для запуска одиночной волны был сконструирован гидроволновой лоток длиной 40 м, шириной 1 м и высотой 1,2 м. Одиночная волна в нем запускается вакуумным волнопродуктором, который представляет собой герметичный закрытый резервуар, сообщающийся с лотком. К резервуару подсоединен насос, а на верхней крышке находится клапан. При помощи насоса откачивается воздух до достижения требуемой высоты жидкости. При начале эксперимента открывается клапан, воздух проникает внутрь резервуара и под действием силы тяжести происходит сброс воды в лоток, создающий одиночную волну и цуг сопровождающих ее волн меньшей амплитуды. В непосредственной близости от волнопродуктора располагался участок ровного дна длиной 7 м, на котором происходило окончательное формирование создаваемой волны. Далее в лотке дно представляло собой пологий откос с заложением 1:50 ($\text{tg } \alpha = 0.02$, где α – угол между горизонтальным уровнем дна и откосом).

В этом параграфе результаты численного эксперимента по движению одиночной волны будут сравниваться с результатами лабораторных экспериментов в гидроволновом лотке, когда высота набора воды в волнопродукторе составляла 33 см. В лотке были размещены волномеры $B1 - B4$. Геометрия области и положение волномеров показаны на рисунке 3.7 (для наглядности область изображена схематично).

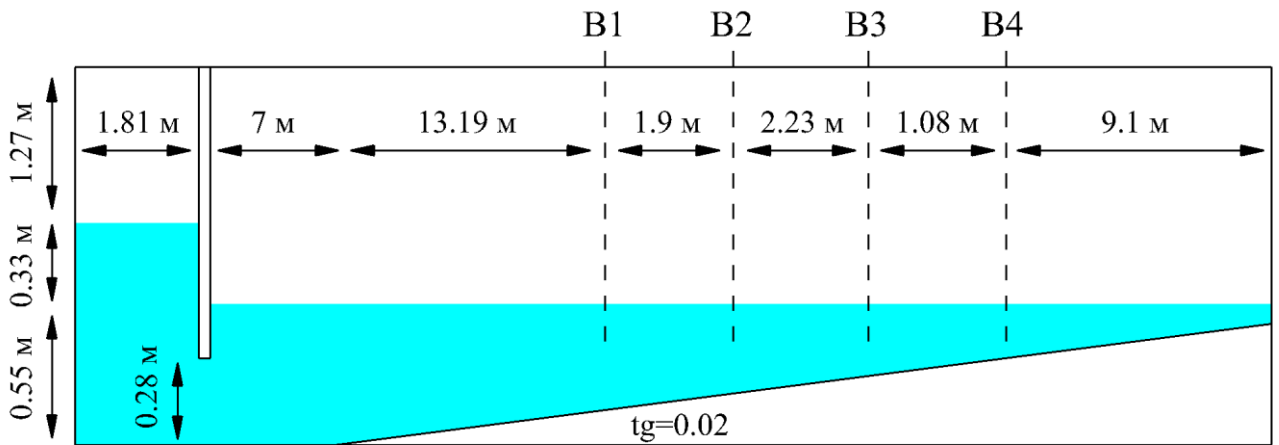


Рисунок 3.7 – Геометрия области и расположение волномеров $B1 - B4$

3.2.1 Численная модель гидроволнового лотка

Для моделирования движения волн в лотке используется двухкомпонентная модель вязкой несжимаемой жидкости (1.1.30), где первая компонента это вода, а вторая – воздух. Мы рассматриваем двумерную постановку задачи, так как при данной ширине лотка боковые стенки не оказывают существенного влияния на динамику потока. Эксперименты проводились с температурой среды 20°C , при которой значения динамической вязкости и плотности для воды принимают

значения соответственно $\mu_1 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\rho_1 = 998.23 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, для воздуха

$$\mu_2 = 1.82 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \rho_2 = 1.2056 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Обозначения границ области приведены на рисунке 3.8. Здесь:

Γ_1 – граница, которая моделирует поведение клапана волнопродуктора

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = P_{кр}(t), \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – граница свободного вытекания, на которой поставлено атмосферное давление

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad p|_{\Gamma_2} = 101325 \text{ Па}, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

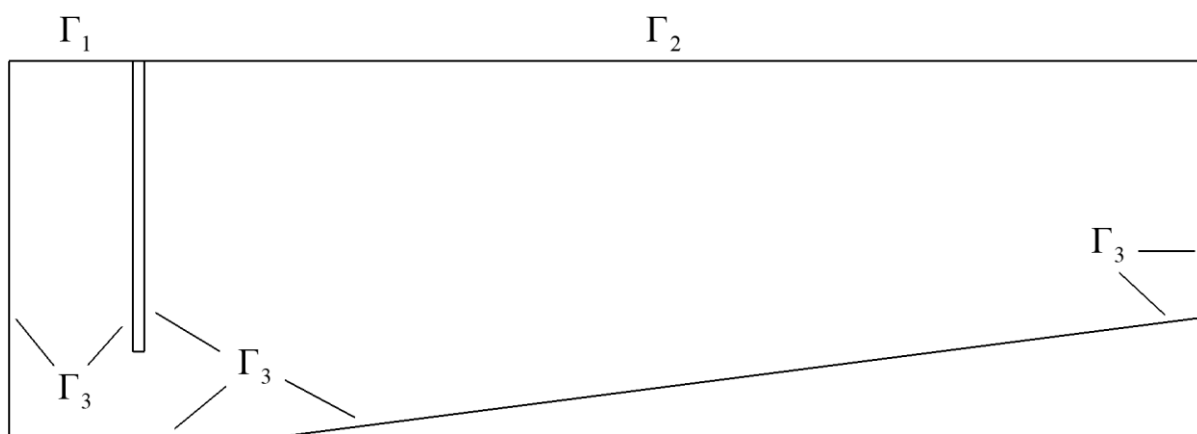


Рисунок 3.8 – Обозначение границ области

Образование одиночной волны происходит вследствие открытия заслонки волнопродуктора и сброса воды в лоток (см. схему работы волнопродуктора на рисунке 3.9). При моделировании сброса воды в лоток необходимо учитывать процесс втекания воздуха в резервуар после открытия заслонки. Иначе амплитуды генерируемых волн в численных расчетах значительно превышает экспериментальные [6].

следующий алгоритм численного решения задачи, включающий в себя нахождение давления $P_{кр}(t)$ и расчет движения волны в области:

1) В начальный момент времени давление $P_{кр}$ на крышке удерживает заданный уровень жидкости h в волнопродукторе:

$$P_{кр}(0) = P_{атм} - gh(\rho_1 - \rho_2),$$

где $P_{атм} = 101325 \text{ Па}$ – атмосферное давление, ρ_1 – плотность воды, ρ_2 – плотность воздуха, g – сила тяжести, h – высота набора воды в волнопродукторе относительно уровня воды в лотке.

2) Из уравнения состояния $pV = RT \frac{m}{M}$ определяется текущая плотность воздуха в волнопродукторе по формуле:

$$\rho_в = \frac{P_{кр} M}{RT},$$

где $\rho_в$ – плотность воздуха в волнопродукторе для давления $P_{кр}$,

$M = 0.029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ – молярная масса воздуха, $R = 8.314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – молярная газовая

постоянная, $T = 20^\circ \text{C} = 293.15 \text{ K}$ – температура воздуха.

3) Объем воздуха определяется из геометрических размеров волнопродуктора и высоты набора воды:

$$V = 0.96 \cdot 1.81 \cdot (1.6 - h) \text{ м}^3.$$

4) По найденному объему и плотности определяется масса воздуха в волнопродукторе:

$$m = V \rho_в \text{ кг}.$$

5) Определяется скорость втекания воздуха через клапан. В точке В, расположенной на горловине отверстия (см. рисунок 3.10) предполагается, что действуют характеристики (давление, плотность, масса) волнопродуктора. В точке А, расположенной вдали от горловины отверстия, но на одной высоте с

точкой В, задается атмосферное давление, причем точка А находится достаточно далеко от резервуара волнопродуктора так, чтобы скорость воздуха в ней была нулевой.

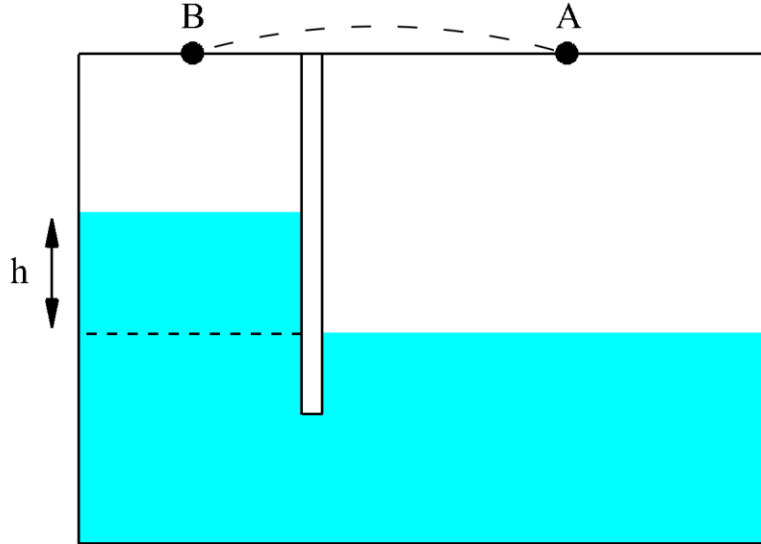


Рисунок 3.10 – Схема волнопродуктора

Процесс втекания воздуха через клапан на достаточно малом промежутке времени считается стационарным (весь процесс – квазистационарным). Соответственно для определения скорости втекания воздуха в волнопродуктор используем интеграл Бернулли [6]:

$$\frac{v_B^2}{2} + gH_B + \int_B^A \frac{dP}{\rho} = \frac{v_A^2}{2} + gH_A,$$

где v_A , v_B – скорости движения воздуха, H_A , H_B – высота точек А и В.

После подстановки в данное уравнение нулевой скорости в точке А, выражения из уравнения состояния для плотности $\rho = \frac{PM}{RT}$, получаем формулу

для определения скорости втекания воздуха на горловине клапана:

$$v_B^2 = \frac{RT}{M} \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right),$$

где $P_A = P_{атм}$, $P_B = P_{кр}$, $P_A \geq P_B$.

Давление $P_{кр}(t)$ изменяется до того момента, когда достигает атмосферного, после этого мы считаем, что процесс втекания воздуха через клапан завершен.

б) Определяется масса проникающего в волнопродуктор воздуха за расчетный шаг по времени Δt :

$$\Delta m = \rho_2 (v_B S \Delta t),$$

где S – площадь отверстия клапана, которая принималась равной $S = 0.013 \text{ м}^2$ [6].

7) Внутри волнопродуктора переопределяется плотность воздуха ρ_e с учетом возросшей массы при прежнем объеме. Из уравнения состояния определяется давление газа $P_{кр}$ для новой плотности.

8) Значение давления $P_{кр}$ подставляется в условие на границе Γ_1 . Выполняется шаг по времени для модели двухкомпонентной жидкости.

9) Так как положение свободной границы в волнопродукторе изменилось в результате выполнения шага 8, то определяется объем воздуха в волнопродукторе на новом шаге по времени, корректируются значения давления и плотности.

10) Переход к пункту 5.

3.2.2 Численные результаты

Сравнения проводились с результатами, полученными в эксперименте и при расчетах потенциальной моделью [6].

На рисунке 3.11 изображены графики скорости втекания воздуха в клапан волнопродуктора и изменение давления $P_{кр}$ на крышке волнопродуктора.

На рисунке 3.12 приведены профили волн, зарегистрированных четырьмя волномерами $B1 - B4$.

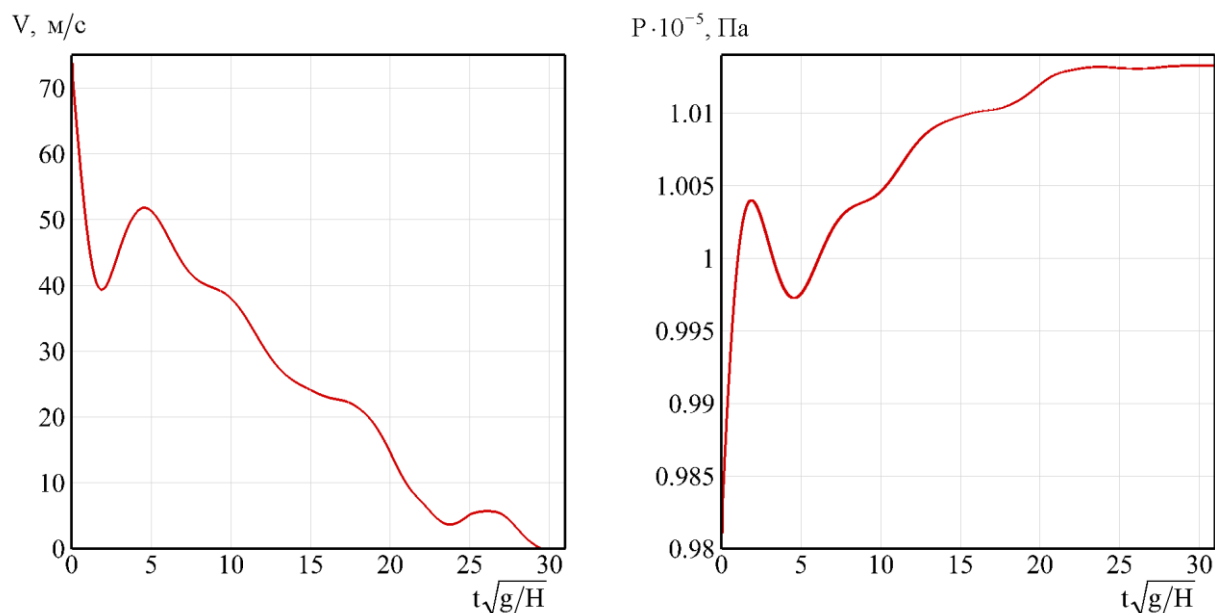


Рисунок 3.11 – Графики изменения скорости втекания воздуха в волнопродуктор и давления $P_{кр}$ на крышке волнопродуктора

Обе модели (основанная на течении идеальной жидкости из работы [6] и представленная здесь двухкомпонентная) позволяют получать результаты, соответствующие экспериментальным по максимуму основной волны и скорости ее распространения. Однако присутствующая в эксперименте вторая волна, следующая сразу за первой, отображена только в двухкомпонентной модели. Кроме того, на рисунке 3.12 вертикальной прерывистой линией отмечен момент обрушения волны на пологом откосе. Он соответствует потенциальной модели, так как в ней в этот момент из-за возникшей многосвязности области дальнейший счет невозможен (зеленый точечный график обрывается). Тем не менее, момент обрушения волны для двухкомпонентной модели близок к обозначенному на рисунке. Причем в случае двухкомпонентной модели расчет на этом не останавливается.

