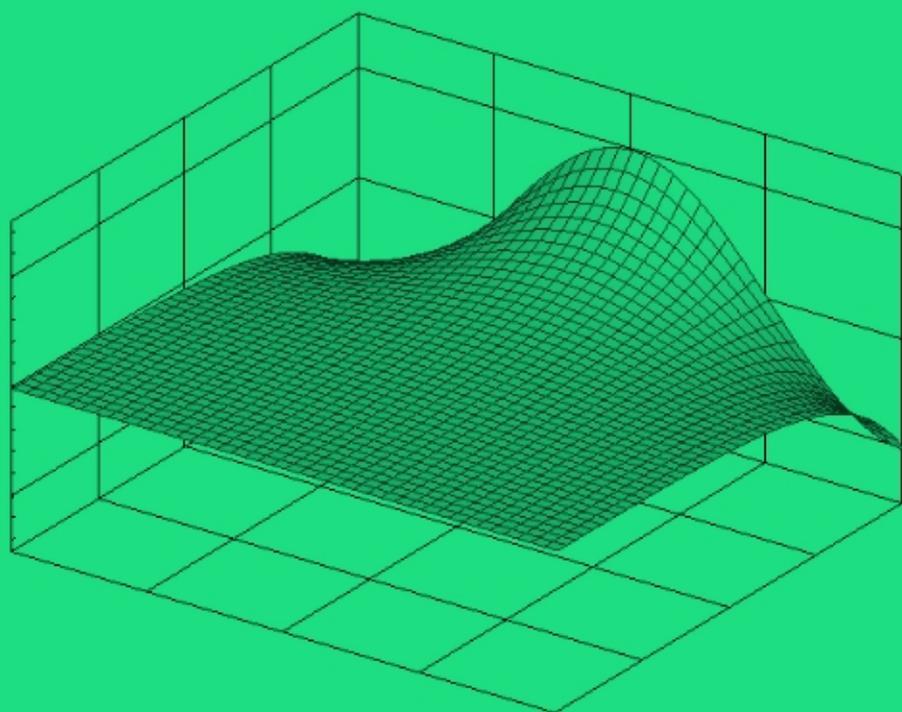


**Г. С. Хакимыянов,
С. Г. Черный**

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Часть 3



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Часть 3. Численные методы решения задач
для уравнений параболического и эллиптического
типов**

Учебное пособие

Новосибирск
2008

ББК В192.162
УДК 518.61+517.949
X 162

Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч.: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. Ч. 3: Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. 160 с.

ISBN 978-5-94356-612-7

Учебное пособие соответствует программе курса лекций «Методы вычислений», который читается на механико-математическом факультете НГУ. В его третьей части излагаются основы численных методов решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа и краевых задач для уравнений эллиптического типа, формулируются задачи для семинарских занятий, приводятся образцы контрольных работ и заданий для практических занятий на ЭВМ.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей математических специальностей высших учебных заведений.

Издание подготовлено в рамках выполнения инновационно-образовательной программы «Инновационные образовательные программы и технологии, реализуемые на принципах партнерства классического университета, науки, бизнеса и государства» национального проекта «Образование».

Рецензент
канд. физ.-мат. наук А. С. Лебедев

© Новосибирский государственный университет, 2008
© Хакимзянов Г. С.,
Черный С. Г., 2008

ISBN 978-5-94356-612-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Задачи

Предисловие	4	
§ 1. Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами	5	34
§ 2. Метод операторных неравенств	37	53
§ 3. Консервативные схемы	55	63
§ 4. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности	67	71
§ 5. Схемы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными	72	90
§ 6. Экономичные разностные схемы	91	106
§ 7. Метод адаптивных сеток.....	108	116
§ 8. Метод конечных элементов	117	124
§ 9. Контрольная работа по теме «Конечно-разностные схемы для уравнения теплопроводности».....	125	
§ 10. Контрольная работа по теме «Исследование разностных схем для уравнения теплопроводности».....	126	
§ 11. Задания для лабораторной работы 4	128	
§ 12. Задания для лабораторной работы 5	133	
Ответы, указания, решения	140	
Библиографический список	160	

Предисловие

В третьей части пособия изложены основы численных методов решения начально-краевых задач для уравнений параболического типа и краевых задач для уравнений эллиптического типа, сформулированы задачи по этой теме для семинарских занятий, приведены задания для практических занятий на ЭВМ и примеры контрольных работ. Эта часть курса осваивается студентами в первой половине шестого семестра.

Теоретические вопросы изложены достаточно кратко. Для более глубокого изучения рассматриваемых вопросов мы рекомендуем обратиться к учебнику С. К. Годунова и В. С. Рябенского [1], а также к книгам Г. И. Марчука [5], А. А. Самарского [9], А. А. Самарского и А. В. Гулина [11], А. А. Самарского и Е. С. Николаева [12] и учебным пособиям, изданным в НГУ [4; 13]. На лекциях рассматриваются теоретические вопросы, связанные только с первой краевой задачей. Задачи с краевыми условиями второго и третьего рода вынесены на семинарские занятия. Кроме того, такие задачи имеются в заданиях лабораторных занятий на ЭВМ.

Каждый параграф сопровождается задачами, которые необходимо решить на семинарских занятиях. Многие задачи снабжены указаниями и подробными решениями. Дополнительные материалы для этих занятий можно найти в задачниках [2; 10].

В пособии приведены примеры практических заданий, даны основные рекомендации по их выполнению. Обсуждаются вопросы, связанные с представлением результатов. Отметим, что приведенные в пособии задания допускают многочисленные варианты их выполнения, что позволит преподавателям сформулировать для каждого студента индивидуальное задание. Дополнительные задания можно взять из методических пособий [3; 7; 17].

Третья часть пособия имеет самостоятельную сквозную нумерацию параграфов, рисунков и таблиц и самостоятельный библиографический список. Внутри параграфов для формул и утверждений (лемм и теорем) использована двухиндексная нумерация, например 3.2. Ссылки на формулы, леммы, теоремы из первой части пособия [15] или второй [16] даются добавлением спереди к их номеру цифры 1 или 2. Например, вместо «по формуле (4.2) из пособия [15]» мы пишем «по формуле (1.4.2)», вместо «по теореме 8.3 из пособия [16]» — «по теореме 2.8.3». Доказательство утверждений завершается знаком «■».

§ 1. Одномерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

1.1. К параболическим уравнениям приводят задачи диффузии (диссипации) тепла, концентрации, импульса, вихря. Например, распространение тепла в стержне, который теплоизолирован на боковой поверхности, но может передавать тепло окружающей среде через свои торцы, описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + \bar{f}, \quad (1.1)$$

где $u(x, t)$ — температура; c — теплоемкость единицы массы; ρ — плотность; k — коэффициент теплопроводности; \bar{f} — плотность тепловых источников (количество тепла, выделяющееся в единицу времени на единице длины).

Если коэффициенты c, ρ, k постоянны, то уравнение (1.1) принимает такой вид:

$$u_t = \nu u_{xx} + f, \quad (1.2)$$

где $\nu = \frac{k}{c\rho} = \text{const} > 0$, $f = \frac{\bar{f}}{c\rho} = f(x, t)$.

