

Конформная инвариантность статистики границы кластеров вихрей во второй теории турбулентности (обратный каскад) – доказательство гипотезы о существовании конформной группы преобразований в обратном каскаде

АВТОРЫ: д.ф.-м.н. Гребенёв В.Н., Вацлавчик М. (Варшавский университет), Оберлак М. (Технический университет Дармштадт)

А.М. Поляковым в 1993 г. (Nucl. Phys. 2 124-128, 1993) была сформулирована гипотеза о существовании структур, инвариантных относительно конформной группы преобразований во второй теории турбулентности. Гипотеза возникла в связи с обнаруженным эффектом конформной инвариантности границ фаз в теории критических фазовых переходов (модель Изинга, А.М. Polyakov, Soviet Physics JETP, 30, 1969) и знаменитой работой (К. Wilson, Phys. Rev. B, 4, 3184-205, 1971) о критических явлениях в фазовых переходах. В модели Изинга о фазовых переходах в спин-упорядоченных ферромагнетиках при возрастании температуры выше критической материал переходит в состояние парамагнетика через образование кластеров новой структуры. Было обнаружено, что границы кластеров парамагнетиков принадлежат классу конформно-инвариантных стохастических кривых и это позволило обнаружить новые свойства богатых количественных соотношений в теории перколяций критических явлений. В связи с этим в работах (Bernard D., Boffetta G. Celani A, Falkovich G, Nature Physics, 2, 2006; Phys. Rev. Lett, 98, 2007; Falkovich G. Russian Math. Surveys, 62, 2007) были проведены численные расчеты с использованием прямого численного моделирования уравнений Навье-Стокса (более 1000 вычислений) с целью получения статистики (функции распределения вероятности). Как результат, было установлено, что изолинии поля нулевой завихренности принадлежат классу SLE (Scramm-Loewner evolution) кривых, следовательно, являются конформно-инвариантными.

Ввиду погрешности численных расчётов, эти результаты не являются строгими и точными, но несомненно представляют интерес как потенциальный объект аналитических исследований. Это исследование было выполнено в работе (Grebenev V.N., Waclawczyk M., Oberlack M. Conformal invariance of the Lungren-Monin-Novikov equations for vorticity fields in 2D turbulence // J. Phys. A: Math.Theor. V. 50(43). 2017). Так же была показана конформная инвариантность вероятностной меры для одноточечной функции плотности распределения вероятности поля завихренности – гипотеза, представленная Г. Фальковичем (Russian Math. Surveys, 62, 2007). Результат нашей работы получен на основе группового анализа уравнений Лангрена-Монина-Новикова, которые являются интегро-дифференциальными уравнениями. Сложность вычисления допускаемой группы преобразований симметрии состояла в том, что не существует универсального алгоритма нахождения оператора симметрии для таких классов уравнений (нами был использован подход, предложенный в монографии Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V. Symmetries of Integro-Differential Equations: with Applications in Mechanics and Plasma Physics, New York:Springer, 2010).

Значимость результата состоит в том, что точно установлено, что изолинии нулевой завихренности лежат в том же классе конформно-инвариантных стохастических кривых SLE, что и границы фаз в теории критических фазовых переходов (теория критической перколяции). Это позволяет перенести полученные соотношения из теории критической перколяции в теорию турбулентности. В частности, вычислить фрактальную (хаусдорфову) размерность изолиний поля нулевой завихренности. Так же это позволяет проводить точные вычисления вероятностей пересечения изолиний нулевой завихренности с различными фигурами (треугольниками, прямоугольниками и т.д.), что важно для приложений. Взятые из теории перколяции утверждения, что плотность вероятности кластера убывает с ростом площади, как S в степени $-96/91$, а с ростом длины изолинии, как P в степени $-8/7$, подтверждаются для турбулентности.

В теории турбулентности впервые получен точный аналитический результат о существовании конформной группы симметрий уравнений Лангрена-Монина-Новикова для одноточечных статистик поля завихренности (статистическая форма уравнений Навье-Стокса для функций плотности распределения вероятностей). Инвариантность корреляционных функций относительно группы растяжений была предложена А.Н. Колмогоровым в инерционном интервале. Вопрос о конформной инвариантности вероятностной меры для функции плотности распределения вероятностей поля завихренности широко обсуждался в литературе (Falkovich G, Russian Math. Surveys, 62, 2007) и нами получен положительный ответ и на эту гипотезу. Конформная инвариантность вероятностной меры для функции плотности распределения вероятностей поля завихренности позволяет, зная распределение вероятностной меры для областей с определенной геометрией, вычислить статистическое распределение поля завихренности для областей с другой геометрией, используя свойства конформных преобразований.

ПУБЛИКАЦИИ:

1. Grebenev V.N., Waławczyk M., Oberlack M. Conformal invariance of the Lungren-Monin-Novikov equations for vorticity fields in 2D turbulence // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2017. - Vol.50. - Iss. 43. - Art.435502.
2. Waławczyk M., Grebenev V.N., Oberlack M. Lie symmetry analysis of the Lundgren-Monin-Novikov equations for multi-point probability density functions of turbulent flow // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. - 2017. - Vol.50. - Iss. 17. - Art.175501.
3. Grebenev V.N., Waławczyk M., Oberlack M. On the conformal invariance of a probability measure of vorticity in 2D turbulence // European Turbulence conference ETC17, 21-24.08.2017.
4. M. Oberlack, V. Grebenev, and M. Waławczyk Statistical Symmetries in turbulence – recent results for 2D flows // International Symposium Topical problems in Nonlinear Wave Physics (NWP-1: Nonlinear Dynamics and Complexity). Proceedings, Moscow - St.-Petersburg, Russia 22 - 28 July 2017, p 51-52.
5. M. Oberlack, V. Grebenev, and M. Waławczyk. Does the conformal group exists in 2D turbulence – the answer on old problem // Colloquia. Euro. Mech. Turbulent Cascades II. 5 – 7 December 2017.
6. M. Oberlack, M. Waławczyk, V. Grebenev, A. Rosteck, V. Avsakisov, N. Staffolani, M. Wilczek, R. Friedrich Statistical Symmetries of the Lungren-Monin-Novikov Equation of Turbulence – Intermittency, Non-Gaussianity and the Conformal Invariance of 2D Turbulence // Book of abstract. Conference 100 Years of Fokker-Planck Equation: Its Impact on Turbulence Modeling and Simulation. Oldenburg, Germany, June 12 - 14, 2017.