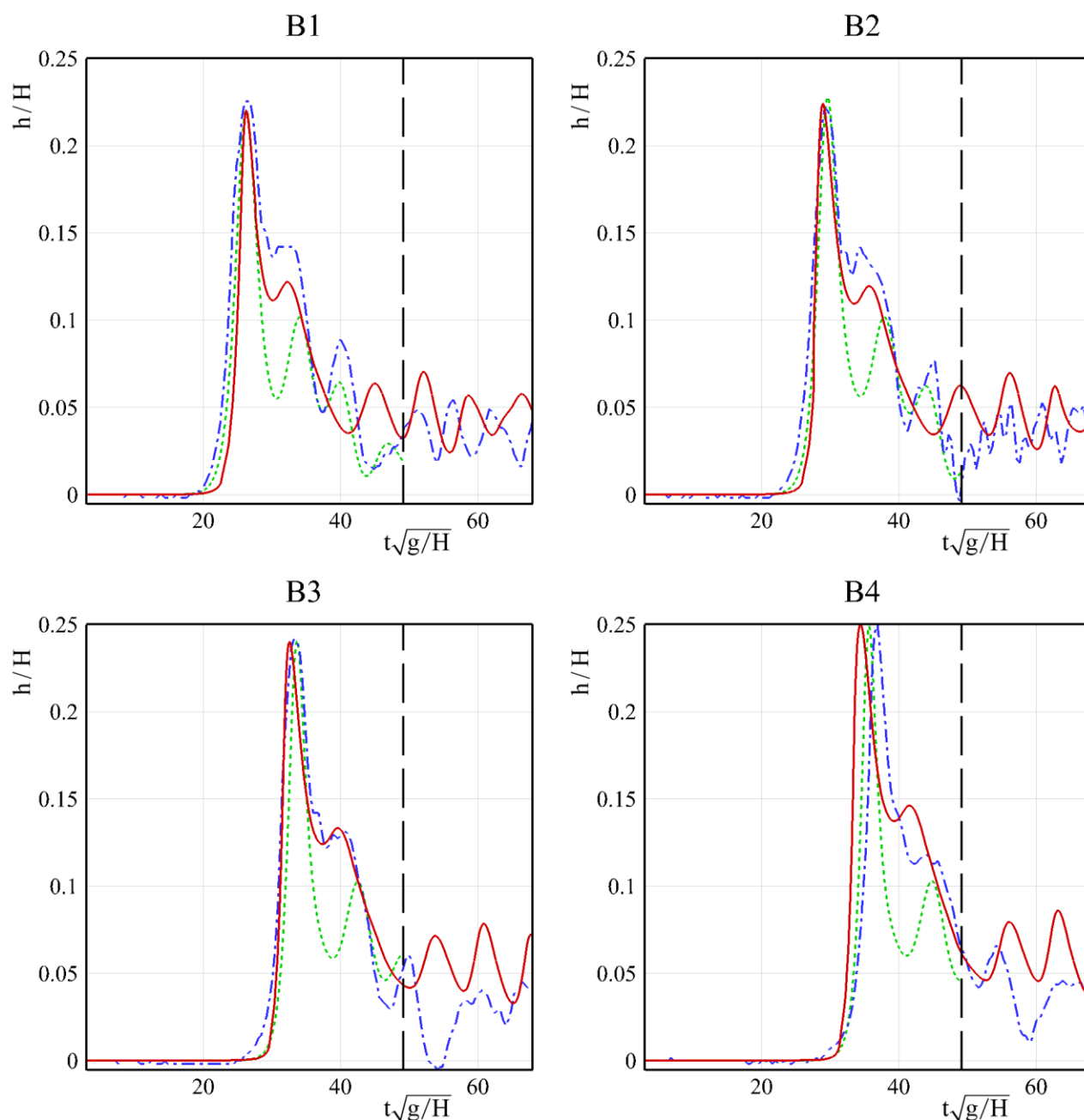


Рисунок 3.12 – Графики показаний четырех волномеров $B1 - B4$ во времени. Синяя штрихпунктирная линия – экспериментальные профили волн, красная сплошная линия – результаты модели вязкой несжимаемой двухкомпонентной жидкости, зеленая точечная линия – результаты потенциальной модели.

На рисунке 3.13 представлены картины течений для различных моментов времени: 1) формирование волны волнопродуктором, 2) движение в лотке, 3) обрушение на откосе, 4) взаимодействие с противоположной стенкой лотка, 5) движение отраженной волны.

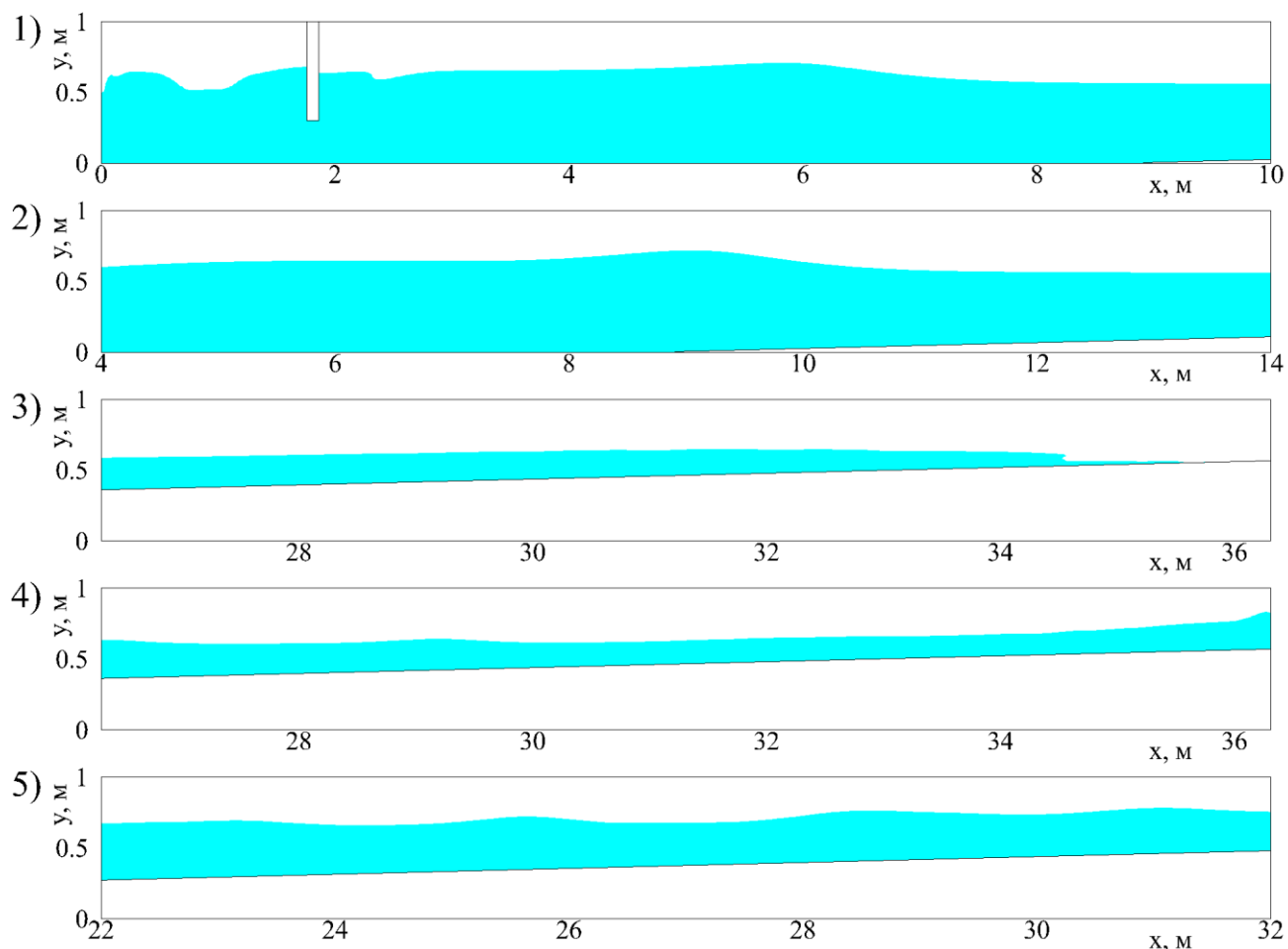


Рисунок 3.13 – Картины течений на моменты безразмерного времени: 1) 5.45, 2) 9.1, 3) 47.7, 4) 61.3, 5) 100.0

Таким образом, двухкомпонентная модель показывает хорошие количественные совпадения с данными лабораторного эксперимента для всех четырех датчиков, погрешность высоты основной волны не превышает 2%. Также имеется вторая, идущая вслед за основной, волна, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Погрешность высоты второй волны для разных датчиков имеет значение от 10% до 20%.

По результатам проведенных расчетов можно сделать следующий вывод: двухкомпонентная модель достаточно хорошо отображает движение волн в гидроволновом лотке «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС».

§ 3.3. Перенос грунта под действием поверхностных волн

Если препятствие (например, платформа гравитационного типа) возвышается над поверхностью воды, то при продолжительных штормовых условиях волны, интенсивно взаимодействующие со стенками препятствия, вызывают сильные пристеночные течения, которые вымывают грунт вблизи основания.

Целью данного параграфа является моделирование влияния поверхностных волн на движение связного грунта вблизи препятствия.

3.3.1 Взаимодействие набегающей волны с препятствием

Рассмотрим двумерную задачу набегания волны на прямоугольное препятствие вследствие обрушения столба жидкости. Геометрия области и начальное расположение жидкости указано на рисунке 3.14.

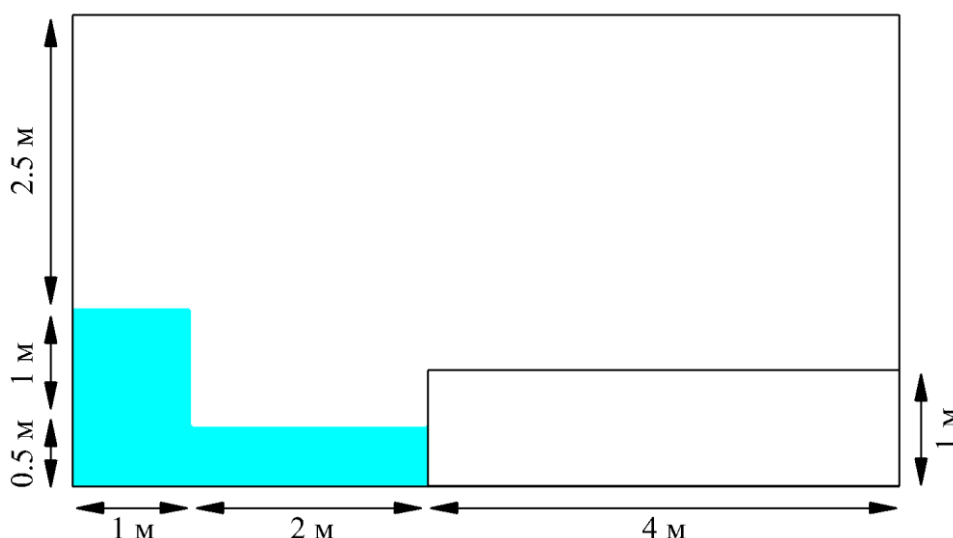


Рисунок 3.14 – Геометрия области и начальное расположение жидкости

Для численного решения данной задачи мы рассматриваем двухкомпонентную версию модели (1.1.30), где первая компонента это воздух, а вторая компонента – вода. Под действием силы тяжести столб жидкости обрушается, запуская волну в сторону препятствия. Для компонент были приняты

следующие значения динамической вязкости и плотности, соответствующие воздуху и воде:

$$\rho_1 = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_2 = 1000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \mu_1 = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_2 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Обозначения границ области приведены на рисунке 3.15.

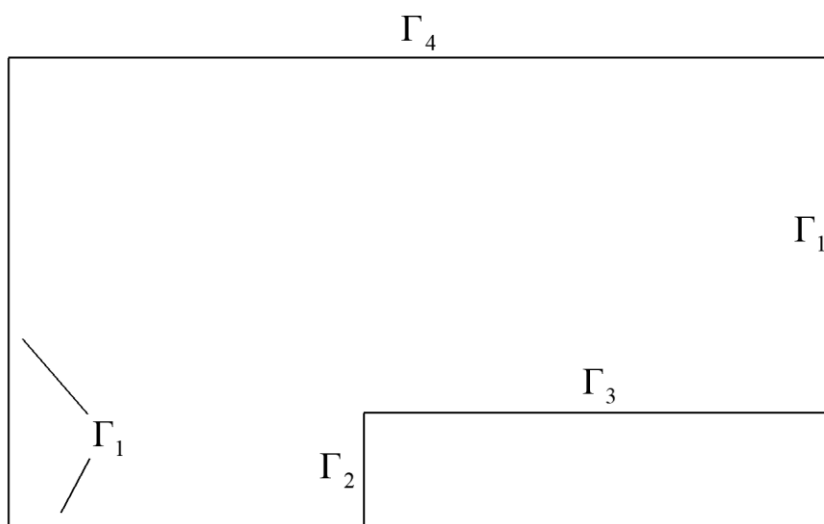


Рисунок 3.15 – Граничные условия

Здесь:

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – твердые границы, на которых выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}}|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = 0.$$

Γ_4 – граница свободного вытекания, на которой действует атмосферное давление

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}|_{\Gamma_4} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}|_{\Gamma_4} = 0, \quad p|_{\Gamma_4} = 101325 \text{ Па}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial y}|_{\Gamma_4} = 0.$$

На рисунке 3.16 представлены картины волновых движений на различные моменты времени.

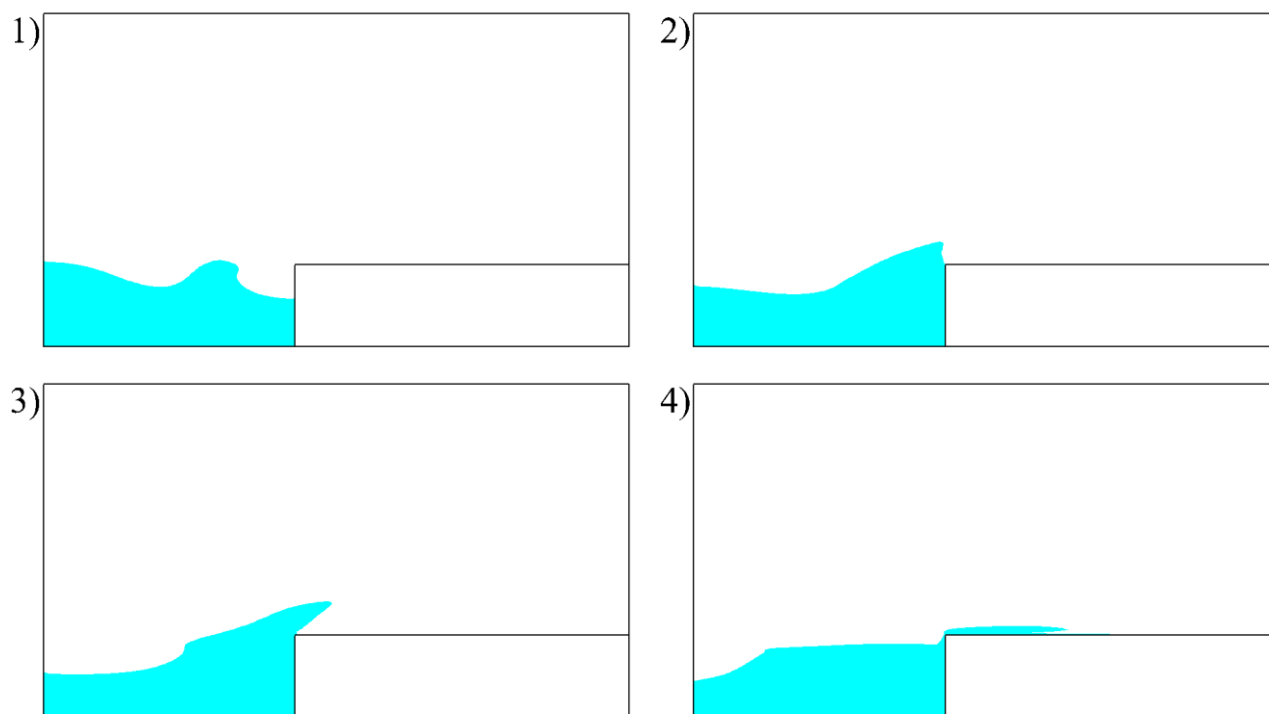


Рисунок 3.16 – Картина волновых движений на моменты времени (в секундах):

1) 0.54, 2) 0.8, 3) 1.07, 4) 1.67.

Под номером 4 на рисунке 3.16 представлен момент обрушения жидкости на препятствие, который произошел на 1.67 секунды. Длина заплеска при этом составила 1.33 м.

В рамках этой модели возможно определение сил, создаваемых гидродинамическим воздействием жидкости на вертикальную границу Γ_2 и горизонтальную границу Γ_3 (см. рисунок 3.17), по следующей формуле [86]:

$$F = \int_{\omega} p \cos \varphi d\omega,$$

где $p = p(x, y, t)$ – гидродинамическое давление на поверхности ω , полученное из уравнения движения (1.1.30), φ – угол между нормалью к элементарной площадке и вектором скорости движения воды.