1.2. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения (1.2). Она заключается в отыскании непрерывной в замкнутой области $\bar{D} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T\}$ функции $u(x, t)$, которая является решением уравнения (1.2), принимающим при $t \in [0, T]$ заданные значения на концах отрезка $[0, l]$ (краевые условия первого рода) и заданные значения на всем отрезке $[0, l]$ при $t = 0$ (начальное условие):

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, & \quad 0 < t \leq T, & \quad \nu = \text{const} > 0, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(l, t) &= \mu_l(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее всегда будет предполагаться, что начальное и краевые условия задачи (1.3) *согласованы*, т. е. выполняются равенства

$$\mu_0(0) = u_0(0), \quad \mu_l(0) = u_0(l). \quad (1.4)$$

Как и ранее, для компактной записи дифференциальной задачи будем использовать операторное уравнение $Lu = f$, где

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - \nu u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(l, t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad f = \begin{cases} f(x, t), \\ \mu_0(t), \\ \mu_l(t), \\ u_0(x). \end{cases}$$

Для построения разностной схемы введем равномерную сетку на отрезке $[0, l]$:

$$\bar{\omega}_h = \{x_j \mid x_j = jh, \quad j = 0, \dots, N\}, \quad h = l/N;$$

равномерную сетку на отрезке $[0, T]$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t^n \mid t^n = n\tau, \quad n = 0, \dots, M\}, \quad \tau = T/M$$

и сетку на \bar{D} :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_j, t^n) \mid x_j \in \bar{\omega}_h, \quad t^n \in \bar{\omega}_\tau\}.$$

Пусть u_j^n — значение в узле (x_j, t^n) сеточной функции u_h , определенной на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$. Заменяем входящие в дифференциальное уравнение производные следующими разностными отношениями:

$$u_t(x_j, t^n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad u_{xx}(x_j, t^n) \sim u_{\bar{x}x, j}^n \equiv \Lambda u_j^n.$$

Функцию f непрерывных аргументов x и t заменим некоторой сеточной функцией φ

$$f(x_j, t^n) \sim \varphi_j^n.$$

Для численного решения задачи (1.3) будем использовать схему с весами

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n] + \varphi_j^n, \quad n = 0, \dots, M - 1, \\ & \quad j = 1, \dots, N - 1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_N^n &= \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где σ — произвольный вещественный параметр (вес схемы).

Схема (1.5) содержит значения искомой функции u_h на двух соседних слоях по времени и потому называется *двухслойной*. При $\sigma = 0$ схема называется *явной*, поскольку значение u_j^{n+1} на $(n+1)$ -м временном слое находится по явной формуле через значения решения на n -м слое. При $\sigma \neq 0$ получаем *неявную схему*, в которой на $(n+1)$ -м временном слое связаны три неизвестных значения u_{j-1}^{n+1} , u_j^{n+1} и u_{j+1}^{n+1} . Неявная схема при $\sigma = 1$ называется *полностью неявной схемой*. Неявная схема с весом $\sigma = 0,5$ называется *схемой Кранка — Николсона*.

Разностную задачу (1.5) также будем записывать в операторном виде

$$L_h u_h = f_h, \quad (1.6)$$

где

$$L_h u_h = \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n], \\ u_0^n, \\ u_N^n, \\ u_j^n, \end{cases} \quad f_h = \begin{cases} \varphi_j^n, \\ \mu_0(t^n), \\ \mu_l(t^n), \\ u_0(x_j). \end{cases}$$

Все понятия, которыми мы пользовались при изучении разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений, переносятся и на разностные схемы, предназначенные для численного решения уравнений с частными производными. Например, определение погрешности аппроксимации $\psi_h = L_h(u)_h - f_h$ повторяется дословно (см. § 5 работы [15]). Понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой следует подкорректировать с учетом того, что теперь в разностной схеме есть несколько шагов сетки. Пусть F_h — пространство сеточных функций, которому принадлежит правая часть f_h схемы. Будем предполагать, что в этом пространстве введена некоторая норма.

Определение. *Разностная схема $L_h u_h = f_h$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ на ее решении $u(x, t)$, если*

$$\|\psi_h\|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0.$$

Если сверх того имеет место неравенство

$$\|\psi_h\|_{F_h} \leq C(\tau^p + h^s), \quad (1.7)$$

где $C > 0$, $p > 0$ и $s > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от τ и h , то говорят, что схема аппроксимирует с порядком p по τ и s по h .

Пусть U_h — линейное нормированное пространство сеточных функций u_h , определенных на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$. Следующее определение аналогично определению 1 из § 7 работы [15].

Определение. Разностная схема $L_h u_h = f_h$ устойчива, если существуют числа $h_0 > 0$, $\tau_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при любых $h < h_0$, $\tau < \tau_0$ и любом $\varepsilon_h \in F_h$, для которого $\|\varepsilon_h\|_{F_h} < \delta$, разностная задача $L_h z_h = f_h + \varepsilon_h$, полученная из исходной разностной схемы добавлением к правой части возмущения ε_h , имеет единственное решение z_h и

$$\|z_h - u_h\|_{U_h} \leq C \|\varepsilon_h\|_{F_h}, \quad (1.8)$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от h и τ .

Это определение дано для произвольного разностного оператора L_h , в общем случае нелинейного. Если оператор L_h — линейный, то данное определение устойчивости равносильно аналогу определения 2 из § 7 работы [15].

Определение. Разностная схема $L_h u_h = f_h$ с линейным оператором L_h устойчива, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что при любых $h < h_0$, $\tau < \tau_0$ и при любом $f_h \in F_h$ она имеет единственное решение $u_h \in U_h$, причем

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}, \quad (1.9)$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от h и τ .

По теореме сходимости (см. п. 7.3 работы [15]) из аппроксимации и устойчивости следует сходимость схемы с p -м порядком по τ и s -м по h :

$$\|(u)_h - u_h\|_{U_h} \leq C_1 \tau^p + C_2 h^s. \quad (1.10)$$

Таким образом, и для разностных схем, предназначенных для решения уравнений с частными производными, изучение сходимости и порядка точности схемы сводится к исследованию погрешности аппроксимации и устойчивости.

Приведем пример норм в пространствах U_h и F_h . Вначале мы введем норму функции на слое. При каждом фиксированном n сеточную функцию u_h можно рассматривать как элемент u^n линейного пространства функций, определенных на сетке $\bar{\omega}_h$. Норма, введенная в этом пространстве, и называется нормой на временном слое t^n . Например, равномерная норма на слое определяется формулой

$$\|u^n\|_C = \max_j |u_j^n|. \quad (1.11)$$

Тогда равномерную норму сеточных функций из пространств U_h и F_h можно определить так:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \|u^n\|_C; \quad (1.12)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left[\max_n |\mu_0(t^n)|, \max_n |\mu_l(t^n)|, \|(u_0)_h\|_C, \max_n \|\varphi^n\|_C \right], \quad (1.13)$$

где

$$\|(u_0)_h\|_C = \max_j |u_0(x_j)|.$$

1.3. Погрешность аппроксимации. Поскольку в схеме с весами (1.5) начальные и краевые условия аппроксимируются точно, то порядок аппроксимации схемы будет определяться только невязкой уравнений. Пусть $n \geq 0$ и $0 < j < N$. Тогда

$$\psi_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\tau} - \nu \Lambda u_j^{(\sigma)} - \varphi_j^n, \quad (1.14)$$

где u — достаточно гладкое решение задачи (1.3); $u_j^{(\sigma)} \equiv u^{(\sigma)}(x_j)$; $u^{(\sigma)}(x) = \sigma u(x, t^{n+1}) + (1 - \sigma)u(x, t^n)$.

