

## Аналитические и численные исследования математических свойств модели релаксационной газодинамики

**АВТОРЫ:** д.ф.-м.н. Григорьев Ю.Н., д.ф.-м.н. Мелешко С.В., д.ф.-м.н. Горобчук А.Г., д.ф.-м.н. Ершов И.В., PhD Сириват П.

В последние годы модель релаксационной газодинамики широко используется для описания течений колебательно возбужденного и/или диссоциирующего газа, пузырьковой жидкости и других релаксирующих сред. Это делает необходимым изучение всего спектра ее математических свойств. В работах [1, 2] была рассмотрена классическая задача об одномерных нестационарных течениях колебательно возбужденного газа для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \rho \frac{nv}{x} &= 0, & \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1)T \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{nv}{x} \right) &= -\gamma_v \frac{T - T_v}{\tau}, & (1) \\ \frac{\partial T_v}{\partial t} + v \frac{\partial T_v}{\partial x} &= \frac{T - T_v}{\tau}, & p &= \rho RT. \end{aligned}$$

При условии постоянства времени релаксации  $\tau = const$  вычислены полные допустимые алгебры (группы) Ли, построены оптимальные системы одномерных подалгебр, получены соответствующие представления инвариантных решений, фактор-уравнения для них, найдены в явном виде их частные решения. В [2] найдены законы сохранения в интегральной и дивергентной дифференциальной формах, очевидное обобщение которых на многомерный случай можно использовать для построения консервативных разностных схем. Сравнение с известной алгеброй Ли для системы уравнений идеальной газовой динамики показало, что система (1) при  $\tau = const$  не допускает оператор растяжения независимой переменной времени. Поэтому для нее отсутствуют обобщения автомодельных решений известных в газовой динамике задач с сильными ударными волнами, например, о вдвигаемом в газ поршне или о сильном точечном взрыве, представляющих физический интерес с точки зрения определенных приложений. Однако модель релаксационной газодинамики в подобных задачах ближе к реальным газам, чем система идеальной газовой динамики, так как возникающий за волной релаксационный процесс может значительно повлиять на параметры и структуру течения. В этой связи в [2, 3] было предложено расширение модели (1) путем учета зависимости  $\tau$  от времени, опосредованное через текущие параметры газа. При этом на малых временах  $\tau = \tau_0 + t \frac{d\tau}{dt} \Big|_{t=0}$ , и допустимая системой алгебра для  $n = 1, 2$  принимает вид

$$X_1 = t \partial_t + x \partial_x, \quad X_2 = x \partial_x + u \partial_u + 2T \partial_T + 2T_v \partial_{T_v}, \quad X_3 = \rho \partial_\rho.$$

Включение оператора одновременного растяжения независимых переменных  $X_1$  позволило ввести в рассмотрение класс автомодельных решений с сильными ударными волнами. На этой основе в [2, 3] найдены алгебраические интегралы системы типа Седова и решены задачи о «взрывающейся проволочке» [2] и сильном точечном взрыве [3], показавшие, что модифицированная система дает физически непротиворечивые решения, правильно воспроизводя известный эффект расхождения статической и колебательной температур за фронтом волны.

Система вязкого теплопроводного релаксирующего газа использована в наших расчетах устойчивости сверхзвукового пограничного слоя (ПС) на пластине. В [4, 5] на основе нового для теории устойчивости класса специальных функций построена асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости ПС колебательно возбужденного газа на пластине. Показано, что теория с удовлетворительной точностью приближает численные расчеты, выполненные в полной постановке, показывающие стабилизирующий эффект колебательного возбуждения. Чтобы более полно учесть свойства реального газа в профилях гидродинамических параметров исследуемого течения, в [6] из полной системы уравнений вязкого теплопроводного релаксирующего газа выведена система уравнений для ПС в приближении Прандтля, для которой разработана разностная схема типа Кранка-Николсон, а также получена система локально автомодельных уравнений. В [6, 7] проведены сравнительные расчеты течений в ПС в полной и локально автомодельной постановке для ряда характерных условий внешнего потока и теплообмена на границе. для характерных режимов. Показано, что во всех случаях имеет место сходимость локально автомодельных профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям для продольной координаты  $x \geq 8 \div 15$ . При этом предельные значения в пределах 3-5% совпадают с профилями развитого ПС, рассчитанными в полной постановке, что позволяет обоснованно использовать легко рассчитываемые локально автомодельные профили в задачах линейной теории устойчивости.