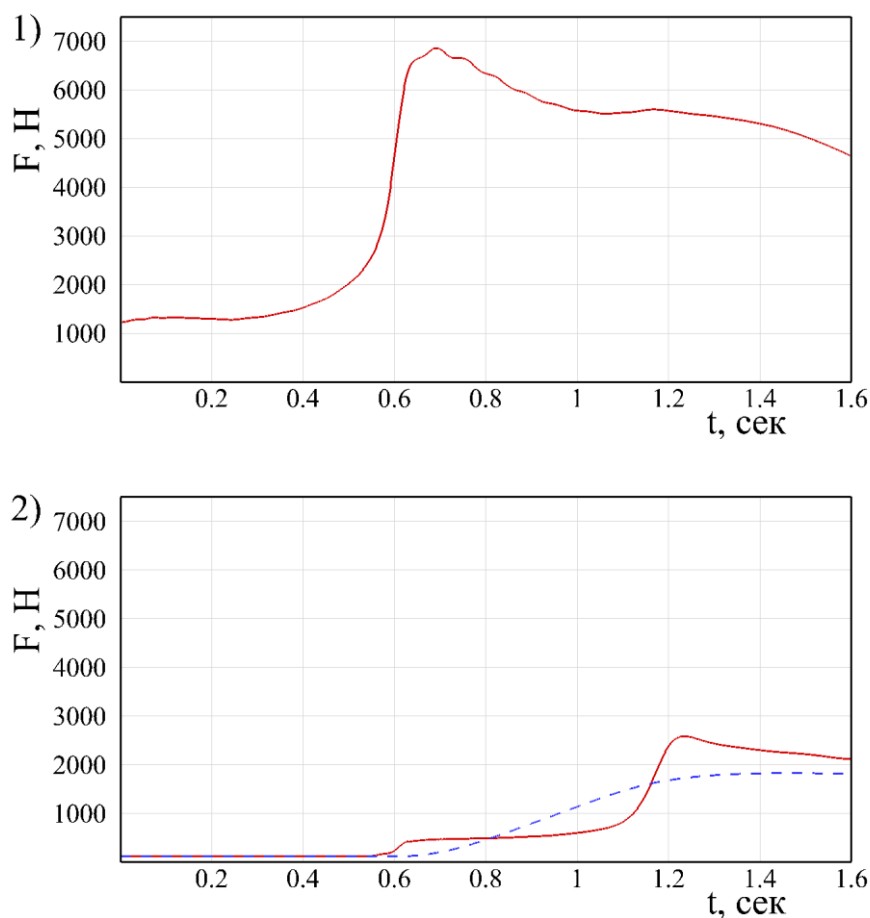


Рисунок 3.17 – Сила гидродинамического давления: 1) на вертикальную границу Γ_2 , 2) на горизонтальную границу Γ_3 . Синяя штрихпунктирная линия – весовое давление $p = \rho gh$

Пиковая нагрузка на границу Γ_2 ($F = 6675.34 \text{ Н}$) приходится на момент удара жидкости о препятствие ($t = 0.65$ секунды). Пиковая нагрузка на границу Γ_3 ($F = 2601.89 \text{ Н}$) приходится на момент удара заплеснувшей волны ($t = 1.24$ секунды).

Как видно из рисунка 3.17 под номером 2, со временем гидродинамическое давление приближается к весовому.

3.3.2 Перемещение подводного грунта под действием движения поверхностной волны

В этом пункте рассмотрим взаимное влияние движения поверхностных волн, внутреннего течения и вязного грунта.

Для этого используем трехкомпонентную версию модели (1.1.29), где первая компонента это воздух, вторая компонента – вода, а третья – намокший связный грунт. Компоненты имеют следующие значения динамической вязкости и плотности, соответствующие воздуху, воде и грунту:

$$\rho_1 = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_2 = 1000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_3 = 2000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\mu_1 = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_2 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_3 = 10 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Область решения совпадает с областью для задачи из прошлого пункта (см. рисунок 3.14). На дно области добавлен слой вязного размокшего грунта. Так как нас интересует влияние поверхностных волн и их взаимодействия с препятствием на перемещение вязного донного грунта, мы рассматриваем две постановки задачи. В первом случае препятствие возвышается над уровнем воды, во втором случае находится под ним. Геометрия области и начальное расположение компонент изображены на рисунке 3.18.

Для области решения границы такие же, как в предыдущем пункте (см. рисунок 3.15).

На рисунках 3.19 и 3.20 приведены результаты численных расчета двух вариантов на одинаковые моменты времени.

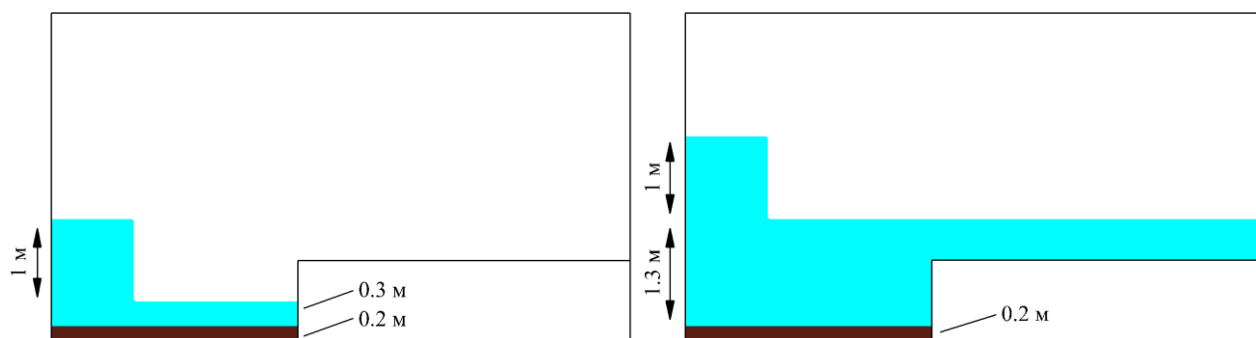


Рисунок 3.18 – Геометрия области и расположение компонент для двух вариантов задачи. Белым обозначен воздух, голубым – вода, коричневым – намокший связный грунт

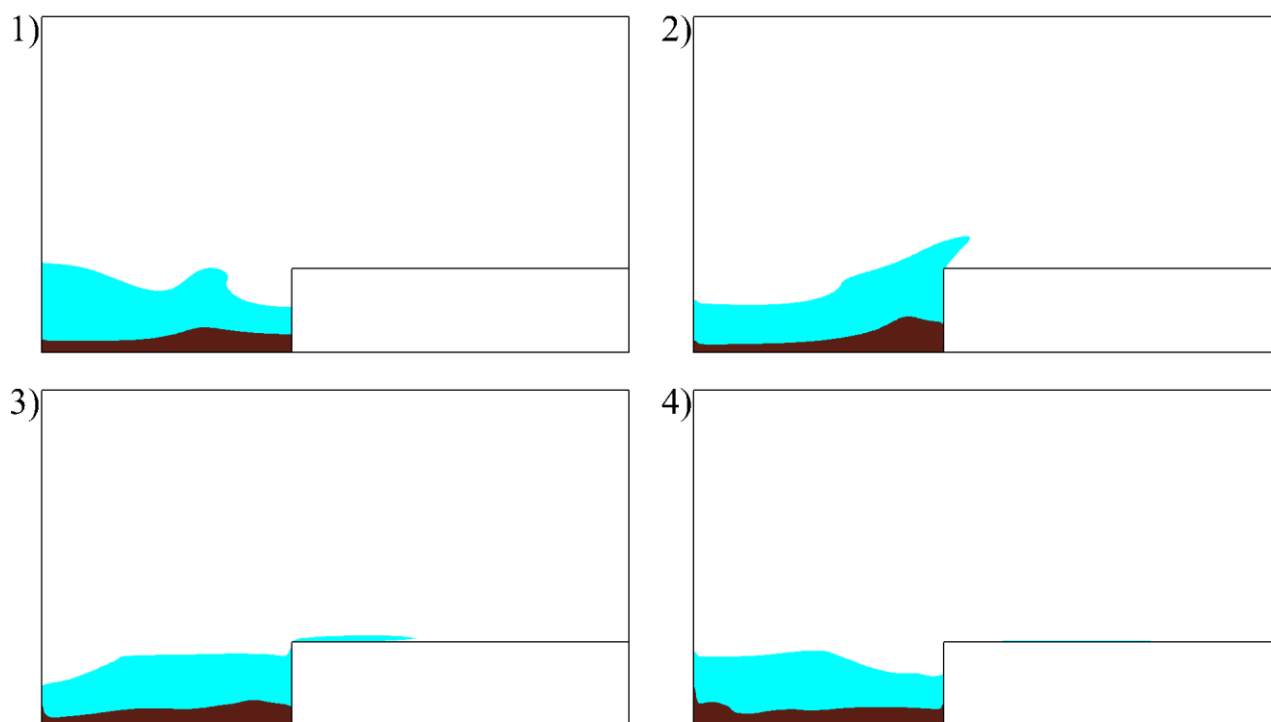


Рисунок 3.19 – Картина движения поверхностной волны и донного грунта в случае, когда уровень жидкости ниже препятствия на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0

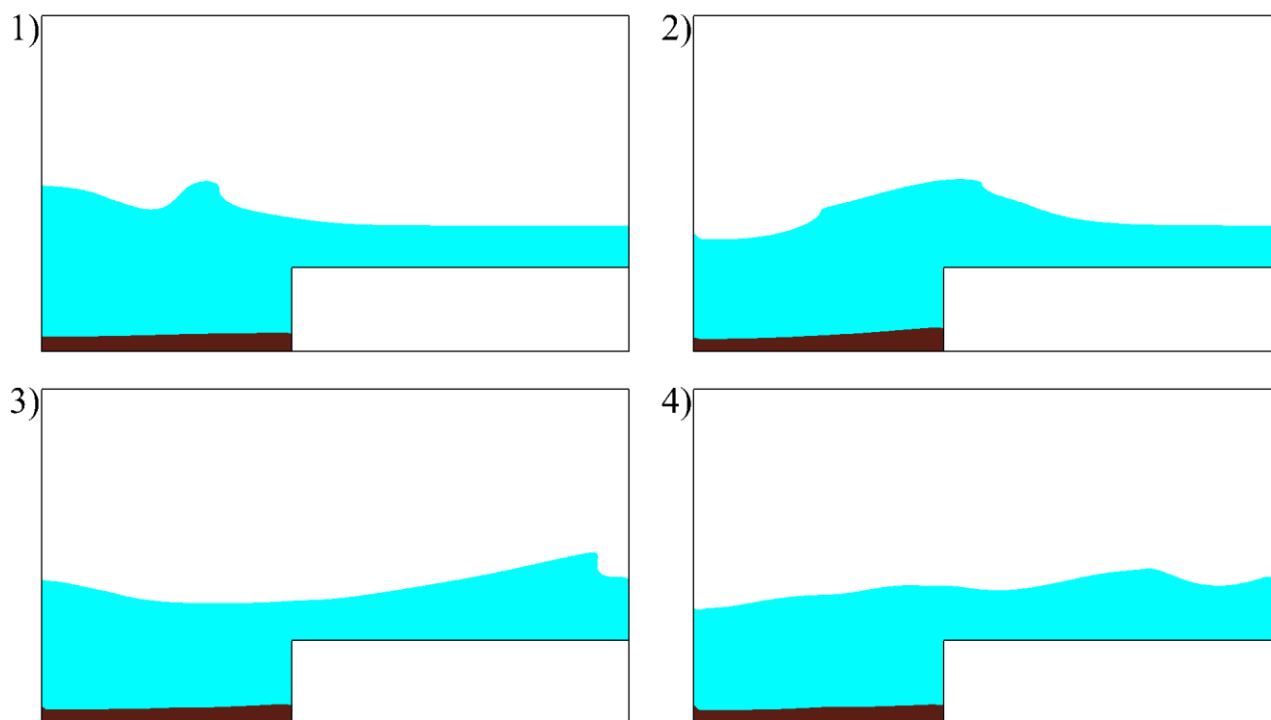


Рисунок 3.20 – Картина движения поверхностной волны и донного грунта в случае, когда уровень жидкости выше препятствия на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0

В случае, когда уровень жидкости лежит ниже препятствия скорость движения запущенной волны активно передается придонным областям, в результате чего видны интенсивные переносы грунта вслед за волнением на поверхности. Когда же препятствие находится под поверхностью жидкости, то в этом случае волна проходит над ним, не создавая обратного течения жидкости, и поэтому движения грунта практически не происходит. На рисунке 3.21 приведено сравнение поверхностей грунта для двух вариантов уровня жидкости на разные моменты времени.

По результатам этого параграфа можно сделать следующий вывод: трехкомпонентная модель (1.1.29) может применяться к задачам воздействия поверхности жидкости на донный грунт, причем интенсивность переноса грунта повышается при уменьшении глубины воды.

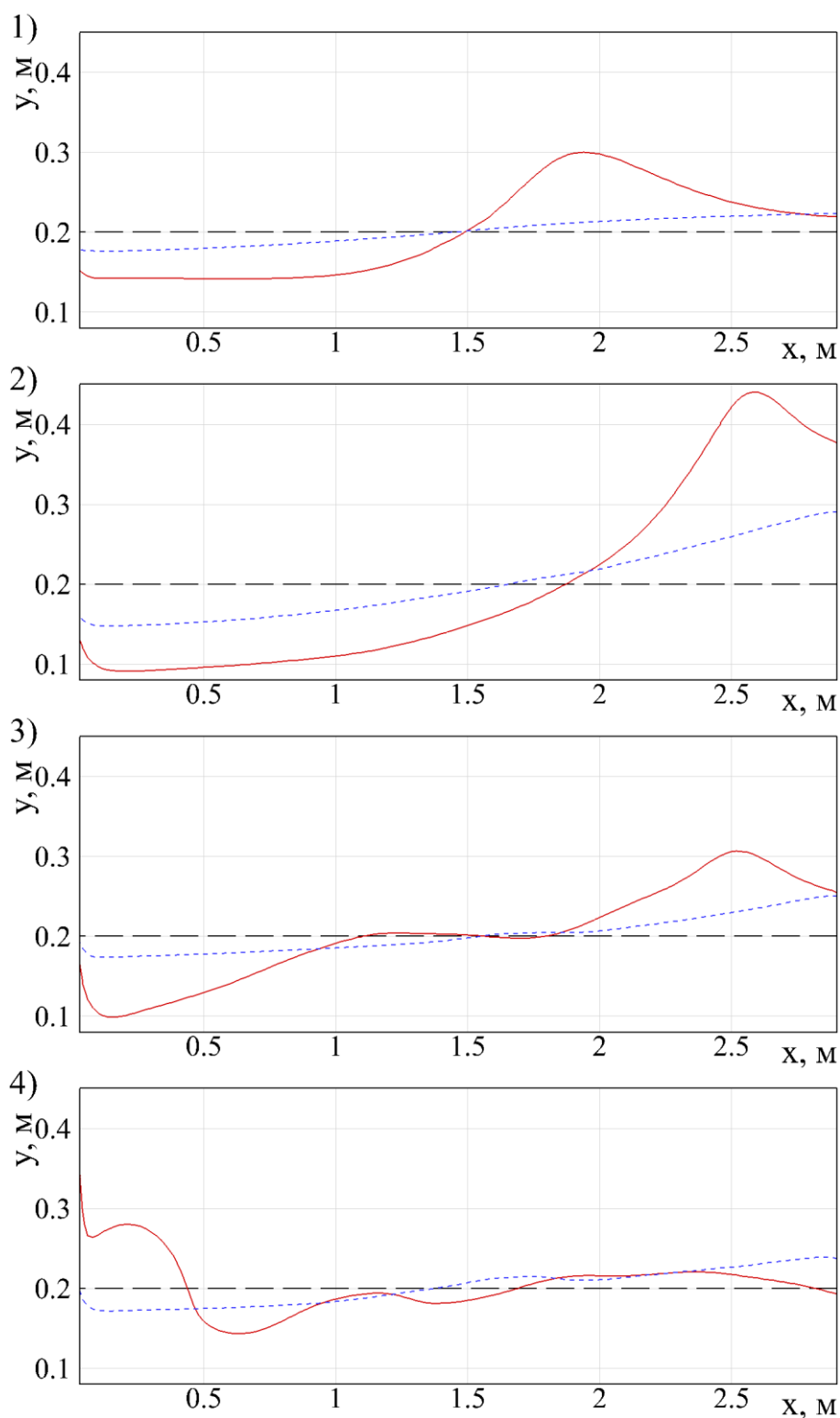


Рисунок 3.21 – Поверхность грунта на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0. Красная сплошная линия – для случая, когда уровень жидкости находится ниже препятствия; синяя короткая прерывистая линия – для случая, когда уровень жидкости находится выше препятствия; черной длинной прерывистой линией обозначен первоначальный уровень грунта

§ 3.4. Образование поверхностных волн вследствие движения донного связного грунта

В данном параграфе рассматривается влияние движения донного связного грунта на поверхность воды.