Оценим порядок погрешности аппроксимации в узле (x_j, t^n) . Применив формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t^{n+1}) - u(x_j, t^n)}{\tau} &= u_t(x_j, t^n) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_j, t^n) + O(\tau^2); \\ u^{(\sigma)}(x_j) &= u(x_j, t^n) + \tau \sigma u_t(x_j, t^n) + O(\tau^2); \\ \Lambda u_j^{(\sigma)} &= \frac{u_{j-1}^{(\sigma)} - 2u_j^{(\sigma)} + u_{j+1}^{(\sigma)}}{h^2} = u_{xx}^{(\sigma)}(x_j) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}^{(\sigma)}(x_j) + O(h^4) = \\ &= u_{xx}(x_j, t^n) + \tau \sigma u_{txx}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_j, t^n) + \frac{\tau \sigma h^2}{12} u_{txxxx}(x_j, t^n) + \\ &\quad + O(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

Учитывая, что для решения задачи (1.3) выполняются равенства

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \nu u_{xx}(x, t) + f(x, t); \\ u_{txx}(x, t) &= \nu u_{xxxx}(x, t) + f_{xx}(x, t); \\ u_{tt}(x, t) &= \nu^2 u_{xxxx}(x, t) + \nu f_{xx}(x, t) + f_t(x, t), \end{aligned}$$

перепишем выражение (1.14) для погрешности аппроксимации в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_j^n &= -\tau\nu^2 \left[\sigma - \frac{1}{2} + \frac{h^2}{12\tau\nu} \right] u_{xxxx} - \nu\tau\sigma \frac{h^2}{12} u_{txxxx} + \\ &+ f - \varphi_j^n - \nu\tau \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) f_{xx} + \frac{\tau}{2} f_t + O(\tau^2 + h^4). \end{aligned} \quad (1.15)$$

В этом равенстве функции u и f , а также их производные вычисляются в одной и той же точке (x_j, t^n) . Например, $f = f(x_j, t^n)$.

Из выражения (1.15) следует, что если $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$, то $\psi_j^n = O(\tau + h^2)$.

Для схемы Кранка — Николсон ($\sigma = 0,5$) с правой частью

$$\varphi_j^n = f \left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2} \right)$$

получаем

$$\psi_j^n = -\nu \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - \nu\tau \frac{h^2}{24} u_{txxxx} + f - \left(f + \frac{\tau}{2} f_t \right) + \frac{\tau}{2} f_t + O(\tau^2 + h^4),$$

т. е.

$$\psi_j^n = O(\tau^2 + h^2).$$

И наконец, для схемы с весом

$$\sigma \equiv \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau\nu} \quad (1.16)$$

и правой частью

$$\varphi_j^n = f \left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{h^2}{12} f_{xx} \left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2} \right) \quad (1.17)$$

погрешность аппроксимации вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \psi_j^n &= -\nu\tau\sigma_* \frac{h^2}{12} u_{txxxx} + f - \\ &- \left(f + \frac{\tau}{2} f_t + \frac{h^2}{12} f_{xx} + \frac{\tau h^2}{24} f_{xxt} \right) + \frac{h^2}{12} f_{xx} + \frac{\tau}{2} f_t + O(\tau^2 + h^4) = \\ &= -\nu\tau\sigma_* \frac{h^2}{12} u_{txxxx} - \frac{\tau h^2}{24} f_{xxt} + O(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\tau h^2 \leq \frac{\tau^2 + h^4}{2},$$

приходим к выводу, что $\psi_j^n = O(\tau^2 + h^4)$. Таким образом, при выполнении условий (1.16), (1.17) получается *схема повышенного порядка аппроксимации*.

1.4. Принцип максимума. Познакомимся теперь с некоторыми приемами исследования устойчивости *эволюционных* разностных задач. Начнем изучение этих приемов с метода, основанного на принципе максимума. Этот метод опирается на проверку некоторого неравенства для решения разностной задачи. Получим это неравенство, рассмотрев в качестве примера полностью неявную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^{n+1} + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Пусть сеточная функция u^n на временном слое t^n уже вычислена. Тогда для определения u^{n+1} получим разностную задачу

$$\begin{aligned} r u_{j-1}^{n+1} - (1 + 2r) u_j^{n+1} + r u_{j+1}^{n+1} &= -u_j^n - \tau \varphi_j^n, \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ u_0^{n+1} &= \mu_0(t^{n+1}), \quad u_N^{n+1} = \mu_l(t^{n+1}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $r = \nu\tau/h^2$. Коэффициенты разностного уравнения этой задачи удовлетворяют условиям (2.2.10) леммы 2.2.1, поэтому в силу леммы 2.2.2 задача (1.19) однозначно разрешима. Построим теперь мажоранту для решения u^{n+1} . Для этого рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} r \bar{u}_{j-1} - (1 + 2r) \bar{u}_j + r \bar{u}_{j+1} &= -\|u^n\|_C - \tau \max_n \|\varphi^n\|_C, \\ j &= 1, \dots, N-1, \\ \bar{u}_0 &= \max_n |\mu_0(t^n)|, \quad \bar{u}_N = \max_n |\mu_l(t^n)|. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Эта задача также однозначно разрешима, при этом выполнены все условия леммы 2.2.3 (о мажоранте), поэтому функция \bar{u} является мажорантой для решения u^{n+1} и, следовательно, выполняются неравенства

$$|u_j^{n+1}| \leq \bar{u}_j, \quad j = 0, \dots, N. \quad (1.21)$$

Таким образом,

$$\|v^{n+1}\|_C \leq \max \left\{ \max_n |\mu_0(t^n)|, \max_n |\mu_l(t^n)|, \|(u_0)_h\|_C \right\}. \quad (1.24)$$

Также в силу принципа максимума, для решения второй задачи получим

$$\begin{aligned} \|w^{n+1}\|_C &\leq \|w^n\|_C + \tau \max_n \|\varphi^n\|_C \leq \|w^{n-1}\|_C + 2\tau \max_n \|\varphi^n\|_C \leq \dots \leq \\ &\leq \|w^0\|_C + \tau(n+1) \max_n \|\varphi^n\|_C = \tau(n+1) \max_n \|\varphi^n\|_C \leq T \max_n \|\varphi^n\|_C. \end{aligned}$$

Теперь из оценок, установленных для слагаемых v_h и w_h , получаем оценку для решения u_h исходной задачи:

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_C &= \|v^{n+1} + w^{n+1}\|_C \leq \|v^{n+1}\|_C + \|w^{n+1}\|_C \leq \\ &\leq \max \left\{ \max_n |\mu_0(t^n)|, \max_n |\mu_l(t^n)|, \|(u_0)_h\|_C \right\} + T \max_n \|\varphi^n\|_C \leq \\ &\leq (1+T) \max \left\{ \max_n |\mu_0(t^n)|, \max_n |\mu_l(t^n)|, \|(u_0)_h\|_C, \max_n \|\varphi^n\|_C \right\}. \end{aligned}$$

Согласно определению норм (1.12) и (1.13), отсюда следует неравенство

$$\|u_h\|_{U_h} \leq (1+T) \|f_h\|_{F_h}, \quad (1.25)$$

означающее (в предположении однозначной разрешимости разностной задачи) устойчивость линейной схемы в равномерной сеточной норме с постоянной $C = 1 + T$. ■

Применим принцип максимума для установления устойчивости явной и полностью неявной схем. Вначале рассмотрим явную схему

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Лемма 1.1. *При выполнении условия*

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu} \quad (1.27)$$

явная схема (1.26) устойчива в равномерной норме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что разностная задача (1.26) однозначно разрешима. Перепишем разностное уравнение схемы

$$u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + r(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \tau\varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (1.28)$$

где $r = \nu\tau/h^2$, и учтем условие (1.27), из которого вытекает неравенство $1 - 2r \geq 0$. Тогда будет справедливо следующее неравенство:

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - 2r)\|u^n\|_C + r(\|u^n\|_C + \|u^n\|_C) + \tau \max_n \|\varphi^n\|_C$$

или

$$|u_j^{n+1}| \leq \|u^n\|_C + \tau \max_n \|\varphi^n\|_C, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Кроме того, в граничных узлах

$$|u_0^{n+1}| \leq \max_n |\mu_0(t^n)|; \quad |u_N^{n+1}| \leq \max_n |\mu_l(t^n)|.$$

Полученные оценки свидетельствуют о том, что явная схема удовлетворяет принципу максимума (1.22). Тогда утверждение леммы будет следовать из теоремы 1.1. \blacksquare

Мы показали, что выполнение условия (1.27) является достаточным для устойчивости явной схемы (1.26). Что будет, если это условие не удовлетворяется? Оказывается, что при его нарушении явная схема может стать неустойчивой. Покажем это, рассмотрев задачу

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu\Lambda u_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= \sin\left[\left(1 - \frac{h}{l}\right)\pi j\right], \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где N — четное число.

