

Симметрии и инвариантные решения уравнений физико-химической кинетики

АВТОРЫ: д.ф.-м.н. Григорьев Ю.Н., д.ф.-м.н. Мелешко С.В.

Кинетическое уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial f(t,v)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^v dv_1 K(v-v_1) f(t, v-v_1) f(t, v_1) - f(t, v) \int_0^\infty dv_1 K(v, v_1) f(t, v_1) \quad (1)$$

является распространенной математической моделью процессов коагуляции в различных системах. Оно используется для описания кинетики органических и неорганических систем, таких как бактериальные колонии и океанический планктон, атмосферные аэрозоли, туманы и смоги, минеральные наносреды и протопланетные облака в космосе.

Наряду с уравнением Смолуховского в теории коагуляции рассматриваются эквивалентные подходы, такие как уравнение для Лаплас-преобразования (ЛП) исходного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(p,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \{ a[F^2(p,t) - 2F(p,t)F(0,t)] + b[F'(p,t)F(0) + F'(0)F(p,t) - F(p,t)F'(p,t)] + \\ + c[F'^2(p,t) - 2F'(p,t)F'(0,t)], \quad F(p,t) = \int_0^\infty e^{-pv} f(v,t) \end{aligned} \quad (2)$$

бесконечная система уравнений для степенных моментов его решения,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_0(t)}{dt} = -\frac{a}{2}\mu_0^2 - b\mu_0\mu_1 - \frac{c}{2}\mu_1^2, \quad \frac{d\mu_1(t)}{dt} = 0, \\ \frac{d\mu_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{a}{2} \mu_k \mu_{n-k} + b(k+1)\mu_{k+1}\mu_{n-k} + \frac{c}{2}(k+1)(n+1-k)\mu_{k+1}\mu_{n+1-k} \right], n \geq 2 \end{aligned} \quad (3)$$

а также уравнение для производящей функции степенных моментов (ПФМ) $G(\xi, t) = \sum_0^\infty \xi^n \mu_n$.

До последнего времени оставался открытым вопрос о множестве всех инвариантных решений (полной допустимой группе Ли) уравнений (1)-(3), а также их взаимосвязях и возможности появления «новых» решений для (2), (3). Все эти уравнения носят нелокальный характер, и их полный групповой анализ возможен только на основе оригинального подхода [1].

Для уравнений (1)-(3) и уравнения для ПФМ с ядром коагуляции

$$K(v_1, v_2) = a + b(v_1 + v_2) + cv_1 v_2$$

в работах [2, 3, 6] вычислены полные допустимые алгебры (группы) Ли. Доказан их изоморфизм, а также построены оптимальные системы одномерных подалгебр, получены представления инвариантных решений, фактор-уравнения для них и изучена их совместность с законом сохранения полной массы, указаны операторы, соответствующие известным в явном виде частным решениям.

В работах [4, 5, 7] для системы одномерных уравнений двухтемпературной релаксационной газовой динамики с плоской, цилиндрической и сферической симметрией

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \rho \frac{nv}{x} &= 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1)T \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{nv}{x} \right) &= -\gamma_v \frac{T - T_v}{\tau}, \\ \frac{\partial T_v}{\partial t} + v \frac{\partial T_v}{\partial x} &= \frac{T - T_v}{\tau}, \quad p = \rho RT \end{aligned}$$

впервые вычислены полные допустимые алгебры (группы) Ли, указана их связь с известной алгеброй Ли для обычной системы газовой динамики, построены оптимальные системы одномерных подалгебр, получены соответствующие представления инвариантных решений, фактор-уравнения для них, найдены в явном виде их частные решения, в частности, сохраняющие положительность температур.

Полученные результаты являются вкладом в математическую теорию рассмотренных уравнений и могут быть использованы для трактовки физических результатов, а также для тестирования численных методов.

ПУБЛИКАЦИИ:

1. Ю.Н. Григорьев, В.Ф. Ковалев, С.В. Мелешко. Симметрии нелокальных уравнений. Теория и приложения Новосибирск: Наука. (2018) 436 с. ISBN 978-5-02-038753-9.
2. Григорьев Ю.Н С.В. Мелешко, Аморнрат Суриявичитсерани. Групповые свойства уравнений кинетической теории коагуляции // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 2019. .Т.60. № 2, стр.190-206.
3. Yu.N. Grigoriev, S.V. Meleshko, A. Suriyawichitseranee. Group properties of equations of the kinetic theory of coagulation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2019, V. 60, No 2, pp. 350-364. (Q3)
4. P. Siriwat, Yu.N. Grigoriev and S.V.Meleshko. Invariant solutions of one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics. //Mathematical methods in Applied Sciences. (accepted) (Q2)
5. P. Siriwat, Yu.N. Grigoriev, and S.V. Meleshko One class of invariant solutions of the one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics // AIP Conference Proceedings 2153, 020018 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5125083>
6. Григорьев Ю.Н., С.В. Мелешко, Аморнрат Суриявичитсерани. Анализ групповых свойств уравнения Смолуховского и его следствий // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова, «Математические проблемы механики сплошных сред» 13-17 мая 2019. Новосибирск. Тезисы доклада. С. 74.
7. P. Siriwat, Yu.N. Grigoriev and S.V. Meleshko. Invariant solutions of 1D-system of two-temperature relaxation gas dynamics. // International conference in honor 90th birthday of Sergey K. Godunov "Mathematics and its applications" August 4-10, 2019. Novosibirsk, Russia. Abstracts. P. 299.