Мы будем моделировать взаимодействие воды и связного грунта при помощи трехкомпонентной модели, описанной уравнениями (1.1.29). Здесь аналогично предыдущему параграфу одна компонента – воздух, вторая – вода и третья – намокший связный грунт.

3.4.1 Распад полукруга намокшего грунта на дне бассейна

Для начала рассматривается тестовая задача, чтобы проверить влияние вязкости связного грунта на движение поверхности жидкости. На дне бассейна находится часть намокшего грунта в виде полукруга. Под действием силы тяжести она обрушается, порождая волнение поверхности. Схема области и начальное расположение компонент приведены на рисунке 3.22.

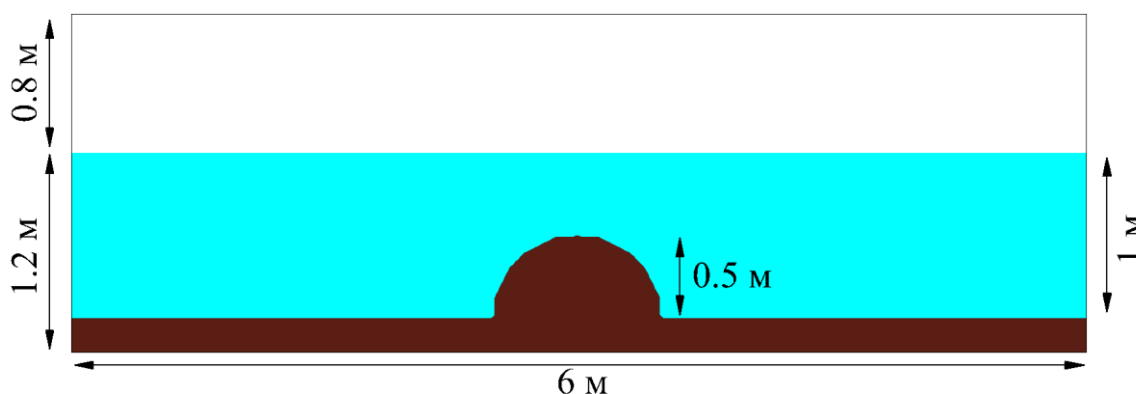


Рисунок 3.22 – Область решения и начальное расположение компонент. Белым обозначен воздух, голубым – вода, коричневым – намокший связный грунт

Обозначения границ области приведены на рисунке 3.23.

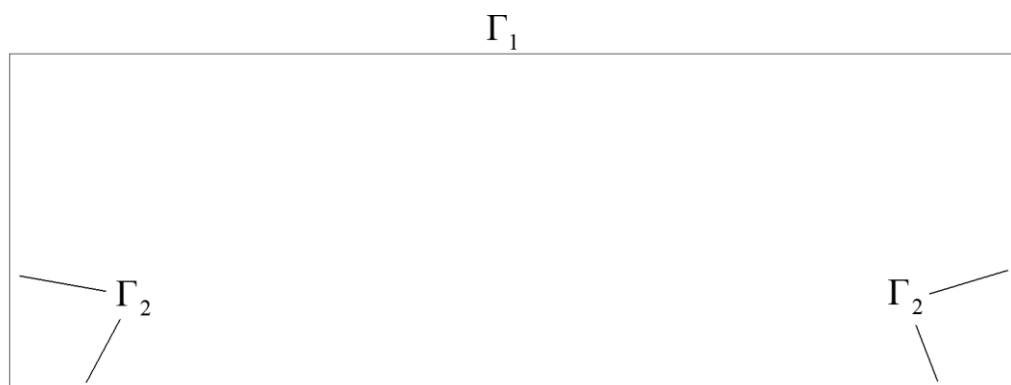


Рисунок 3.23 – Границы области

Здесь:

Γ_1 – граница свободного вытекания, на которой действует атмосферное давление

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 101325 \text{ Па}, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_3}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_3}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

На рисунке 3.24 приведены картины движения грунта и волнообразование на различные моменты времени для следующих значения плотностей и вязкостей компонент:

$$\rho_1 = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_2 = 1000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_3 = 3000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \mu_1 = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_2 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_3 = 10.0 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

На рисунке 3.25 приведены картины движения грунта и волнообразование на различные моменты времени в случае, когда вязкость намокшего грунта увеличивается до значения $\mu_3 = 1000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$.

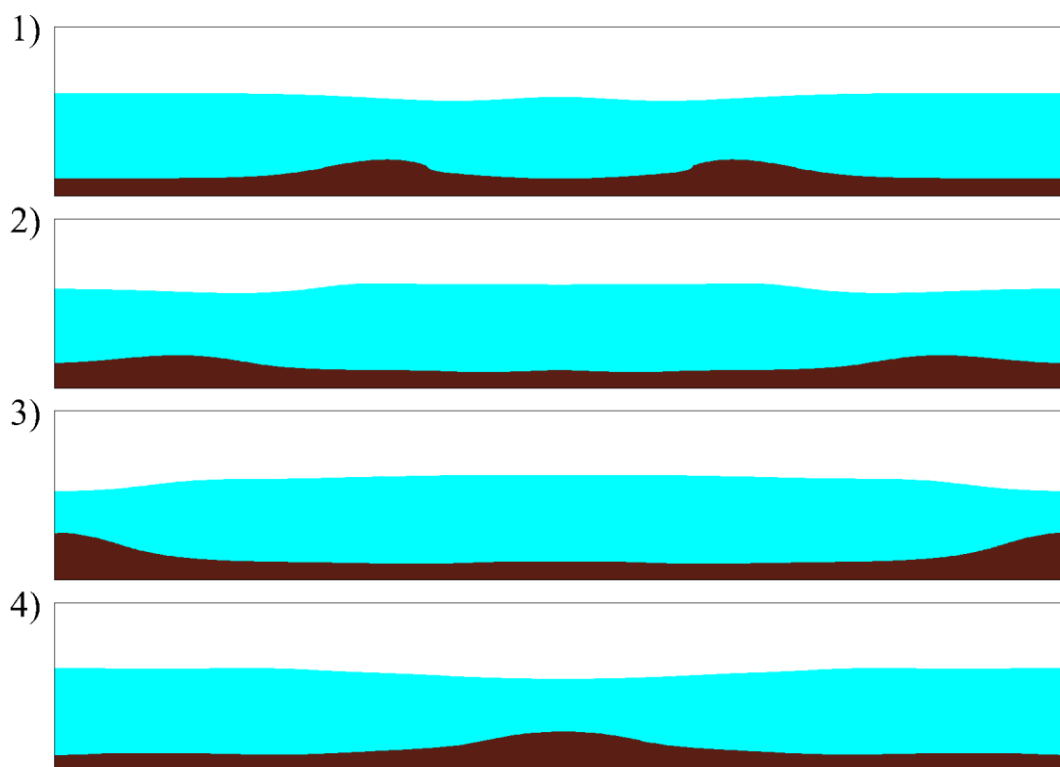


Рисунок 3.24 – Картины волнообразования на моменты времени (в секундах):

1) 0.9, 2) 1.9, 3) 2.7, 4) 5.4

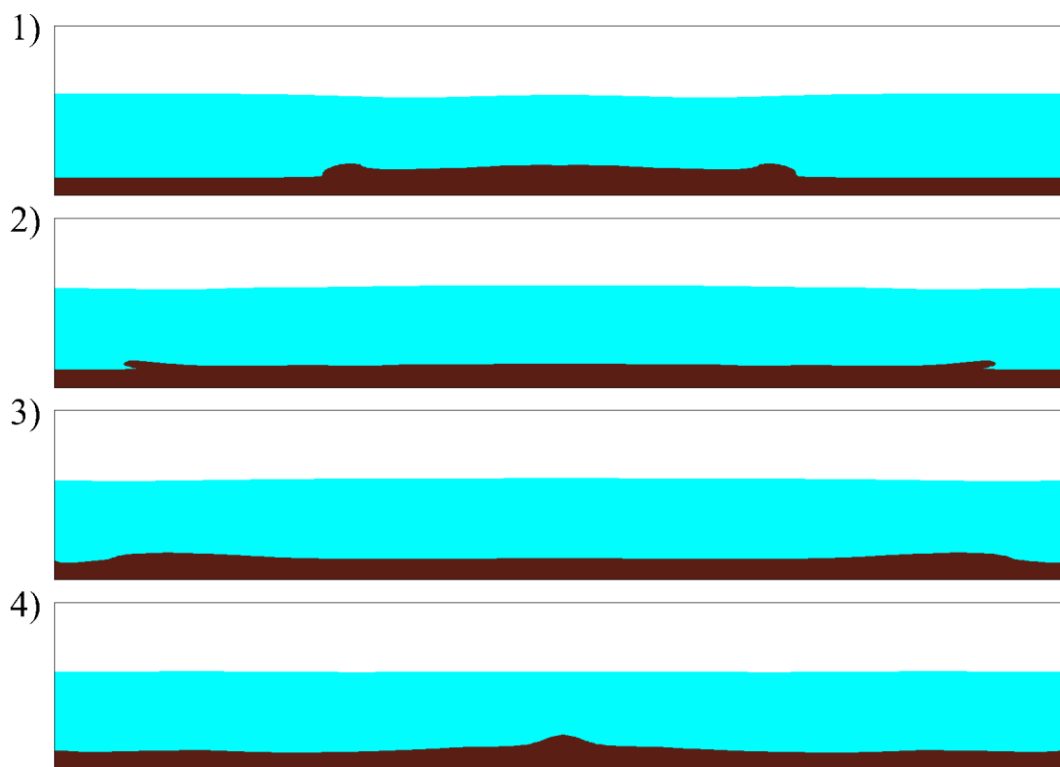


Рисунок 3.25 – Картины волнообразования на моменты времени (в секундах):

1) 1.2, 2) 2.3, 3) 3.2, 4) 7.0

Грунт при обрушении увлекает за собой жидкость, что приводит к появлению двух волн в направлении боковых стенок и дает заметный перепад уровня поверхности. Затем, отражаясь от стенок области, он возвращается к центру, увлекая за собой поверхность жидкости.

При увеличении вязкости намочшего грунта меняется характер его движения: скорость распространения уменьшается, грунт растекается узким слоем по дну. В силу этого на поверхности волнения практически не происходит.

3.4.2 Волна, порожденная движением деформируемого подводного оползня по наклонному дну

Для валидации предложенной модели трехкомпонентной жидкости рассмотрим задачу образования волны в результате движения подводного оползня по склону. В работе [158] проводилось сравнение расчетов трех математических моделей (SEDFS: sediment, water and free surface, MM2FS slide, water and free surface, MM3: slide, water and air), выполненных при помощи пакета Fluidity [153], с результатом лабораторного эксперимента по движению деформируемого подводного оползня, представленного в работе [154]. Все три модели показали близкие результаты по изменению свободной поверхности под действием оползня, поэтому в дальнейшем приводится сравнение по движению свободной поверхности и оползня только с моделью MM3, которая идейно ближе к представленной в данной работе модели. MM3 представляет собой трехкомпонентную среду, которая описывается уравнениями движения неоднородной среды, уравнениями конвекции для концентраций и линейными формулами для нахождения вязкости и плотности.

На рисунке 3.26 приведена схема области решения и начальное расположение грунта.

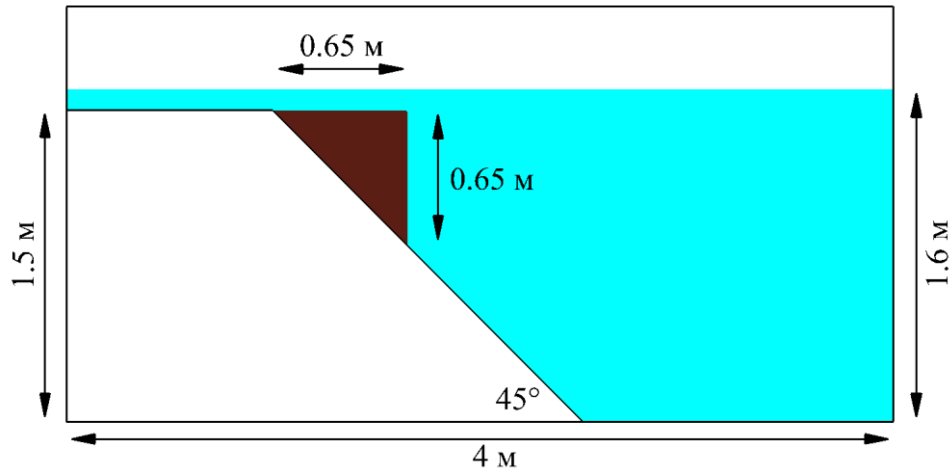


Рисунок 3.26 – Схема области решения и начальное положение компонент

Для компонент среды использовались следующие значения плотностей и вязкостей:

$$\rho_1 = 1.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_2 = 1000.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_3 = 1950.0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \mu_1 = 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_2 = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad \mu_3 = 10.0 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}.$$

Обозначения границ области приведены на рисунке 3.27. Здесь:

Γ_1 – граница свободного вытекания, на которой действует атмосферное давление

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = 101325 \text{ Па}, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_3}{\partial y} \right|_{\Gamma_1} = 0.$$

Γ_2 – твердая граница, на которой выполняется условие прилипания

$$v_1|_{\Gamma_2} = 0, \quad v_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_3}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Γ_3 – твердая граница, на которой возможно условие проскальзывания

$$\left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\tau}} \right|_{\Gamma_3} = \alpha \bar{v}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_3}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_3} = 0.$$

На наклонной стенке Γ_3 ставится условие проскальзывания, которое выражается коэффициентом α , таким, что $0 \leq \alpha \leq 1$. На рисунке 3.28 приведены картины волнообразования для случая, когда на наклонной границе стоит условие

прилипания. На рисунке 3.29 приведены картины волнообразования для случая, когда на наклонной границе трение отсутствует и коэффициент $\alpha = 1$.

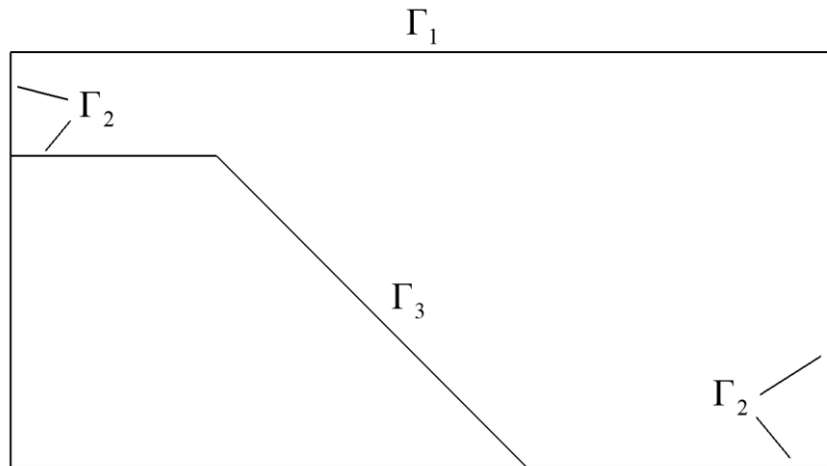


Рисунок 3.27 – Границы области

Масса скользящего со склона грунта генерирует волну в сторону правой стенки, а возле места начала уклона создает волновой заплеск. Сравнение показало, что наибольшее соответствие форме оползня, приведенной в работе [158], в наших расчетах получается при отсутствии трения на наклонной стенке (см. рисунок 3.30).