Решение этой задачи вычисляется по формуле $u_j^n = q^n u_j^0$, где

$$q = 1 - 4r \sin^2\left[\left(1 - \frac{h}{l}\right)\frac{\pi}{2}\right], \quad r = \frac{\nu\tau}{h^2}.$$

Поэтому $\|u^n\|_C = |q|^n \|u^0\|_C$. Очевидно, что $\|u^0\|_C \leq 1$. Но в узле с номером $j_0 = N/2$ начальная функция принимает значение

$$u_{j_0}^0 = \sin\left[\left(1 - \frac{h}{l}\right)\pi j_0\right] = \sin\left[(N-1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm 1.$$

Следовательно, $\|u^0\|_C = 1$ и $\|u^n\|_C = |q|^n$.

Пусть шаги τ и h используемой сетки связаны законом предельного перехода

$$\frac{\nu\tau}{h^2} = r = \text{const}, \quad (1.30)$$

причем

$$r > \frac{1}{2}, \quad (1.31)$$

т. е. условие (1.27) нарушено. Возьмем положительное число $\varepsilon = \frac{r-1/2}{2r}$. Тогда найдется такое число $h_* > 0$, что при всех $h \leq h_*$ будет выполняться неравенство $\sin^2 \left[\left(1 - \frac{h}{l}\right) \frac{\pi}{2} \right] > 1 - \varepsilon$. Отсюда следует оценка

$$q < 1 - 4r(1 - \varepsilon) = -2r < -1.$$

Тогда при использовании равномерных норм (1.12), (1.13) будем иметь равенства

$$\|f_h\|_{F_h} = 1; \quad \|u_h\|_{U_h} = |q|^M = |q|^{T/\tau}.$$

В силу неравенства $|q| > 2r > 1$, получаем неограниченный рост нормы численного решения при $\tau \rightarrow 0$, поэтому для выбранной функции f_h неравенство (1.9) не выполняется ни при какой постоянной C , т. е. схема не может быть устойчивой по определению. Таким образом, условие (1.27) является не только достаточным, но и необходимым для устойчивости рассматриваемой явной схемы (при законе предельного перехода (1.30)). Следовательно, явная схема (1.26) относится к классу *условно устойчивых схем*, которые характеризуются тем, что их устойчивость имеет место не для произвольных шагов $h < h_0$ и $\tau < \tau_0$ (h_0 и τ_0 — числа, фигурирующие в определениях устойчивости), а только при некоторых дополнительных связях между шагами сетки (например, вида (1.27)).

Определение. *Разностная схема называется условно устойчивой, если она устойчива лишь при некоторых дополнительных ограничениях на шаги сетки τ и h .*

Определение. *Разностная схема называется абсолютно устойчивой, если она устойчива при любых шагах h и τ .*

Лемма 1.2. *Полностью неявная схема (1.18) абсолютно устойчива.*

Доказательство. Мы показали, что полностью неявная схема удовлетворяет принципу максимума (1.22) при любых шагах τ и h , поэтому она, согласно теореме 1.1, устойчива в равномерной норме, причем при любых шагах τ и h . ■

1.5. Спектральный метод Неймана. Используя принцип максимума, мы строго обосновали устойчивость явной и полностью неявной схем, исходя из определения устойчивости. На практике это не всегда удается сделать из-за сложности применяемых схем. Поэтому часто используются некоторые практические приемы, позволяющие относительно легко отсеивать неустойчивые схемы. Один из таких приемов носит название *спектрального метода Неймана*. Он применяется для анализа устойчивости линейных разностных схем по начальным данным. В этом методе проверяется некоторое условие, называемое *необходимым спектральным признаком устойчивости*. При нарушении этого условия делается вывод о неустойчивости схемы. Выполнение необходимого условия не гарантирует устойчивости схемы, поэтому для строгого доказательства устойчивости необходимо привлекать другие методы исследования устойчивости.

Применим спектральный признак для исследования устойчивости явной схемы

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + \varphi_j^n, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (1.32)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

аппроксимирующей задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \nu u_{xx} + f, \quad \nu = \text{const} > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Запишем схему (1.32) в операторном виде $L_h u_h = f_h$, где

$$L_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} \\ u_j^0 \end{cases}, \quad f_h \equiv \begin{cases} \varphi_j^n \\ u_0(x_j) \end{cases}.$$

Пусть схема устойчива. Поскольку она линейная, то условие ее устойчивости имеет вид

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h}. \quad (1.33)$$

При использовании сеточных норм (1.12) и (1.13) (вернее, аналогов указанных норм для задачи Коши — задачи без краевых условий) неравенство (1.33) запишется так:

$$\|u^n\|_C \leq C \max \left[\|u^0\|_C, \max_{m=0, \dots, M-1} \|\varphi^m\|_C \right], \quad n = 1, \dots, M.$$

Это условие устойчивости должно, в частности, выполняться и при $\varphi_j^n \equiv 0$, поскольку если схема устойчива, то она устойчива и при нулевой правой части разностных уравнений. Таким образом, решение однородной разностной задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2}, \\ u_j^0 &= u_0(x_j) \end{aligned} \quad (1.34)$$

должно удовлетворять условию

$$\|u^n\|_C \leq C \|u^0\|_C, \quad n = 1, \dots, M \quad (1.35)$$

для произвольной ограниченной сеточной функции u_j^0 . Свойство (1.35) называется *устойчивостью схемы по начальным данным* в равномерной сеточной норме.

Обозначим через R_h оператор перехода от текущего временного слоя к следующему слою по времени

$$u^{n+1} = R_h u^n. \quad (1.36)$$

Этот оператор каждой сеточной функции u_j^n , определенной на слое $t^n = n\tau$, ставит в соответствие сеточную функцию u_j^{n+1} , определенную на слое $t^{n+1} = (n+1)\tau$. Для схемы (1.34) оператор перехода имеет вид

$$R_h u_j^n = r u_{j+1}^n + (1 - 2r) u_j^n + r u_{j-1}^n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.37)$$

где, как и ранее, $r = \nu\tau/h^2$. Отметим, что из уравнения (1.36) следует равенство

$$u^n = R_h^n u^0, \quad n = 1, \dots, M. \quad (1.38)$$

Пусть схема устойчива по начальным данным, т. е. неравенство (1.35) выполняется для любой ограниченной функции u^0 . Тогда из равенства (1.38) с необходимостью вытекает ограниченность норм степеней оператора перехода

$$\|R_h^n\| \leq C, \quad n = 1, \dots, M. \quad (1.39)$$

Известно [14], что спектральный радиус ограниченного оператора не превосходит нормы этого оператора. Неравенство (1.39) свидетельствует о том, что оператор R_h^n ограничен, поэтому для любого числа z из его спектра $\sigma(R_h^n)$ выполняется оценка

$$|z| \leq \|R_h^n\| \leq C. \quad (1.40)$$

Возьмем теперь число λ из спектра оператора R_h . Тогда $\lambda^n \in \sigma(R_h^n)$, поэтому, в силу неравенства (1.40), получим

$$|\lambda|^n \leq C, \quad \forall \lambda \in \sigma(R_h), \quad n = 1, \dots, M. \quad (1.41)$$

Согласно лемме 1.8.1, условие (1.41) выполняется тогда и только тогда, когда

$$|\lambda| \leq 1 + C_1\tau, \quad \forall \lambda \in \sigma(R_h), \quad (1.42)$$

где C_1 — некоторая неотрицательная постоянная, не зависящая от λ и τ .