На основе локально автомодельных профилей для различных аэродинамических ситуаций – «полет в невозмущенной атмосфере», «поток в сверхзвуковой трубе» с использованием  $e^N$  – метода в [8-11] выполнены расчеты положения зоны ламинарно-турбулентного перехода на пластине при  $M = 4.5$  для наиболее неустойчивого возмущения второй моды Мэка. Расчеты показали, что уровень стабилизации по сравнению с совершенным газом того же порядка, как и определенный ранее из расчетов кривых нейтральной устойчивости [4, 5].

Полученные результаты являются новыми, будут вкладом в математическую теорию рассмотренных уравнений и могут быть использованы для трактовки физических явлений и процессов, а также для построения и тестирования численных методов.

## ПУБЛИКАЦИИ:

1. Piyanuch Siriwat, Yurii N. Grigoriev. Sergey V. Meleshko Invariant solutions of one-dimensional equations of two-temperature relaxation gas dynamics // *Math. Meth. Appl. Sci.*43:2444–2457 (2020).
2. Григорьев Ю.Н., Мелешко С.В., Сириват П. Нестационарные одномерные течения колебательно возбужденного газа. // *Прикладная механика и техническая физика*. (Принята в печать).
3. P. Siriwat Yu.N. Grigoriev, S.V. Meleshko. Strong point explosion in vibrationally exciting gas // *International Journal of Non-Linear Mechanics* 128 (2021) 103615.
1. Yu. N Grigoryev, I.V. Ershov. Asymptotic Estimate of Stability of Supersonic Boundary Layer In Vibrationally Excited Gas on a Plate // *Fluid Dynamics*. Vol.54.Iss.8. P.1020 -1037.(2019).
2. Yu. N Grigoryev, I.V. Ershov. To Calculation of a Stationary Boundary Layer under Conditions of Strong Thermochemical Nonequilibrium//*AIP Conference Proceedings*. AIP 2288, 020013 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0028576>
3. Ю. Н. Григорьев, А.Г. Горобчук, И. В. Ершов. Расчеты сверхзвукового пограничного слоя в полной и локально автомодельной постановках // *Вычислительные технологии*. Том 25, № 2, с.50-62 (2020).
4. Ю. Н. Григорьев, А.Г. Горобчук, И. В. Ершов. Сходимость локально автомодельных решений к точным численным решениям уравнений пограничного слоя на пластине // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. (Принята в печать).
5. Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Влияние колебательного возбуждения газа на положение ламинарно-турбулентного перехода на пластине // *Прикладная механика и техническая физика*. (Принята в печать).
6. Yu. N Grigoryev, I.V. Ershov. Influence of vibration excitation on the zone of Laminar-turbulent transition on a plate // *AIP Conference Proceedings*. (Принята в печать)
7. Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Влияние колебательного возбуждения газа на зону ламинарно-турбулентного перехода на пластине // *IX Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. Тезисы докладов*. 7-11 сентября 2020 г., Новосибирск. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2020. С. 78.
8. Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов. Оценка зоны ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое колебательно возбужденного газа на пластине // В книге “МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АЭРОДИНАМИКИ”: Материалы 20-ой Международной школы-семинара, 10–17 сентября 2020 г., Евпатория. Москва: Изд-во ЦАГИ, 2020. С. 42-43.