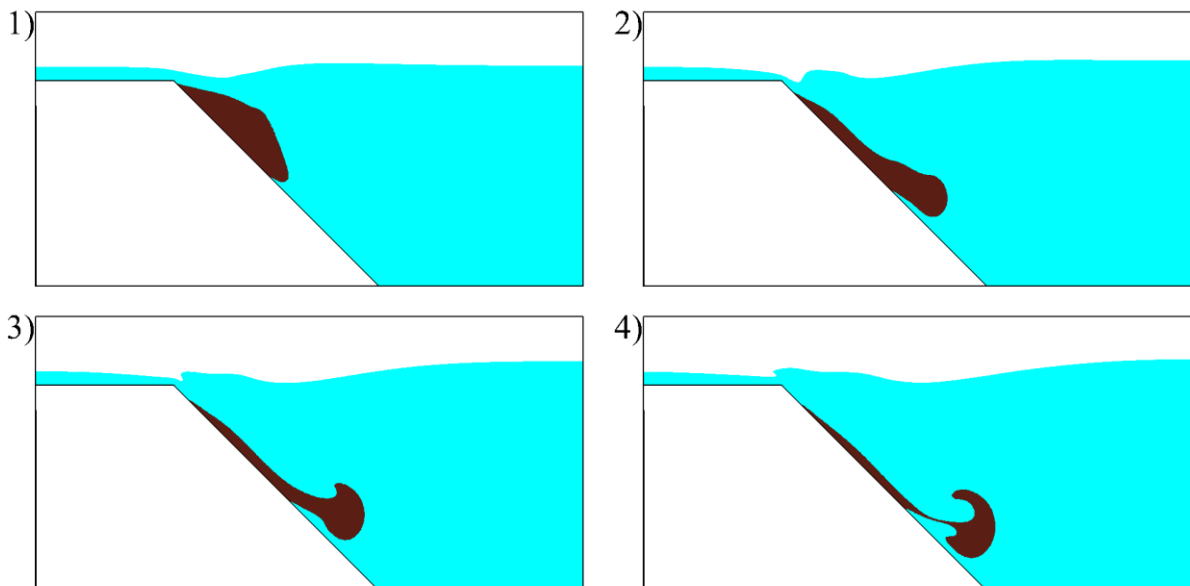


Рисунок 3.28 – Картины движения оползня по наклонной стенке без скольжения на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8, 3) 1.0, 4) 1.2

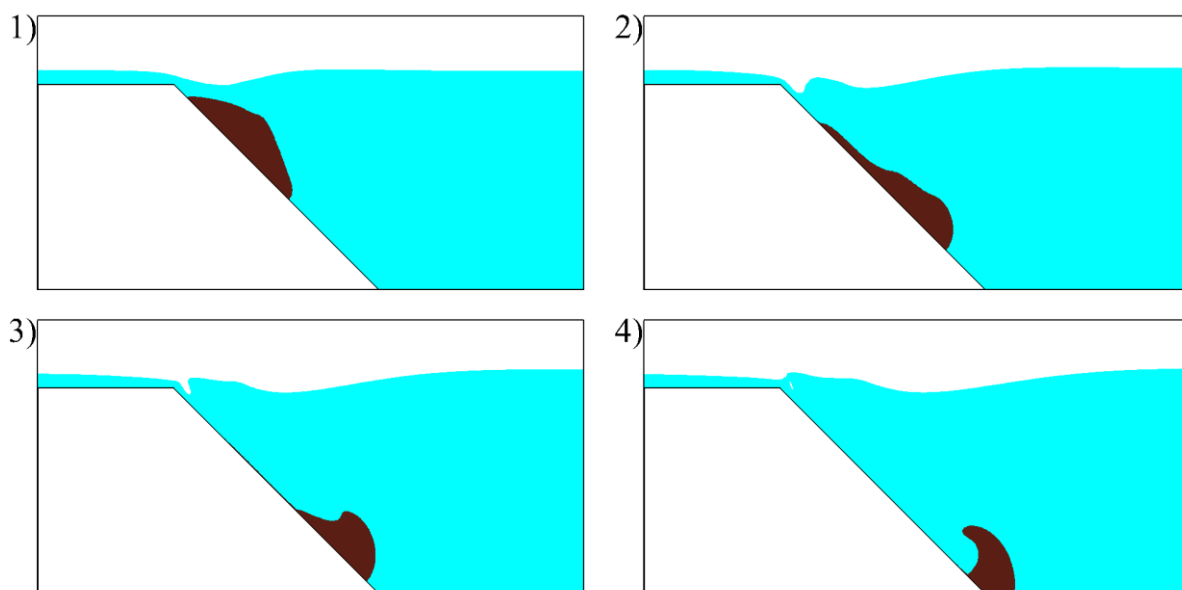


Рисунок 3.29 – Картины движения оползня по наклонной стенке без трения на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8, 3) 1.0, 4) 1.2

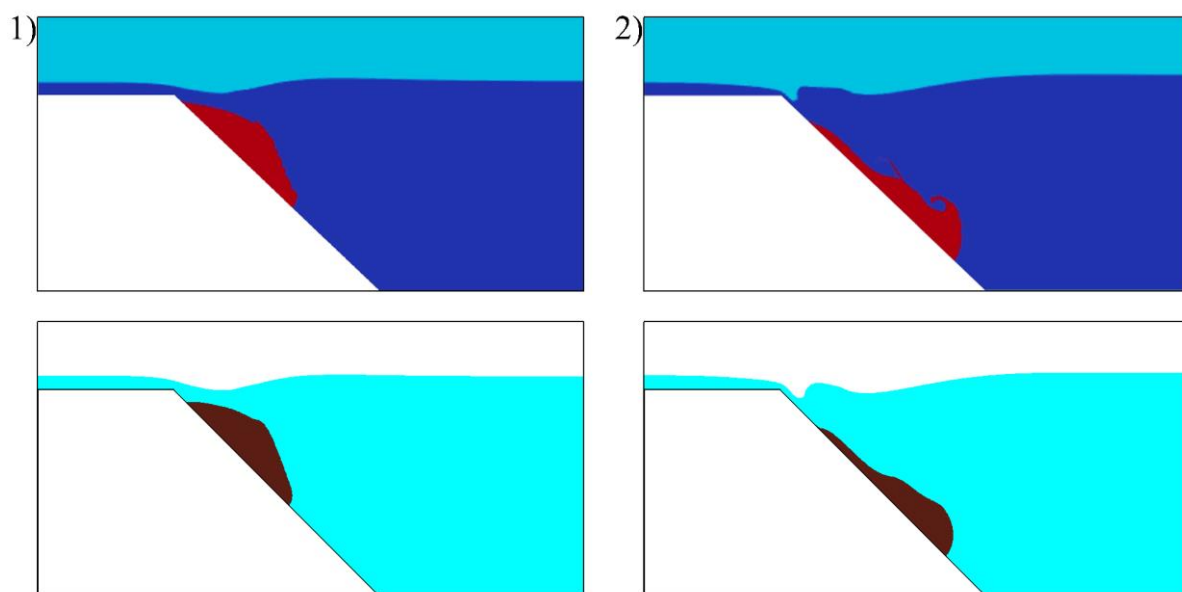


Рисунок 3.30 – Картины движения оползня по наклонной стенке для модели ММЗ (сверху) и представленной модели (снизу) на моменты времени (в секундах):

1) 0.4, 2) 0.8

На рисунке 3.31 изображены графики свободной поверхности на различные моменты времени, полученные в результате наших расчетов по трехкомпонентной

модели, приведенные в работе [158] и полученные из лабораторного эксперимента [154].

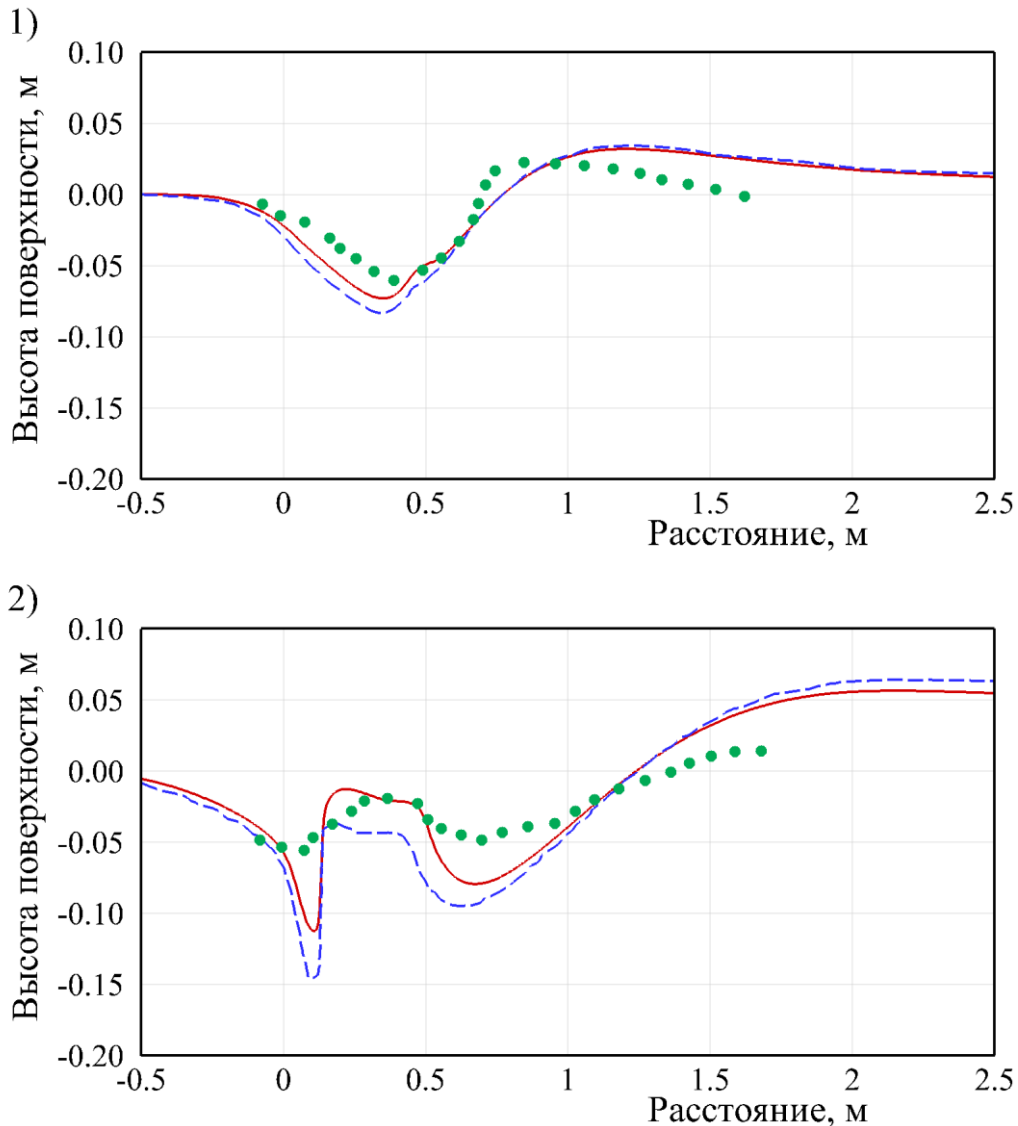


Рисунок 3.31 – Графики поверхностей на моменты времени (в секундах):
 1) 0.4, 2) 0.8. Красная сплошная линия – представленная модель, синяя прерывистая линия – модель ММЗ, зеленые точки – данные эксперимента.

В момент времени 0.4 секунды максимум поверхности воды, полученной трехкомпонентной моделью, количественно совпадает с таковым у моделей из работы [1] и превышает экспериментальные данные. При этом минимум значения поверхности ближе к экспериментальным данным, чем таковой у моделей из работы [1].

В момент времени 0.8 секунды количественные отличия с экспериментом имеются у всех численных результатов. Однако, при этом максимальные и минимальные амплитуды у представленной здесь модели ближе к наблюдаемым в эксперименте, чем у других расчетов.

В работе [1] обсуждаются возможные причины количественных расхождений с данными эксперимента. Одной из причин может быть то, что двухмерная постановка не учитывает трение боковых стенок, которое забирает часть энергии при движении оползня и образовании волны. Еще одна возможная причина — это игнорирование моделями мелкомасштабных эффектов, которые могут присутствовать в лабораторном эксперименте. Например, поверхностное натяжение.

Таким образом, представленная модель может быть использована для задач образования и распространения поверхностных волн в результате движения подводного оползня по наклонному дну.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получена математическая модель размыва и переноса связного грунта в воде под действием внутреннего течения и поверхностных волн. Модель учитывает диффузионный перенос грунта в воде и включает в себя численную модель размокаемости твердых слоев грунта. Одновременное движение воздуха, воды и связного грунта в воде описывается односкоростной моделью трехкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости с переменными плотностью и вязкостью, и наличием диффузии массы между компонентами. В представленной модели одна компонента моделирует поведение воздуха, вторая – воды и третья – намокшего связного грунта, который ведет себя как тяжелая вязкая жидкость. Размокаемость твердых слоев грунта моделируется при помощи введенного параметра размокания, значение которого соответствует определенной скорости размокания грунта в воде.

В работе проведен вывод математической модели трехкомпонентной жидкости с диффузией массы между компонентами на основании общих законов сохранения сплошной среды. Для полученной системы дифференциальных уравнений модели предложен численный алгоритм решения, проведена верификация численных методов на задачах протекания жидкости в канале постоянной ширины и движения жидкости в каверне с подвижной стенкой.

Модель движения среды дополнена численной моделью размокаемости твердых слоев связного грунта для того, чтобы учитывать переход грунта в жидкое состояние под воздействием воды. Проведена валидация модели переноса и размокаемости связного грунта под действием внутреннего течения на задаче НЕТ (Hole Erosion Test). Представлены результаты расчетов двух- и трехмерных тестовых задач.

В рамках предлагаемой модели рассмотрены задачи со свободной поверхностью и проведена валидация модели на задаче обрушения столба жидкости в лабораторном эксперименте. Построена математическая модель

распространения одиночной волны в гидроволновом лотке «23 ГМПИ» филиала ОАО «31 ГПИСС». Получено хорошее соответствие численных результатов с экспериментальными данными лабораторных исследований.

Представлены результаты расчетов для задач взаимодействия донного связного грунта и поверхностных волн. Проведена валидация математической модели на задаче возникновения волны вследствие движения оползня по наклонному дну.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что предложенная модель может быть использована для решения задач размыва и переноса связного грунта под воздействием различных факторов (внутреннее течение, поверхностные волны, диффузия, размокаемость), а разработанные численные алгоритмы являются эффективным и универсальным средством для их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, Б. В. Обобщенная больцмановская физическая кинетика / Б. В. Алексеев // Теплофизика высоких температур. – 1997. – Т. 35 – № 1 – С. 129–146.
2. Альхименко, А. И. Безопасность морских гидротехнических сооружений / А. И. Альхименко, Н. Д. Беляев, Ю. Н. Фомин – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 288 с.
3. Андреев, В. К. Математические модели механики сплошных сред: Учебное пособие / В. К. Андреев – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015. – 240 с.
4. Антонцев, С. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
5. Афанасьев, К. Е. Моделирование задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами бессеточным методом естественных соседей / К. Е. Афанасьев, Т. С. Рейн // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13 – № 4 – С. 7–23.
6. Афанасьев, К. Е. Численное моделирование работы опытового генератора одиночных поверхностных волн / К. Е. Афанасьев, С. В. Стуколов // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2013. – Т. 3 – № 3 (55) – С. 6–14.
7. Ахметов, Н. С. Общая и неорганическая химия. Учебник для вузов / Н. С. Ахметов – Москва: Высшая школа, Издательский центр «Академия», 2001. – 743 с.
8. Безматерных, А. В. Технология и организация строительства морской ледостойкой гравитационной нефтегазодобывающей платформы [Электронный ресурс] / А. В. Безматерных, Н. С. Мизев, С. В. Калошина // Строительство и архитектура. Опыт и современные технологии. – Пермь, 2016. – Режим доступа: <http://sbornikstf.pstu.ru/council/?n=6&s=301>.
9. Бейзель, С. А. Моделирование поверхностных волн, порождаемых подводным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону / С. А. Бейзель, Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15 – № 3 – С. 39–51.
10. Белевич, М. Ю. Связь уравнений неразрывности и диффузии плотности / М. Ю. Белевич // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2016. – Т. 9 – № 1 – С. 73–82.
11. Беллендир, Е. Н. Местные размывы у платформ для обустройства нефтегазовых месторождений при совместном действии волн и течений / Е. Н.