Условие (1.42) называют *необходимым спектральным признаком устойчивости Неймана*. Оно является необходимым для устойчивости, поскольку получено из предположения, что рассматриваемая схема устойчива. Оно называется спектральным потому, что в этом условии требуется ограниченность спектра оператора перехода R_h . Итак, необходимое условие устойчивости Неймана можно сформулировать так.

Для устойчивости разностной схемы по начальным данным необходимо, чтобы спектр оператора перехода этой схемы лежал в круге радиуса $1 + C_1\tau$ на комплексной плоскости.

Вернемся к схеме (1.34) и посмотрим, какие ограничения на шаги сетки следуют из сформулированного спектрального признака устойчивости. Для этого надо вначале получить спектр оператора R_h , т. е. решить для оператора R_h задачу на собственные значения

$$R_h u_j = \lambda u_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.43)$$

Собственные функции u найдем, рассмотрев характеристическое уравнение [15]

$$r\mu^2 + (1 - 2r - \lambda)\mu + r = 0, \quad (1.44)$$

соответствующее разностному уравнению задачи (1.43)

$$ru_{j+1} + (1 - 2r)u_j + ru_{j-1} = \lambda u_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.45)$$

Отметим, что в этом пункте мы исследуем устойчивость в равномерной норме, следовательно, рассматриваются только ограниченные сеточные функции, поэтому и собственные функции будем искать в классе ограниченных функций.

Возможны три случая.

1. $\lambda < 1 - 4r$ или $\lambda > 1$. В этом случае корни μ_1 и μ_2 характеристического уравнения (1.44) будут вещественными и различными. Тогда общее решение уравнения (1.45) будет определяться (см. лемму 1.8.2) формулой

$$u_j = \alpha \mu_1^j + \beta \mu_2^j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где α и β — некоторые постоянные, не равные одновременно нулю. Поскольку $|\mu_1| > 1$ или $|\mu_2| > 1$, то функция u не может быть ограниченной, поэтому случай действительных различных корней невозможен.

2. $\lambda = 1 - 4r$ или $\lambda = 1$. В этих случаях характеристическое уравнение (1.44) имеет кратные корни, равные соответственно $\mu = -1$ или $\mu = 1$. По лемме 1.8.3 общее решение разностного уравнения (1.45) задается формулой

$$u_j = (\alpha + \beta x_j) \mu^j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Условие ограниченности функции u приводит к требованию $\beta = 0$. Следовательно, в случае кратных корней получаются следующие собственные функции оператора R_h :

$$u_j^{(1)} = \alpha(-1)^j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (1.46)$$

$$u_j^{(2)} = \alpha = \text{const}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.47)$$

Они отвечают собственным значениям

$$\lambda_1 = 1 - 4r; \quad \lambda_2 = 1 \quad (1.48)$$

соответственно.

3. $1 - 4r < \lambda < 1$. Для таких λ корни характеристического уравнения (1.44) являются комплексно-сопряженными числами $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = \bar{\mu}$, при этом $|\mu| = 1$, $\mu = e^{i\varphi}$, $\varphi = \arccos\left(\frac{-1+2r+\lambda}{2r}\right)$, $0 < \varphi < \pi$. По лемме 1.8.4 общее решение уравнения (1.45) задается формулой

$$u_j = \alpha \operatorname{Re} \mu^j + \beta \operatorname{Im} \mu^j = \alpha \cos j\varphi + \beta \sin j\varphi, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.49)$$

Это решение является ограниченным при любых постоянных коэффициентах α и β . Собственные функции (1.49) соответствуют собственным значениям

$$\lambda = \lambda(\varphi) = 1 - 2r + 2r \cos \varphi = 1 - 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (1.50)$$

где $0 < \varphi < \pi$. Отметим, что собственные функции (1.46), (1.47) и собственные значения (1.48) тоже можно описать формулами (1.49), (1.50), если в последних положить $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Итак, мы установили, что ограниченные собственные функции оператора перехода описываются формулой (1.49), а соответствующие им собственные значения задаются формулой (1.50).

Пусть в схеме (1.34) шаги сетки τ и h связаны законом предельного перехода (1.30). Тогда собственные числа $\lambda(\varphi)$ не зависят от τ , и, следовательно, спектральный признак устойчивости (1.42) сводится к требованию

$$|\lambda(\varphi)| \leq 1 \quad (1.51)$$

или

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \leq 1, \quad \forall \varphi \in [0, \pi].$$

Очевидно, что это неравенство эквивалентно условию

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu}. \quad (1.52)$$

Итак, условие (1.52) необходимо для устойчивости явной схемы, аппроксимирующей задачу Коши. Но на практике мы решаем задачи в ограниченной области и потому нас интересует необходимое условие устойчивости разностных схем, предназначенных для решения начально-краевых задач, а не задачи Коши. В предыдущем пункте мы получили необходимое условие устойчивости (1.27) явной схемы, аппроксимирующей начально-краевую задачу. Видим, что полученные условия (1.27) и (1.52) совпали. Всегда ли будут совпадать необходимые условия устойчивости разностной схемы для решения начально-краевой задачи и той же схемы, но для задачи Коши? Для некоторых схем такое совпадение обосновать не трудно, но в общем случае — это не простой вопрос, требующий глубокого исследования (подробнее см. работу [1]). На практике полученный для неограниченной области необходимый признак устойчивости применяют следующим образом. Если для некоторой схемы, аппроксимирующей задачу Коши, признак (1.42) не выполняется, то эта схема признается непригодной и для решения начально-краевой задачи.

Замечание. Необходимое условие устойчивости (1.52) было получено в результате решения задачи на собственные значения для оператора перехода R_h . При этом нам пришлось проделать довольно большую

работу по исследованию корней характеристического уравнения (1.44). Между тем собственные значения (1.50) оператора перехода R_h можно получить проще. Этот простой способ заключается в следующем. В качестве начальной функции в схеме (1.34) берется гармоника

$$u_j^0 = e^{ij\varphi}, \quad j = 0, \pm 1, \dots \quad (1.53)$$

и решение задачи (1.34) ищется в виде

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi}. \quad (1.54)$$

Множитель перехода $\lambda = \lambda(\varphi)$ определяется в результате подстановки выражения (1.54) в однородное разностное уравнение (1.34):

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i(j+1)\varphi} - \lambda^n e^{ij\varphi}}{\tau} = \nu \frac{\lambda^n e^{i(j-1)\varphi} - 2\lambda^n e^{ij\varphi} + \lambda^n e^{i(j+1)\varphi}}{h^2}.$$

Из получающегося отсюда соотношения

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \nu \frac{e^{-i\varphi} - 2 + e^{i\varphi}}{h^2}$$

следует, что множители перехода $\lambda(\varphi)$ вычисляются по той же формуле (1.50), что и собственные значения оператора R_h .

Описанный способ вычисления множителей перехода мы будем неоднократно использовать в дальнейшем при исследовании устойчивости разностных схем с постоянными коэффициентами.

1.6. Устойчивость в среднеквадратичной норме. До сих пор мы рассматривали вопросы устойчивости схем в равномерной норме. Сейчас мы исследуем устойчивость схемы с весами в среднеквадратичной сеточной норме, при этом будет использоваться представление решения в виде конечного ряда Фурье.