Беллендир, Б. В. Беляев, М. Е. Миронов // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 2003. – Т. 242 – С. 208–214.

12. Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский – Москва: Наука, 1984. – 520 с.

13. Беляев, Н. Д. Защита оснований ледостойких платформ от размыва [Электронный ресурс] / Н. Д. Беляев // Предотвращение аварий зданий и сооружений. – Магнитогорск, 2009. – Режим доступа: <http://pamag.ru/prensa/razmiv>.

14. Беляев, Н. Д. Моделирование процесса размыва связного и несвязного грунтов вблизи нефтяных платформ гравитационного типа / Н. Д. Беляев, Н. А. Гейдаров, Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, К. С. Иванов, В. В. Лебедев, К. К. Семенов, В. В. Рагулин // Материалы III международной конференции «Устойчивость и процессы управления». – Санкт-Петербург, 2015. – С. 567–568.

15. Боровков, В. С. Размыв речного русла в грунтах, обладающих сцеплением / В. С. Боровков, М. А. Волинов // Вестник МГСУ. – 2013. – № 4 – С. 143–149.

16. Бугров, А. Н. Метод фиктивных областей для уравнений с частными производными эллиптического типа / А. Н. Бугров // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. – 1978. – С. 24–35.

17. Вабищевич, П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики / П. Н. Вабищевич – Москва: МГУ, 1991. – 156 с.

18. Валландер, С. В. Уравнения движения вязкого газа / С. В. Валландер // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 78 – № 1 – С. 25–27.

19. Великанов, М. А. Динамика русловых потоков / М. А. Великанов – Москва: Гостехиздат, 1954. – 323 с.

20. Волков, К. Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости / К. Н. Волков // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6 – № 1 – С. 269–282.

21. ВСН 41.88 Проектирование морских ледостойких стационарных платформ. – Миннефтепром СССР, 1988. – 136 с.

22. ВСН 80-80 Инструкция по проектированию откосных и сквозных оградительных сооружений и специальных подводных стендов. – Минобороны СССР, 1981. – 132 с.

23. ВТР-П-25-80 Руководство по определению допускаемых неразмывающих скоростей водного потока для различных грунтов при расчете каналов. – Минводхоз СССР, 1981. – 58 с.

24. Гаврилов, В. П. Состояние ресурсной базы нефтедобычи в России и перспективы ее наращивания / В. П. Гаврилов, Е. Б. Грунис // Геология нефти и газа. – 2012. – № 5 – С. 30–38.
25. Годунов, С. К. Разностные схемы. Введение в теорию / С. К. Годунов, В. С. Рябенский – Москва: Наука, 1977. – 435 с.
26. ГОСТ 25100-2011 Грунты. Классификация. – 2011. – 63 с.
27. Гусев, О. И. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище / О. И. Гусев, Н. Ю. Шокина, В. А. Кутергин, Г. С. Хахимзянов // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18 – № 5 – С. 74–90.
28. Демарчук, Л. Н. Перспективы освоения нефтегазовых месторождений Арктического шельфа / Л. Н. Демарчук // Молодой ученый. – 2014. – № 19 – С. 292–294.
29. Дэвис, М. Х. Экспериментальные исследования местных размывов дна у основания морских гидротехнических сооружений / М. Х. Дэвис, С. М. Мищенко // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. – 2000. – Т. 23 – С. 140–151.
30. Еремин, Н. А. Ресурсная база нефти и газа арктического шельфа России [Электронный ресурс] / Н. А. Еремин, А. Т. Кондратюк, А. Н. Еремин // Георесурсы. Геоэнергетика. Геополитика. – Москва, 2009. – Режим доступа: <http://oilgasjournal.ru/2009-1/3-rubric/eremin.pdf>.
31. Зайцев, Н. А. Односкоростная модель двухфазных жидкостей для расчета течений из первых принципов / Н. А. Зайцев, Б. В. Критский // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29 – № 2 – С. 91–105.
32. Замарин, Е. А. Транспортирующая способность и допускаемые скорости течения в каналах / Е. А. Замарин – Ленинград: Госстройиздат, 1951. – 84 с.
33. Захаров, Ю. Н. Использование системы уравнений Навье-Стокса с переменной вязкостью и плотностью для моделирования размыва связного грунта и распространения волн на поверхности вязкой несжимаемой жидкости / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, И. С. Нуднер, В. В. Рагулин // Материалы XIII международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование». – Анжеро-Судженск, 2014. – С. 46–51.
34. Захаров, Ю. Н. О моделировании размыва связного грунта и распространения волн на поверхности вязкой несжимаемой жидкости / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, И. С. Нуднер, В. В. Рагулин // Труды XII всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – Санкт-Петербург, 2014. – С. 236–239.

35. Захаров, Ю. Н. Модель движения двухкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, В. В. Рагулин // Тезисы докладов VIII международной конференции, посвященной 115-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева, «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». – Новосибирск, 2015. – С. 113.
36. Захаров, Ю. Н. Моделирование эрозии связного грунта вблизи платформы гравитационного типа / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин // Тезисы докладов X научно-технической конференции «Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии». – Санкт-Петербург, 2016. – С. 88.
37. Захаров, Ю. Н. Модель двухкомпонентной вязкой несжимаемой жидкости в задаче набегания волны на препятствие / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин // Труды XIII всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – Санкт-Петербург, 2016. – С. 146–149.
38. Захаров, Ю. Н. Численное моделирование работы лабораторного волнопродуктора одиночных волн на воде [Электронный ресурс] / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, С. В. Стуколов, В. В. Лебедев, И. С. Нуднер, К. К. Семенов // Материалы третьей международной конференции «Полярная механика». – Владивосток, 2016. – С. 954–964. – Режим доступа: <https://www.dvfu.ru/upload/medialibrary/5bc/PolarMechanics.pdf>.
39. Захаров, Ю. Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ номер 2017610030 «Программный комплекс для численного расчета динамики размыва связного грунта на дне водоема под действием внутреннего течения и диффузии „Cohesive Soil Erosion on the Bottom of Reservoirs“» / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин. – 2017.
40. Захаров, Ю. Н. Математическое моделирование гидравлического лотка для проведения численных экспериментов по накату волн на берег и размыву связного грунта / Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, И. С. Нуднер, М. Е. Яшин // Динамика систем, механизмов и машин. – 2019. – Т. 7 – № 4 – С. 4–9.
41. Зимин, А. И. Моделирование течения двухкомпонентной жидкости с переменной вязкостью / А. И. Зимин // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск, 2013. – С. 138.
42. Зимин, А. И. Об одной модели размыва вязкого грунта [Электронный ресурс] / А. И. Зимин, В. В. Рагулин // Сборник трудов конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование». – Кемерово, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
43. Зимин, А. И. Моделирование течения двухкомпонентной жидкости с переменными гидродинамическими параметрами / А. И. Зимин // Материалы 52-й

международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск, 2014. – С. 134.

44. Зимин, А. И. Модель двухкомпонентной несжимаемой жидкости с переменными вязкостью и плотностью / А. И. Зимин // Тезисы докладов XV всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Тюмень, 2014. – С. 33.

45. Зимин, А. И. Моделирование процесса распространения поверхностных волн / А. И. Зимин // Материалы 53-й международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск, 2015. – С. 219.

46. Зимин, А. И. Об одной модели распространения волн на поверхности вязкой жидкости / А. И. Зимин // Труды X (XLII) Международной научно-практической конференции «Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей». – Кемерово, 2015. – С. 2660–2665.

47. Зимин, А. И. Численное моделирование распространения волн на поверхности вязкой несжимаемой жидкости / А. И. Зимин // Материалы XVI всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск, 2015. – С. 36.

48. Зимин, А. И. Моделирование волны, возникающей вследствие обвала подводного оползня / А. И. Зимин // Материалы XVII всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск, 2016. – С. 40.

49. Зимин, А. И. Численное моделирование размыва отверстия в связном грунте потоком жидкости / А. И. Зимин // Материалы XVIII всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Иркутск, 2017. – С. 35.

50. Зимин, А. И. Численное моделирование взаимодействия нерегулярных поверхностных волн и донного связного грунта / А. И. Зимин // Материалы XIX всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Кемерово, 2018. – С. 22–23.

51. Зимин, А. И. Численное моделирование образования волн в гидроволновом лотке с препятствием / А. И. Зимин // Труды XIV всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – Санкт-Петербург, 2018. – С. 220–223.

52. Зимин, А. И. Использование цифровой модели гидродинамического лотка для исследования заплеска волн на берег / А. И. Зимин, М. Е. Яшин // Фундаментальные и прикладные исследования в физике, химии, математике и

информатике: материалы симпозиума XIV (XLVI) Международной научно-практической конференции «Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей», посвящённой 45-летию Кемеровского государственного университета. – Кемерово: КемГУ, 2019. – С. 45–48.

53. Иламанов, И. А. Добыча углеводородного сырья на российском и арктическом континентальном шельфе и связанные с этим риски / И. А. Иламанов, А. А. Мавляров, А. В. Голдырев, З. С. Султангулова // Международный научно-исследовательский журнал. – 2014. – № 12– 1(31) – С. 57–59.

54. Ильина, С. В. Тенденции развития морских стационарных платформ / С. В. Ильина, И. С. Дробышев // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 8–1 – С. 122–123.

55. Кажикенова, С. Ш. Аппроксимация стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости / С. Ш. Кажикенова // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2010. – № 6 – С. 113–116.

56. Кажихов, А. В. О корректности краевых задач в одной диффузионной модели неоднородной жидкости / А. В. Кажихов, Ш. Смагулов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234 – № 2 – С. 330–332.

57. Клещев, К. А. Основные направления поисков нефти и газа в России / К. А. Клещев // Геология нефти и газа. – 2007. – № 2 – С. 18–23.

58. Климонтович, Ю. Л. Статистическая теория открытых систем / Ю. Л. Климонтович – Москва: ТОО «Янус», 1995. – 534 с.

59. Ковеня, В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики / В. М. Ковеня – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.

60. Козелков, А. С. Моделирование волн цунами космогенного и оползневого происхождения на основе уравнений Навье-Стокса: дис. ... д. физ.-мат. наук: 01.02.05 / Козелков Андрей Сергеевич. – Нижний Новгород-Саров, 2016. – 401 с.

61. Козлов, С. А. Концептуальные основы инженерно-геологических исследований Западно-Арктической шельфовой нефтегазоносной провинции [Электронный ресурс] / С. А. Козлов // Нефтегазовое дело. – Санкт-Петербург, 2006. – Режим доступа: http://www.ogbus.ru/authors/Kozlov/Kozlov_4.pdf.

62. Кравцова, О. С. К вопросу о реологической модели водно-глиняных суспензий / О. С. Кравцова, О. Н. Каныгина // Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры. – 2013. – С. 1100–1106.

63. Куропатенко, В. Ф. Модели механики сплошных сред / В. Ф. Куропатенко – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. – 302 с.

64. Куропатенко, В. Ф. Новые модели механики сплошных сред / В. Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84 – № 1 – С. 74–92.
65. Кучер, Н. А. Краевые задачи механики смесей жидкостей / Н. А. Кучер, Д. А. Прокудин – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2010. – 126 с.
66. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц – Москва: Наука, 1986. – 736 с.
67. Ларионов, Г. А. Гидрофизическая концепция эрозии почв / Г. А. Ларионов, С. Ф. Краснов // Почвоведение. – 1997. – № 5 – С. 616–624.
68. Ларионов, Г. А. Эродирующая и транспортирующая способность мелководных потоков / Г. А. Ларионов, Н. Г. Добровольская, З. П. Кирюхина, С. Ф. Краснов, Л. Ф. Литвин // Эрозия почв и русловые процессы. – 2000. – № 12 – С. 8–28.
69. Линейкин, П. С. Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря / П. С. Линейкин – Ленинград: Гидрометеиздат, 1957. – 139 с.
70. Макаров, К. А. О физическом смысле числа Рейнольдса и других критериев гидродинамического подобия [Электронный ресурс] / К. А. Макаров // Инженерный журнал: наука и инновации. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1185.html>.
71. Маккавеев, Н. И. Эрозионно-аккумулятивные процессы и рельеф русла реки / Н. И. Маккавеев – Москва: МГУ, 1998. – 285 с.
72. Малкин, А. Я. Реология: концепция, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев – Санкт-Петербург: Профессия, 2007. – 560 с.
73. Марчевский, И. К. Анализ эффективности итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений / И. К. Марчевский, В. В. Пузикова // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 4 (4) – С. 37–52.
74. Маслов, А. М. Аппараты для термообработки высоковязких жидкостей / А. М. Маслов – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 208 с.
75. Матвеев, В. Н. Вязкость и структура дисперсных систем / В. Н. Матвеев, Е. А. Кирсанов // Вестник Московского университета. Серия 2: Химия. – 2011. – Т. 52 – № 4 – С. 243–276.
76. Машенко, А. В. Специальные разделы механики грунтов и механики скальных грунтов / А. В. Машенко, А. Б. Пономарев, Е. Н. Сычкина – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 176 с.

77. Милошевич, Х. Об одной модели размыва связного грунта и движения поверхностных волн / Х. Милошевич, Ю. Н. Захаров, Н. Контрец, А. И. Зимин, И. С. Нуднер, В. В. Рагулин // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2015. – Т. 1 – № 2 (62) – С. 35–40.
78. Мирцхулава, Ц. Е. Размыв русел и методика оценки их устойчивости / Ц. Е. Мирцхулава – Москва: Колос, 1967. – 180 с.
79. Мирцхулава, Ц. Е. Основы физики и механики эрозии русел / Ц. Е. Мирцхулава – Ленинград: Гидрометеиздат, 1988. – 303 с.
80. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин – Москва: Наука, 1987. – 464 с.
81. Осадчий, А. Нефть и газ российского шельфа: оценки и прогнозы / А. Осадчий // Наука и жизнь. – 2006. – № 7 – С. 2–7.
82. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар – Москва: Энергоатомиздат, 1984. – 148 с.
83. Путилов, К. А. Курс физики: Механика. Акустика. Молекулярная физика. Термодинамика / К. А. Путилов – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 560 с.
84. Пьянков, С. А. Механика грунтов / С. А. Пьянков, З. К. Азизов – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 103 с.
85. Разработка детерминистических методов расчета внешних нагрузок от действия льда, течения и волнения на сооружения с учетом их взаимодействия с грунтом дна и системами удержания. Отчет по теме №2.7.17/4491412 – Санкт-Петербург: Санкт Петербургский государственный политехнический университет, 1994.
86. Рассказов, Л. Н. Гидротехнические сооружения. Часть 1. Учебник для вузов / Л. Н. Рассказов, В. Г. Орехов, Н. А. Анискин – Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 576 с.
87. Савватеев, А. С. Ускоренный метод определения допускаемых неразмывающих скоростей течения воды для каналов в связных грунтах : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.16 / Савватеев Александр Сергеевич. – Москва, 2000. – 159 с.
88. Седов, Л. И. Механика сплошной среды. Том 1 / Л. И. Седов – Москва: Наука, 1970. – 492 с.
89. Семенов, К. К. Лабораторные и численные исследования профиля волн цунами, распространяющихся по ровному дну / К. К. Семенов, И. С. Нуднер, В. В.

- Лебедев, Ю. Н. Захаров, А. И. Зимин, С. В. Стуколов // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. – 2017. – № 4 – С. 5–15.
90. Сидорчук, А. Ю. Расчет интенсивности эрозии почв и связных грунтов / А. Ю. Сидорчук // *Почвоведение*. – 2001. – № 8 – С. 1001–1008.
91. Слезкин, Н. А. О дифференциальных уравнениях движения газа / Н. А. Слезкин // *Доклады АН СССР*. – 1951. – Т. 77 – № 2 – С. 205–208.
92. СНиП 2.06.03-85 Мелиоративные системы и сооружения. – Москва, 2015. – 146 с.
93. СП 32-102-95 Сооружения мостовых переходов и подтопляемых насыпей. Методы расчета местных размывов. – Трансстрой, 1996. – 79 с.
94. Сунцов, Н. Н. Методы аналогий в аэрогидродинамике / Н. Н. Сунцов – Москва: Гос. изд-во физико-матем. лит-ры, 1958. – 324 с.
95. Суров, В. С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболическим адиабатическим ядром / В. С. Суров // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2008. – Т. 48 – № 6 – С. 1111–1125.
96. Трофимов, В. Т. Грунтоведение / В. Т. Трофимов, В. А. Королев, Е. А. Вознесенский, Г. А. Голодковская, Ю. К. Васильчук, Р. С. Зиангиров – Москва: Наука, 2005. – 1023 с.
97. Френкель, Я. И. К теории вязкости жидких смесей / Я. И. Френкель // *Совещание по вязкости жидкостей и коллоидных растворов*. – 1944. – Т. 2 – С. 30–34.
98. Хакимзянов, Г. С. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Баракнин, Н. Ю. Шокина – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – 394 с.
99. Халфин, И. Ш. Воздействие волн на морские нефтегазопромысловые сооружения / И. Ш. Халфин – Москва: Недра, 1990. – 310 с.
100. Ходаков, Г. С. Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование / Г. С. Ходаков // *Российский химический журнал*. – 2003. – Т. 47 – № 2 – С. 33–44.
101. Циборовский, Я. Основы процессов химической технологии / Я. Циборовский – Ленинград: Химия, 1967. – 720 с.
102. Череповицын, А. Е. Социально-экономический потенциал крупномасштабных проектов освоения нефтегазового шельфа: риски и ожидания

заинтересованных сторон / А. Е. Череповицын // Записки Горного института. – 2015. – Т. 215 – С. 140–149.

103. Чумаков, М. М. Методика моделирования процесса размыва донного грунта в окрестности килей крупных ледяных образований / М. М. Чумаков, Д. А. Онищенко, С. Н. Хахалина // Вести газовой науки. – 2013. – № 3 (14) – С. 125–132.

104. Шокин, Ю. И. Об использовании методов численного моделирования для решения прикладных задач проблемы цунами / Ю. И. Шокин, С. А. Бейзель, З. И. Федотова, Л. Б. Чубаров // Труды Международной конференции «Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании». – Павлодар: ТОО НПФ «ЭКО», 2006. – С. 36–51.

105. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.

106. Abels, H. Diffuse interface models for two-phase flows of viscous incompressible fluids / H. Abels // Lecture Notes, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences. – 2007. – No. 36 – 156 p.

107. Adami, S. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics / S. Adami, X. Y. Hu, N. A. Adams // Journal of computational physics. – 2012. – Vol. 231 – No. 21 – P. 7057–7075.

108. Al-Madhhachi, A. T. Variability in soil erodibility parameters of tigris riverbanks using linear and non-linear models / A. T. Al-Madhhachi // Al-Nahrain Journal for Engineering Sciences. – 2017. – Vol. 20 – No. 4 – P. 959–969.

109. An, S. Numerical modelling of local scour caused by submerged jets / S. An, H. Ku, P. Y. Julien // Maejo International Journal of Science and Technology. – 2015. – Vol. 9 – No. 3 – P. 328–343.

110. Ataie-Ashtiani, B. Impulsive waves caused by subaerial landslides / B. Ataie-Ashtiani, A. Nik-Khah // Environmental Fluid Mechanics. – 2008. – Vol. 8 – No. 3 – P. 263–280.

111. Babchik, D. Experimental investigations of local scour caused by currents and regular waves near drilling barge foundations with cutout in stern / D. Babchik, N. D. Belyaev, V. V. Lebedev, I. S. Nudner, K. K. Semenov, L. G. Shchemelinin // Proceedings of 5th International Conference “Coastlab14”. – Varna, Bulgaria, 2014. – P. 114–124.

112. Belyaev, N. D. Modeling cohesionless and cohesive soils erosion near oil platforms of gravity type / N. D. Belyaev, N. A. Geydarov, K. S. Ivanov, V. V. Lebedev, I. S. Nudner, V. V. Ragulin, Y. N. Zakharov, A. I. Zimin // International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V.I. Zubov (SCP). – St Petersburg, Russia: IEEE, 2015. – P. 5–8.

113. Bonelli, S. On the modelling of piping erosion / S. Bonelli, O. Brivois, R. Borghi, N. Benahmed // *Comptes Rendus Mécanique*. – 2006. – Vol. 334 – No. 8 – P. 555–559.
114. Bonelli, S. On the Modelling of Interface Erosion / S. Bonelli, F. Golay, F. Mercier // *Erosion of Geomaterials*, Chapter 6. – 2012. – P. 187–222.
115. Carstens, T. Seabed scour by currents near platforms / T. Carstens // *Mar. Sci. Commun.* – 1976. – Vol. 2 – No. 1 – P. 69–93.
116. Casson, W. A flow equation for pigment-oil suspensions of printing of the printing ink type / W. Casson // *Rheology of Dispersed Systems*. – 1959. – P. 84–104.
117. Dikio, E. D. Density, dynamic viscosity and derived properties of binary mixtures of methanol, ethanol, n-propanol, and n-butanol with pyridine at $T=(293.15, 303.15, 313.15$ and $323.15)$ K / E. D. Dikio, S. M. Nelana, D. A. Isabirye, E. E. Ebenso // *International Journal of Electrochemical Science*. – 2012. – Vol. 7 – No. 11 – P. 11101–11122.
118. Enet, F. Experimental study of tsunami generation by three-dimensional rigid underwater landslides / F. Enet, S. T. Grilli // *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*. – 2007. – Vol. 133 – No. 6 – P. 442–454.
119. Fell, R. Investigation of internal erosion and piping of soils in embankment dams by the slot erosion test and the hole erosion test / R. Fell, C. Wan // *UNICIV Report No R-412*. – 2002. – P. 3–18.
120. Ghia, U. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method / U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin // *Journal of computational physics*. – 1982. – Vol. 48 – No. 3 – P. 387–411.
121. Gibou, F. A review of level-set methods and some recent applications / F. Gibou, R. Fedkiw, S. Osher // *Journal of computational physics*. – 2018. – Vol. 353 – P. 82–109.
122. Gingold, R. A. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars / R. A. Gingold, J. J. Monaghan // *Monthly notices of the royal astronomical society*. – 1977. – Vol. 181 – No. 3 – P. 375–389.
123. Goel, A. Scour Investigations Behind a Vertical Sluice Gate without Apron / A. Goel // *Pacific Journal of Science and Technology*. – 2010. – No. 11 (2) – P. 59–65.
124. Gummel, E. E. Motion of viscous inhomogeneous incompressible fluid of variable viscosity / E. E. Gummel, H. Milosevic, V. V. Ragulin, Y. N. Zakharov, A. I. Zimin // *Zbornik radova konferencije “Mathematical and Informational Technologies MIT-2013”*. – Beograd, 2014. – P. 267–274.

125. Harlow, F. H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface / F. H. Harlow, J. E. Welch // *The physics of fluids*. – 1965. – Vol. 8 – No. 12 – P. 2182–2189.
126. Heller, V. Composite modelling of subaerial landslide–tsunamis in different water body geometries and novel insight into slide and wave kinematics / V. Heller, M. Bruggemann, J. Spinneken, B. D. Rogers // *Coastal Engineering*. – 2016. – Vol. 109 – P. 20–41.
127. Hirt, C. W. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries / C. W. Hirt, B. D. Nichols // *Journal of computational physics*. – 1981. – Vol. 39 – No. 1 – P. 201–225.
128. Horrillo, J. A simplified 3-D Navier-Stokes numerical model for landslide-tsunami: application to the Gulf of Mexico / J. Horrillo, A. Wood, G. B. Kim, A. Parambath // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. – 2013. – Vol. 118 – No. 12 – P. 6934–6950.
129. Huang, T. Y. Nonlinear wave propagation and run-up generated by subaerial landslides modeled using meshless method / T. Y. Huang, S. C. Hsiao, N. J. Wu // *Computational Mechanics*. – 2014. – Vol. 53 – No. 2 – P. 203–214.
130. Katopodes, N. D. *Free-Surface Flow: Computational Methods* / N. D. Katopodes – Butterworth-Heinemann, 2018. – 914 c.
131. Khanal, A. Comparison of Linear and Nonlinear Models for Cohesive Sediment Detachment: Rill Erosion, Hole Erosion Test, and Streambank Erosion Studies / A. Khanal, K. R. Klavon, G. A. Fox, E. R. Daly // *Journal of hydraulic engineering*. – 2016. – Vol. 142 – No. 9.
132. Lachouette, D. One-dimensional modeling of piping flow erosion / D. Lachouette, F. Golay, S. Bonelli // *Comptes Rendus Mécanique*. – 2008. – Vol. 336 – No. 9 – P. 731–736.
133. Langford, P. S. Modeling of tsunami generated by submarine landslides : PhD Thesis / Langford Phillip Sue. – University of Canterbury, 2007. – 452 p.
134. Lefebvre, G. Erosivity of natural intact structured clay: evaluation / G. Lefebvre, K. Rohan, S. Douville // *Canadian Geotechnical Journal*. – 1985. – Vol. 22 – No. 4 – P. 508–517.
135. Lisle, I. G. Stochastic sediment transport in soil erosion / I. G. Lisle, C. W. Rose, W. L. Hogarth, P. B. Hairsine, G. C. Sander, J. Y. Parlange // *Journal of Hydrology*. – 1998. – Vol. 204 – No. 1–4 – P. 217–230.
136. Liu, P. F. Runup and rundown generated by three-dimensional sliding masses / P. F. Liu, T. R. Wu, F. Raichlen, C. E. Synolakis, J. C. Borrero // *Journal of fluid Mechanics*. – 2005. – Vol. 536 – P. 107–144.

137. Liu, X. Diffusion in Liquids: Equilibrium Molecular Simulations and Predictive Engineering Models / X. Liu – Netherlands: Ipskamp Drukkers, 2013. – 214 p.
138. Lobovsky, L. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break / L. Lobovsky, E. Botia-Vera, F. Castellana, J. Mas-Soler, A. Souto-Iglesias // *Journal of Fluids and Structures*. – 2014. – Vol. 48 – P. 407–434.
139. Lowengrub, J. Quasi-incompressible Cahn–Hilliard fluids and topological transitions / J. Lowengrub, L. Truskinovsky // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1998. – Vol. 454 – No. 1978 – P. 2617–2654.
140. Lucy, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis / L. B. Lucy // *The astronomical journal*. – 1977. – Vol. 82 – P. 1013–1024.
141. Ma, G. A two-layer granular landslide model for tsunami wave generation: theory and computation / G. Ma, J. T. Kirby, T. J. Hsu, F. Shi // *Ocean Modelling*. – 2015. – Vol. 93 – P. 40–55.
142. McKee, S. The MAC method / S. McKee, M. F. Tomé, V. G. Ferreira, J. A. Cuminato, A. Castelo, F. S. Sousa, N. Mangiavacchi // *Computers & Fluids*. – 2008. – Vol. 37 – No. 8 – P. 907–930.
143. Mehnifard, M. Simulation of local scour caused by submerged horizontal jets with Flow-3D numerical model / M. Mehnifard, S. Dalfardi, H. Baghdadi, Z. Seirfar // *Desert*. – 2015. – Vol. 20 – No. 1 – P. 47–55.
144. Mehrotra, A. K. A review of practical calculation methods for the viscosity of liquid hydrocarbons and their mixtures / A. K. Mehrotra, W. D. Monnery, W. Y. Svrcek // *Fluid Phase Equilibria*. – 1996. – Vol. 117 – No. 1–2 – P. 344–355.
145. Mercier, F. Numerical Modelling of Erosion of a Cohesive Soil by a Turbulent Flow : PhD Thesis / Mercier Fabienne. – University of Aix-Marseille, 2014. – 188 p.
146. Miller, G. S. Tsunamis generated by long and thin granular landslides in a large flume / G. S. Miller, W. Andy Take, R. P. Mulligan, S. McDougall // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. – 2017. – Vol. 122 – No. 1 – P. 653–668.
147. Mirjalili, S. Interface-capturing methods for two-phase flows: An overview and recent developments / S. Mirjalili, S. S. Jain, M. Dodd // *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*. – 2017. – P. 117–135.
148. Mohammed, F. Experiments on tsunamis generated by 3D granular landslides / F. Mohammed, H. M. Fritz // *Submarine mass movements and their consequences*. – Springer Netherlands, 2010. – P. 705–718.

149. Monaghan, J. J. Simulating free surface flows with SPH / J. J. Monaghan // *Journal of computational physics*. – 1994. – Vol. 110 – No. 2 – P. 399–406.
150. Nearing, M. A. A probabilistic model of soil detachment by shallow turbulent flow / M. A. Nearing // *Transactions of the ASAE*. – 1991. – Vol. 34 – No. 1 – P. 81–85.
151. Ninomiya, K. A study on suction and scouring of sit-on-bottom type offshore structure / K. Ninomiya, K. Tagaya, Y. Murase // *Proceedings of the Offshore Technology Conference*. – 1972. – No. 1 – P. 869–879.
152. Olsson, E. A conservative level set method for two phase flow / E. Olsson, G. Kreiss // *Journal of computational physics*. – 2005. – Vol. 210 – No. 1 – P. 225–246.
153. Piggott, M. D. A new computational framework for multi-scale ocean modelling based on adapting unstructured meshes / M. D. Piggott, G. J. Gorman, C. C. Pain, P. A. Allison, A. S. Candy, B. T. Martin, M. R. Wells // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. – 2008. – Vol. 56 – No. 8 – P. 1003–1015.
154. Rzadkiewicz, S. A. Numerical simulation of submarine landslides and their hydraulic effects / S. A. Rzadkiewicz, C. Mariotti, P. Heinrich // *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. – 1997. – Vol. 123 – No. 4 – P. 149–157.
155. Shadloo, M. S. Smoothed particle hydrodynamics method for fluid flows, towards industrial applications: Motivations, current state, and challenges / M. S. Shadloo, G. Oger, D. Le Touzé // *Computers & Fluids*. – 2016. – Vol. 136 – P. 11–34.
156. Shao, S. Incompressible SPH simulation of water entry of a free-falling object / S. Shao // *International Journal for numerical methods in fluids*. – 2009. – Vol. 59 – No. 1 – P. 91–115.
157. Sharif, A. R. Model for surface erosion of cohesive soils / A. R. Sharif, J. F. Atkinson // *Journal of hydraulic engineering*. – 2012. – Vol. 138 – No. 7 – P. 581–590.
158. Smith, R. C. Comparing approaches for numerical modelling of tsunami generation by deformable submarine slides / R. C. Smith, J. Hill, G. S. Collins, M. D. Piggott, S. C. Kramer, S. D. Parkinson, C. Wilson // *Ocean Modelling*. – 2016. – Vol. 100 – P. 125–140.
159. Springel, V. Smoothed particle hydrodynamics in astrophysics / V. Springel // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. – 2010. – Vol. 48 – P. 391–430.
160. Sussman, M. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow / M. Sussman, P. Smereka, S. Osher // *Journal of computational physics*. – 1994. – Vol. 114 – No. 1 – P. 146–159.