Чтобы воспользоваться результатами § 4 из работы [16], перейдем от исходной схемы (1.5) к схеме с однородными краевыми условиями. Для этого используем тот же прием, который применялся для стационарного уравнения теплопроводности в § 8 работы [16], а именно введем сеточную функцию

$$v_j^n = \mu_0(t^n) + \frac{x_j}{l} (\mu_l(t^n) - \mu_0(t^n)) \quad (1.55)$$

и рассмотрим разность $z_j^n = u_j^n - v_j^n$. Легко проверить, что функция z_j^n является решением следующей задачи с однородными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} &= \nu\Lambda[\sigma z_j^{n+1} + (1 - \sigma) z_j^n] + \varphi_j^n - \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau}, \\ z_0^n &= 0, \quad z_N^n = 0, \\ z_j^0 &= u_0(x_j) - v_j^0. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Отметим, что в силу условий согласования (1.4) выполняются равенства $z_0^0 = z_N^0 = 0$. Таким образом, далее вместо схемы (1.5) мы можем исследовать схему с весами с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu\Lambda[\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n] + \varphi_j^n, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \end{aligned} \tag{1.57}$$

в которой

$$u_0^0 = u_N^0 = 0. \tag{1.58}$$

Обозначим через H_h линейное пространство сеточных функций, определенных на одномерной сетке $\bar{\omega}_h$ и принимающих нулевые значения в граничных узлах $x_0 = 0$ и $x_N = l$. При каждом фиксированном значении n сеточные функции $u^n = \{u_j^n\}$ являются элементами пространства H_h . В силу равенств (1.58), начальная функция u^0 также принадлежит пространству H_h .

В пространстве H_h введем среднеквадратичную норму

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \tag{1.59}$$

где

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{N-1} u_j v_j h.$$

Эту норму мы будем использовать для оценки сеточных функций на разных временных слоях, поэтому норму (1.59), как и введенную ранее норму (1.11), назовем *нормой на слое*. Но в отличие от нормы (1.12) теперь норму сеточных функций из пространства U_h введем так:

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_{0 \leq n \leq M} \|u^n\|. \tag{1.60}$$

Исследуем сначала устойчивость схемы с весами (1.57) с нулевой правой частью

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n], \\ u_0^n &= u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Определение. *Схема (1.57) называется устойчивой по начальным данным, если для решения задачи (1.61) верна оценка*

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C_1 \|u^0\|, \quad (1.62)$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Для исследования устойчивости схемы (1.57) по начальным данным найдем решение разностной задачи (1.61) и оценим его в норме (1.60). Как мы знаем, собственные функции $u^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N-1$) оператора Δ второй разностной производной (2.4.2), определенного на множестве сеточных функций H_h , задаются формулой (2.4.5)

$$u_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l}\right), \quad j = 0, \dots, N \quad (1.63)$$

и образуют ортонормированный базис в H_h (см. леммы 2.4.3 и 2.4.4). Начальная функция u^0 принадлежит пространству H_h , поэтому ее можно представить в виде конечного ряда Фурье

$$u^0 = \sum_{k=1}^{N-1} T_{(k)}^0 u^{(k)}. \quad (1.64)$$

Согласно лемме 2.4.4 о разложении сеточных функций пространства H_h величины $T_{(k)}^0$ — это коэффициенты Фурье разложения функции u^0 в конечный ряд Фурье по базису $u^{(k)}$, т. е.

$$T_{(k)}^0 = \left(u^0, u^{(k)}\right).$$

На каждом временном слое решение задачи (1.61) принадлежит пространству H_h , поэтому функцию u^n также можно представить в виде конечного ряда Фурье

$$u^n = \sum_{k=1}^{N-1} T_{(k)}^n u^{(k)} \quad (1.65)$$

с неизвестными коэффициентами $T_{(k)}^n$. Для их определения подставим разложение (1.65) в разностное уравнение схемы (1.61):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{T_{(k)}^{n+1} - T_{(k)}^n}{\tau} + \nu\sigma\lambda_k T_{(k)}^{n+1} + \nu(1-\sigma)\lambda_k T_{(k)}^n \right] u^{(k)} = 0,$$

где λ_k — собственные значения оператора $\overset{\circ}{A}$, соответствующие собственным функциям $u^{(k)}$

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2l} \right), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (1.66)$$

В силу линейной независимости функций $u^{(k)}$, выражение в квадратных скобках равно нулю и, следовательно,

$$T_{(k)}^n = q_k T_{(k)}^{n-1} = \dots = q_k^n T_{(k)}^0,$$

где

$$q_k = \frac{1 - (1-\sigma)\tau\nu\lambda_k}{1 + \sigma\tau\nu\lambda_k}. \quad (1.67)$$

Итак, функция (1.65) удовлетворяет разностному уравнению, начальному условию и однородным краевым условиям и, следовательно, является решением рассматриваемой разностной задачи (1.61).

Лемма 1.3. *Для схемы с весами (1.57) выполнение условия*

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau\nu} \equiv \sigma_0 \quad (1.68)$$

достаточно для ее устойчивости по начальным данным.

Доказательство. Покажем, что при условии (1.68) справедливо неравенство

$$|q_k| < 1. \quad (1.69)$$

В самом деле, используя выражение (1.67) для q_k , получаем

$$q_k = 1 - \frac{\tau\nu\lambda_k}{1 + \sigma\tau\nu\lambda_k}. \quad (1.70)$$

Учитывая условие (1.68) и оценку собственных значений оператора $\overset{\circ}{A}$ (см. лемму 2.4.1)

$$\frac{8}{l^2} \leq \lambda_k < \frac{4}{h^2}, \quad (1.71)$$

приходим к неравенствам

$$1 + \sigma\tau\nu\lambda_k \geq 1 + \frac{\tau\nu\lambda_k}{2} - \frac{h^2}{4}\lambda_k > \frac{\tau\nu\lambda_k}{2} > 0.$$

Тогда, во-первых, $q_k < 1$, а во-вторых,

$$\frac{\tau\nu\lambda_k}{1 + \sigma\tau\nu\lambda_k} < 2,$$

т. е. неравенство (1.69) действительно выполняется.

Оценим теперь решение (1.65) схемы (1.61), используя равенство Парсеваля (2.4.22) и доказанное неравенство (1.69):

$$\|u^{n+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \left(T_{(k)}^{n+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \left(q_k T_{(k)}^n\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{N-1} \left(T_{(k)}^n\right)^2 = \|u^n\|^2.$$

Тогда

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| \leq \|u^{n-1}\| \leq \dots \leq \|u^0\| = \|u^0\|,$$

т. е. справедлива оценка

$$\|u^n\| \leq \|u^0\|, \quad n = 1, \dots, M,$$

означающая, согласно определению (1.62), устойчивость разностной схемы по начальным данным с постоянной $C_1 = 1$. ■

Следствие 1. *Выполнение условия*

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu} \tag{1.72}$$

достаточно для устойчивости явной схемы по начальным данным в среднеквадратичной норме.

Доказательство. Для явной схемы $\sigma = 0$, поэтому достаточное условие устойчивости (1.68) схемы с весами принимает вид неравенства (1.72). ■

Следствие 2. *При $\sigma \geq 0,5$ схема с весами абсолютно устойчива по начальным данным. При $\sigma < 0,5$ схема с весами устойчива по начальным данным, если шаг по времени удовлетворяет условию*

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu(1 - 2\sigma)}. \tag{1.73}$$

Доказательство. При $\sigma \geq 0,5$ достаточное условие устойчивости (1.68) выполняется при любых τ и h , т. е. схема абсолютно устойчива. Легко проверить, что для $\sigma < 0,5$ условие (1.68) эквивалентно выполнению неравенства (1.73). ■

Следствие 3. *Схема повышенного порядка аппроксимации устойчива по начальным данным в среднеквадратичной норме.*

Доказательство. Схема повышенного порядка аппроксимации получается при

$$\sigma = \sigma_* \equiv \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau\nu}. \quad (1.74)$$

Поскольку $\sigma_* > \sigma_0$, то схема повышенного порядка аппроксимации устойчива. ■

Теперь применим метод разложения в конечные ряды Фурье для исследования устойчивости схемы с весами (1.57) по правой части. Для этого рассмотрим схему (1.57) с нулевыми начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu\Lambda[\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma)u_j^n] + \varphi_j^n, \\ u_0^n = u_N^n &= 0, \quad u_j^0 = 0, \end{aligned} \quad (1.75)$$

предполагая при этом, что $\varphi^n \in H_h$.

Схему (1.75) можно записать в виде $L_h u_h = f_h$, где сеточная функция f_h имеет такой же вид, как функция $\theta_h \in F_h$ из формулы (1.23). В пространстве F_h правых частей необходимо ввести норму. В отличие от равномерной нормы (1.13), теперь будем использовать следующую:

$$\|f_h\|_{F_h} = \max_n \|\varphi^n\|. \quad (1.76)$$

Определение. *Схема (1.57) называется устойчивой по правой части, если для решения задачи (1.75) верна оценка*

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C_2 \max_n \|\varphi^n\|, \quad (1.77)$$

где C_2 — положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Найдем решение разностной задачи (1.75) и оценим его. Решение будем искать в виде конечного ряда Фурье (1.65). Правую часть φ^n также разложим по базису $\{u^{(k)}\}$:

$$\varphi^n = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^n u^{(k)}.$$

Подставим эти разложения в схему (1.75):

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{T_{(k)}^{n+1} - T_{(k)}^n}{\tau} + \nu\sigma\lambda_k T_{(k)}^{n+1} + \nu(1-\sigma)\lambda_k T_{(k)}^n - \varphi_k^n \right] u^{(k)} = 0.$$

В силу линейной независимости функций $u^{(k)}$, выражение в квадратных скобках равно нулю и, следовательно,

$$(1 + \nu\sigma\tau\lambda_k) T_{(k)}^{n+1} = [1 - (1-\sigma)\nu\tau\lambda_k] T_{(k)}^n + \tau\varphi_k^n$$

или

$$T_{(k)}^{n+1} = q_k T_{(k)}^n + \frac{\tau\varphi_k^n}{1 + \nu\sigma\tau\lambda_k},$$

где q_k вычисляется по формуле (1.67).

Таким образом,

$$u_j^{n+1} = \sum_{k=1}^{N-1} T_{(k)}^{n+1} u_j^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_{(k)}^n u_j^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^n}{1 + \nu\sigma\tau\lambda_k} u_j^{(k)}. \quad (1.78)$$

Лемма 1.4. *Для схемы с весами (1.75) выполнение условия*

$$\sigma \geq \begin{cases} \sigma_0, & \text{при } \sigma \geq 0, \\ \sigma_\varepsilon \equiv \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau\nu}, & \text{при } \sigma < 0, \end{cases} \quad (1.79)$$

достаточно для ее устойчивости по правой части. Здесь ε — некоторая постоянная, не зависящая от τ и h и удовлетворяющая неравенствам $0 < \varepsilon < 1$.

Доказательство. Оценим решение (1.78), используя неравенство треугольника и равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_{(k)}^n u^{(k)} \right\| + \tau \cdot \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k^n}{1 + \nu\sigma\tau\lambda_k} u^{(k)} \right\| \leq \\ &\leq \max_k |q_k| \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \left(T_{(k)}^n\right)^2} + \max_k \frac{\tau}{|1 + \nu\sigma\tau\lambda_k|} \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_k^n)^2} = \\ &= \max_k |q_k| \cdot \|u^n\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \nu\sigma\tau\lambda_k|} \|\varphi^n\|. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Отметим, что при выполнении условия (1.79) имеет место неравенство $\sigma_\varepsilon > \sigma_0$, поэтому будет верным неравенство (1.69) и схема будет устойчивой по начальным данным.

Если $\sigma \geq 0$, то с учетом (1.71) имеем $1 + \nu\sigma\tau\lambda_k \geq 1$. Следовательно,

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \tau \|\varphi^n\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\| &\leq \|u^n\| + \tau \|\varphi^n\| \leq \|u^{n-1}\| + \tau (\|\varphi^n\| + \|\varphi^{n-1}\|) \leq \dots \\ &\dots \leq \tau \sum_{m=0}^n \|\varphi^m\| \leq \tau(n+1) \max_{0 \leq m \leq n} \|\varphi^m\| \leq T \max_{0 \leq m \leq M-1} \|\varphi^m\|. \end{aligned}$$

Итак, при условиях

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma \geq 0 \tag{1.81}$$

схема будет устойчивой по правой части с постоянной $C_2 = T$.

Пусть теперь $\sigma < 0$ и выполнено условие леммы (1.79), т. е. $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 + \nu\sigma\tau\lambda_k &\geq 1 + \nu\sigma_\varepsilon\tau\lambda_k = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau\nu}\right) \nu\tau\lambda_k > \\ &> 1 - (1-\varepsilon)\frac{h^2}{4}\lambda_k > 1 - (1-\varepsilon)\frac{h^2}{4} \frac{4}{h^2} = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Поэтому из оценки (1.80) следуют неравенства

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + \frac{\tau}{\varepsilon} \|\varphi^n\| \leq \dots \leq \frac{\tau(n+1)}{\varepsilon} \max_{0 \leq m \leq n} \|\varphi^m\| \leq \frac{T}{\varepsilon} \max_n \|\varphi^n\|.$$

Последнее неравенство означает устойчивость схемы по правой части с постоянной $C_2 = T/\varepsilon$. \blacksquare

Следствие. *Схема повышенного порядка аппроксимации устойчива по правой части.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема с весами имеет повышенный порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$ при выполнении условий (1.16), (1.17). Очевидно, что $\sigma_* > \sigma_0$. Кроме того, при

$$\tau \geq \frac{h^2}{6\nu} \tag{1.82}$$

будет выполняться неравенство $\sigma_* \geq 0$, что, согласно лемме 1.4, гарантирует устойчивость схемы повышенного порядка аппроксимации по правой части.

Остается рассмотреть случай, когда неравенство (1.82) нарушается, т. е.

$$\tau < \frac{h^2}{6\nu}. \quad (1.83)$$

В этом случае $\sigma_* < 0$ и надо убедиться в том, что при некотором значении ε выполняется неравенство $\sigma_* \geq \sigma_\varepsilon$. Подходящее значение ε можно найти, например, из равенства $\sigma_\varepsilon = \sigma_*$, т. е.

$$\frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau\nu} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau\nu}.$$

Следовательно, подходит $\varepsilon = 2/3$.

Итак, условие (1.79) леммы 1.4 выполняется при любых соотношениях между шагами τ и h , поэтому схема повышенного порядка аппроксимации будет абсолютно устойчивой по правой части. ■

Исследуем теперь устойчивость в среднеквадратичной норме схемы с весами в общем случае неоднородного разностного уравнения и ненулевых начальных данных

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \nu\Lambda[\sigma u_j^{n+1} + (1-\sigma)u_j^n] &= \varphi_j^n, \\ u_0^n = u_N^n &= 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Определение. *Схема называется устойчивой по начальным данным и по правой части, если для ее решения верна оценка*

$$\|u^n\| \leq C_1 \|u^0\| + C_2 \max_{0 \leq m \leq M-1} \|\varphi^m\|, \quad n = 1, \dots, M, \quad (1.85)$$

где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от h и τ .

Теорема 1.2 (об устойчивости схемы с весами в среднеквадратичной норме). *При выполнении условия (1.79) схема с весами (1.84) устойчива в среднеквадратичной норме по начальным данным и по правой части.*

Доказательство. В силу линейности задачи (1.84) ее решение u_h можно представить в виде суммы $u_h = v_h + w_h$ решения v_h разностной задачи (1.61) с нулевой правой частью и решения w_h задачи

(1.75) с нулевыми начальными условиями. Согласно леммам 1.3 и 1.4, верны оценки

$$\|v^n\| \leq \|u^0\|, \quad n = 1, \dots, M,$$

$$\|w^n\| \leq C_2 \max_{0 \leq m \leq M-1} \|\varphi^m\|, \quad n = 1, \dots, M,$$

где

$$C_2 = \begin{cases} T, & \text{при } \sigma \geq 0, \\ \frac{T}{\varepsilon}, & \text{при } \sigma < 0, \end{cases}$$

из которых следует справедливость неравенства (1.85), означающего устойчивость схемы (1.84) как по правой части, так и по начальным данным. ■

1.7. Метод энергетических неравенств. На примере схемы с весами (1.84) покажем теперь, как можно исследовать устойчивость схем с помощью метода энергетических неравенств.