161. Sussman, M. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3D and axisymmetric incompressible two-phase flows / M. Sussman, E. G. Puckett // *Journal of computational physics*. – 2000. – Vol. 162 – No. 2 – P. 301–337.
162. Tyrrel, H. J. V. *Diffusion in Liquids: A Theoretical and Experimental Study* / H. J. V. Tyrrel, K. R. Harris – United Kingdom: Butterworth-Heinemann, 2013. – 464 p.
163. Van der Vorst, H. A. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of non-symmetric linear systems / H. A. Van der Vorst // *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*. – 1992. – Vol. 13 – No. 2 – P. 631–644.
164. Van Rijn, L. C. *Sediment transport, part I: bed load transport* / L. C. Van Rijn // *Journal of hydraulic engineering*. – 1984. – Vol. 110 – No. 10 – P. 1431–1456.
165. Watts, P. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases / P. Watts, F. Imamura, S. T. Grilli // *Sci. Tsunami Hazards*. – 2000. – Vol. 18 – No. 2 – P. 107–124.
166. Watts, P. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model / P. Watts, S. T. Grilli, J. T. Kirby, G. J. Fryer, D. R. Tappin // *Natural Hazards and Earth System Science*. – 2003. – Vol. 3 – No. 5 – P. 391–402.
167. Wilson, B. N. Development of a fundamentally based detachment model / B. N. Wilson // *Transactions of the ASAE*. – 1993. – Vol. 36 – No. 4 – P. 1105–1114.
168. Yavari-Ramshe, S. Numerical simulation of subaerial and submarine landslide generated tsunami waves — recent advances and future challenges / S. Yavari-Ramshe, B. Ataie-Ashtiani // *Landslides*. – 2016. – Vol. 13 – No. 6 – P. 1325–1368.
169. Yavari-Ramshe, S. *Subaerial Landslide-Generated Waves: Numerical and Laboratory Simulations* / S. Yavari-Ramshe, B. Ataie-Ashtiani // *Workshop on World Landslide Forum*. – Springer, 2017. – P. 51–73.
170. Zakharov, Y. Two-Component Incompressible Fluid Model for Simulating Surface Wave Propagation / Y. Zakharov, A. Zimin, V. Ragulin // *Mathematical Modeling of Technological Processes*. – Almaty, Kazakhstan: Springer International Publishing, 2015. – P. 201–210.
171. Zakharov, Y. Two-Component Incompressible Fluid Model for Simulating Surface Wave Propagation / Y. Zakharov, A. Zimin, V. V. Ragulin // *Abstracts of International Conference «Computational and Informational Technologies in Science, Engineering and Education»*. – Almaty, Kazakhstan, 2015. – P. 178.
172. Zakharov, Y. Two-component incompressible fluid model for simulating the cohesive soil erosion / Y. Zakharov, A. Zimin, I. Nudner, V. Ragulin // *Applied Mechanics and Materials*. – 2015. – Vol. 725 – P. 361–368.

173. Zakharov, Y. N. Numerical simulation of surface waves arising from underwater landslide movement / Y. N. Zakharov, A. I. Zimin // Conference information of “Mathematical and Informational Technologies MIT-2016”. – Vrnjacka Banja, Serbia; Budva, Montenegro, 2016. – P. 59.
174. Zakharov, Y. N. Numerical simulation of surface waves arising from underwater landslide movement / Y. N. Zakharov, A. I. Zimin // Conference Proceedings «Mathematical and Information Technologies MIT-2016». – 2017. – P. 535–546.
175. Zakharov, Y. N. Mathematical modeling of a hydraulic flume for carrying out numerical experiments on coastal waves and erosion of cohesive soil / Y. N. Zakharov, A. I. Zimin, I. S. Nudner, M. E. Yashin // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1441 – No. 1 – P. 012182.
176. Zhmud, B. Viscosity blending equations / B. Zhmud // Lube Magazine. – 2014. – No. 121 – P. 22–27.

СПИСОК ИЛЛЮСТРАТИВНОГО МАТЕРИАЛА

Рисунок 1.1 – Расположение узлов сеточных функций в ячейке разнесенной сетки для двумерного случая.....	42
Рисунок 1.2 – Схема каверны с движущейся верхней крышкой.....	51
Рисунок 1.3 – Картина установившегося течения в каверне для числа Рейнольдса $Re = 100$	53
Рисунок 1.4 – Графики профилей компонент скорости по геометрическому центру каверны: 1) Горизонтальная компонента скорости, 2) Вертикальная компонента скорости. Синей прерывистой и красной сплошной линиями обозначены расчеты, полученные на сетках 50×50 и 200×200 узлов соответственно, зелеными кругами – результаты из работы [120]	53
Рисунок 1.5 – Схема канала, в котором образуется течение Пуазейля	54
Рисунок 1.6 – График профилей горизонтальной компоненты скорости в канале на разные моменты времени: 1) $2 \cdot 10^6$ (синяя линия точка-тире) 2) $4 \cdot 10^6$ (черная прерывистая линия) 3) 10^7 (красная сплошная линия) 4) точное решение (1.3.13) (зеленые круги).....	56
Рисунок 2.1 – Схема канала переменной ширины и расположение примеси в начальный момент времени	60
Рисунок 2.2 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 и твердой стенки Γ_3 для канала с переменной шириной	61
Рисунок 2.3 – Распространение пассивной примеси (вязкость $\mu_1 = 0.01$, плотность $\rho_1 = 1.0$) в канале на моменты времени 5.5, 8.0, 15.0	62
Рисунок 2.4 – Картина течения в канале для пассивной примеси на момент времени 15.0	62
Рисунок 2.5 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0	63

Рисунок 2.6 – Картина течения в канале для примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ на момент времени 500.0	63
Рисунок 2.7 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0	64
Рисунок 2.8 – Картина течения в канале для примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ на момент времени 500.0	64
Рисунок 2.9 – Схема канала с прямоугольным препятствием и расположение примеси в начальный момент времени	65
Рисунок 2.10 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 и твердой стенки Γ_3 для канала с препятствием	65
Рисунок 2.11 – Распространение пассивной примеси в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 180.0, 380.0	66
Рисунок 2.12 – Картина течения в канале с препятствием для пассивной примеси на момент времени 380.0	67
Рисунок 2.13 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0 ..	67
Рисунок 2.14 – Картина течения в канале с препятствием для примеси с вязкостью $\mu_1 = 0.1$ и плотностью $\rho_1 = 10.0$ на момент времени 5000.0	67
Рисунок 2.15 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0	68
Рисунок 2.16 – Картина течения в канале с препятствием для примеси с вязкостью $\mu_1 = 1.0$ и плотностью $\rho_1 = 100.0$ на момент времени 5000.0	68
Рисунок 2.17 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 10.0$ и плотностью $\rho_1 = 3.0$ в канале на моменты времени 5.5, 62.5, 500.0	69
Рисунок 2.18 – Распространение примеси с вязкостью $\mu_1 = 10.0$ и плотностью $\rho_1 = 3.0$ в канале с препятствием на моменты времени 55.0, 2485.0, 5000.0	70

- Рисунок 2.19 – Схема разделения грунта на две части. А – вода, В – размокшая часть грунта (закрашена сплошным цветом), С – неразмокшая часть грунта (заштрихована)72
- Рисунок 2.20 – Схема канала и расположение вещества в начальный момент времени. Твердая часть вещества заштрихована, размокшая обозначена сплошным цветом.....73
- Рисунок 2.21 – Расположение входной границы Γ_1 , выходной границы Γ_2 , твердой стенки Γ_3 и меняющейся по мере размокания границы Γ_4 74
- Рисунок 2.22 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени 5.2, 10.5, 15.8, 26.375
- Рисунок 2.23 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.6$ на моменты безразмерного времени 5.2, 12.6, 27.9, 42.6 ...76
- Рисунок 2.24 – Размокание и распространение примеси в квадратном канале для параметра $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени 5.2, 15.8, 65.8, 136.8 ..76
- Рисунок 2.25 – Начальное расположение примеси в области. Сплошным цветом закрашена неразмокшая твердая часть грунта, прозрачным – размокшая жидкая часть. Стрелки указывают направление течения.....77
- Рисунок 2.26 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени 104.9, 146.9, 230.8, 587.678
- Рисунок 2.27 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.6$ на моменты безразмерного времени 104.9, 146.9, 251.8, 671.579
- Рисунок 2.28 – Размокание и распространение примеси в кубическом канале для параметра $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени 104.9, 146.9, 608.6, 1385.080
- Рисунок 2.29 – Лабораторное оборудование для проведения Hole Erosion Test (HET) в институте IRSTEA, Франция [145]81
- Рисунок 2.30 – Схема области канала с размывающимися боковыми стенками ..82

Рисунок 2.31 – График изменения порогового значения $C^*(t)$ со временем	83
Рисунок 2.32 – Профили горизонтальной компоненты вектора скорости в канале на моменты времени (в секундах): 1) 0, 2) $1.5 \cdot 10^5$, 3) $3 \cdot 10^5$, 4) $4.5 \cdot 10^5$, 5) $6 \cdot 10^5$	84
Рисунок 2.33 – График изменения радиуса канала со временем. Красная сплошная линия – теоретическое решение, выраженное формулой (1.3.15), зеленые точки – численное решение	84
Рисунок 2.34 – Схема области лабораторного теста НЕТ	85
Рисунок 2.35 – Поле горизонтальной компоненты вектора скорости в начальный момент времени для задачи НЕТ	86
Рисунок 2.36 – Поверхность между образцом грунта и водой. Черная пунктирная линия – в начальный момент времени, синяя прерывистая – результат, полученный в работе [145] на момент времени 7 секунд, красная сплошная – результат представленной в данной работе модели на момент времени 7 секунд.....	86
Рисунок 2.37 – Схема области, обозначения границ и начальное положение столба связного грунта.....	88
Рисунок 2.38 – Распространение намокшего связного грунта со значением вязкости $\mu_2 = 0.01$ на моменты безразмерного времени: 1) 0.0, 2) 1.0, 3) 2.6, 4) 4.6	88
Рисунок 2.39 – Распространение намокшего связного грунта со значением вязкости $\mu_2 = 1.0$ на моменты безразмерного времени: 1) 0.0, 2) 1.4, 3) 3.4, 4) 18.8	89
Рисунок 2.40 – Геометрия и обозначение границ области	90
Рисунок 2.41 – Продольный и поперечные срезы, отображающие поле давления, и вектора скорости в начальный момент времени.....	91
Рисунок 2.42 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.9$ на моменты безразмерного времени: 1) 1.6, 2) 4.2.....	91
Рисунок 2.43 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.9$ на момент безразмерного времени 5.6 с двух ракурсов.....	92

Рисунок 2.44 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.1$ на моменты безразмерного времени: 1) 2.8, 2) 38.4.....	92
Рисунок 2.45 – Размыв грунта для параметра намокания $C^* = 0.1$ на момент безразмерного времени 96.0 с двух ракурсов	93
Рисунок 3.1 – Схема лотка, расположение точек измерения высоты волны и датчиков измерения значения давления (см. [138]).....	96
Рисунок 3.2 – Расположение твердой границы Γ_1 и границы свободного вытекания Γ_2	97
Рисунок 3.3 – Картины распространения волны в лабораторном эксперименте (сверху) и в численном расчете (снизу) на моменты времени (в миллисекундах): 1) 0.0, 2) 159.9, 3) 276.6, 4) 373.3, 5) 449.9, 6) 573.3, 7) 862.3, 8) 1023.3, 9) 1166.6	98
Рисунок 3.4 – Картины распространения волны в лабораторном эксперименте (сверху) и в численном расчете (снизу) для двух границ раздела $C_1 = 0.5$ и $C_1 = 0.2$ на моменты времени (в миллисекундах): 1) 862.3, 2) 1023.3, 3) 1166.6	99
Рисунок 3.5 – Графики изменения высоты волны со временем для четырех волномеров $H1-H4$ (синяя штрихпунктирная линия – эксперимент, красная сплошная – двухкомпонентная модель)	100
Рисунок 3.6 – Графики изменения давления на левой стенке для датчиков давления $P2-P4$ (синяя штрихпунктирная линия – эксперимент, красная сплошная – двухкомпонентная модель)	101
Рисунок 3.7 – Геометрия области и расположение волномеров $B1-B4$	104
Рисунок 3.8 – Обозначение границ области.....	105
Рисунок 3.9 – Схема работы волнопродуктора.....	106
Рисунок 3.10 – Схема волнопродуктора	108
Рисунок 3.11 – Графики изменения скорости втекания воздуха в волнопродуктор и давления $P_{кр}$ на крышке волнопродуктора	110
Рисунок 3.12 – Графики показаний четырех волномеров $B1-B4$ во времени. Синяя штрихпунктирная линия – экспериментальные профили волн, красная	

сплошная линия – результаты модели вязкой несжимаемой двухкомпонентной жидкости, зеленая точечная линия – результаты потенциальной модели.....	111
Рисунок 3.13 – Картины течений на моменты безразмерного времени: 1) 5.45, 2) 9.1, 3) 47.7, 4) 61.3, 5) 100.0.....	112
Рисунок 3.14 – Геометрия области и начальное расположение жидкости	113
Рисунок 3.15 – Граничные условия.....	114
Рисунок 3.16 – Картина волновых движений на моменты времени (в секундах): 1) 0.54, 2) 0.8, 3) 1.07, 4) 1.67.....	115
Рисунок 3.17 – Сила гидродинамического давления: 1) на вертикальную границу Γ_2 , 2) на горизонтальную границу Γ_3 . Синяя штрихпунктирная линия – весовое давление $p = \rho gh$	116
Рисунок 3.18 – Геометрия области и расположение компонент для двух вариантов задачи. Белым обозначен воздух, голубым – вода, коричневым – намокший связный грунт	118
Рисунок 3.19 – Картина движения поверхностной волны и донного грунта в случае, когда уровень жидкости ниже препятствия на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0.....	118
Рисунок 3.20 – Картина движения поверхностной волны и донного грунта в случае, когда уровень жидкости выше препятствия на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0.....	119
Рисунок 3.21 – Поверхность грунта на моменты времени (в секундах): 1) 0.5, 2) 1.1, 3) 1.8, 4) 3.0. Красная сплошная линия – для случая, когда уровень жидкости находится ниже препятствия; синяя короткая прерывистая линия – для случая, когда уровень жидкости находится выше препятствия; черной длинной прерывистой линией обозначен первоначальный уровень грунта	120
Рисунок 3.22 – Область решения и начальное расположение компонент. Белым обозначен воздух, голубым – вода, коричневым – намокший связный грунт	121
Рисунок 3.23 – Границы области.....	122

Рисунок 3.24 – Картины волнообразования на моменты времени (в секундах): 1) 0.9, 2) 1.9, 3) 2.7, 4) 5.4.....	123
Рисунок 3.25 – Картины волнообразования на моменты времени (в секундах): 1) 1.2, 2) 2.3, 3) 3.2, 4) 7.0.....	123
Рисунок 3.26 – Схема области решения и начальное положение компонент	125
Рисунок 3.27 – Границы области.....	126
Рисунок 3.28 – Картины движения оползня по наклонной стенке без скольжения на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8, 3) 1.0, 4) 1.2.....	126
Рисунок 3.29 – Картины движения оползня по наклонной стенке без трения на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8, 3) 1.0, 4) 1.2	127
Рисунок 3.30 – Картины движения оползня по наклонной стенке для модели ММЗ (сверху) и представленной модели (снизу) на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8.....	127
Рисунок 3.31 – Графики поверхностей на моменты времени (в секундах): 1) 0.4, 2) 0.8. Красная сплошная линия – представленная модель, синяя прерывистая линия – модель ММЗ, зеленые точки – данные эксперимента.	128