Вводя обозначение

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau},$$

и используя очевидные равенства

$$u^{n+1} = u^n + \tau u_t, \quad u^n = u^{n+1} - \tau u_t, \quad (1.86)$$

$$u^{n+1} = 0,5(u^{n+1} + u^n) + \frac{\tau}{2} \cdot u_t, \quad u^n = 0,5(u^{n+1} + u^n) - \frac{\tau}{2} \cdot u_t, \quad (1.87)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \sigma u^{n+1} + (1 - \sigma)u^n = \\ & = 0,5\sigma(u^{n+1} + u^n) + 0,5\sigma\tau u_t + 0,5(1 - \sigma)(u^{n+1} + u^n) - 0,5(1 - \sigma)\tau u_t = \\ & = (\sigma - 0,5)\tau u_t + 0,5(u^{n+1} + u^n). \end{aligned}$$

С учетом полученного тождества перепишем разностное уравнение

$$u_t - (\sigma - 0,5)\nu\tau\Lambda u_t - 0,5\nu\Lambda(u^{n+1} + u^n) = \varphi^n \quad (1.88)$$

и умножим его скалярно в H_h на сеточную функцию $2\tau u_t$:

$$\begin{aligned} & 2\tau \|u_t\|^2 - 2(\sigma - 0,5)\tau^2\nu(\Lambda u_t, u_t) - \\ & - \nu(\Lambda(u^{n+1} + u^n), (u^{n+1} - u^n)) = 2\tau(\varphi^n, u_t). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Поскольку $u^n \in H_h$, $u^{n+1} \in H_h$, $u_t \in H_h$, то из первой разностной формулы Грина следуют равенства

$$\begin{aligned} (\Lambda u_t, u_t) &= -\|u_{t\bar{x}}\|^2, \\ (\Lambda (u^{n+1} + u^n), (u^{n+1} - u^n)) &= -(u_{\bar{x}}^{n+1} + u_{\bar{x}}^n, u_{\bar{x}}^{n+1} - u_{\bar{x}}^n) = \\ &= -(u_{\bar{x}}^{n+1}, u_{\bar{x}}^{n+1}) + (u_{\bar{x}}^n, u_{\bar{x}}^n) = -\|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|u_{\bar{x}}^n\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (1.89) принимает такой вид

$$\begin{aligned} 2\tau \left\{ \|u_t\|^2 + (\sigma - 0,5) \tau \nu \|u_{t\bar{x}}\|^2 \right\} + \nu \|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 &= \\ = \nu \|u_{\bar{x}}^n\|^2 + 2\tau (\varphi^n, u_t). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Лемма 1.5. *Условие $\sigma \geq \sigma_0$ является достаточным для устойчивости схемы с весами по начальным данным в энергетической норме*

$$\|u\|_{\overset{\circ}{A}} = \sqrt{(Au, u)} = \|u_{\bar{x}}\|.$$

Доказательство. Обозначим выражение в фигурных скобках равенства (1.90) через

$$J = \|v\|^2 + (\sigma - 0,5) \tau \nu \|v_{\bar{x}}\|^2,$$

где $v = u_t$, и покажем, что $J \geq 0$, если $\sigma \geq \sigma_0$. Действительно,

$$J \geq \|v\|^2 + (\sigma_0 - 0,5) \tau \nu \|v_{\bar{x}}\|^2 = \|v\|^2 - \frac{h^2}{4} \|v_{\bar{x}}\|^2.$$

Воспользовавшись теперь полученной ранее оценкой (2.4.25)

$$\|v_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|v\|^2, \quad v \in H_h, \quad (1.91)$$

будем иметь

$$J \geq \|v\|^2 - \frac{h^2}{4} \cdot \frac{4}{h^2} \|v\|^2 = 0.$$

Из равенства (1.90) при учете оценки $J \geq 0$ следует неравенство

$$\nu \|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 \leq \nu \|u_{\bar{x}}^n\|^2 + 2\tau (\varphi^n, u_t), \quad (1.92)$$

называемое *энергетическим*. Если $\varphi^n \equiv 0$, то из него вытекают следующие неравенства:

$$\|u_{\bar{x}}^{n+1}\| \leq \|u_{\bar{x}}^n\| \leq \dots \leq \|u_{\bar{x}}^0\|,$$

или

$$\|u^n\|_A \leq \|u^0\|_A, \quad n = 1, \dots, M, \quad (1.93)$$

что и означает устойчивость схемы по начальным данным в энергетической норме $\|u\|_A$. ■

Лемма 1.6. *Выполнение условия*

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon \equiv \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau\nu}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (1.94)$$

достаточно для устойчивости схемы (1.84) по правой части в равномерной сеточной норме.

Доказательство. Покажем, что при $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$

$$J \geq \varepsilon \|v\|^2, \quad (1.95)$$

где $v = u_t$. Имеем

$$\begin{aligned} J &= \|v\|^2 + (\sigma - 0,5)\tau\nu\|v_{\bar{x}}\|^2 \geq \|v\|^2 + (\sigma_\varepsilon - 0,5)\tau\nu\|v_{\bar{x}}\|^2 = \\ &= \|v\|^2 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4}\|v_{\bar{x}}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство (1.95), если учесть оценку (1.91).

Используя тождество (1.90) и неравенство (1.95), получаем

$$2\tau\varepsilon\|u_t\|^2 + \nu\|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 \leq \nu\|u_{\bar{x}}^n\|^2 + 2\tau(\varphi^n, u_t). \quad (1.96)$$

Для оценки последнего слагаемого в правой части этого неравенства воспользуемся ε -неравенством и неравенством Коши — Буняковского:

$$2\tau(\varphi^n, u_t) \leq 2\tau\|\varphi^n\| \cdot \|u_t\| \leq 2\tau\varepsilon\|u_t\|^2 + \frac{2\tau}{4\varepsilon}\|\varphi^n\|^2.$$

Тогда из энергетического неравенства (1.96) следует

$$\begin{aligned} \|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 &\leq \|u_{\bar{x}}^n\|^2 + \frac{\tau}{2\nu\varepsilon}\|\varphi^n\|^2 \leq \\ &\leq \|u_{\bar{x}}^{n-1}\|^2 + \frac{\tau}{2\nu\varepsilon}\left(\|\varphi^{n-1}\|^2 + \|\varphi^n\|^2\right) \leq \dots \leq \|u_{\bar{x}}^0\|^2 + \frac{\tau}{2\nu\varepsilon}\sum_{m=0}^n\|\varphi^m\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $u^0 = 0$, то получаем оценку

$$\|u_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 \leq \frac{\tau(n+1)}{2\nu\varepsilon} \cdot \max_{0 \leq m \leq n} \|\varphi^m\|^2 \leq \frac{T}{2\nu\varepsilon} \left(\max_{0 \leq m \leq n} \|\varphi^m\| \right)^2$$

или

$$\|u_{\bar{x}}^{n+1}\| \leq C \max_{0 \leq m \leq M-1} \|\varphi^m\|,$$

где

$$C = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2\nu\varepsilon}}, \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon.$$

Воспользовавшись неравенством (2.3.17) $\|u\|_C \leq 0,5\sqrt{l}\|u_{\bar{x}}\|$ из теоремы вложения 2.3.1 и неравенством (2.3.2) $\|\varphi^m\| \leq \sqrt{l}\|\varphi^m\|_C$, получим оценку в равномерной норме

$$\|u^{n+1}\|_C \leq C_1 \max_{0 \leq m \leq M-1} \|\varphi^m\|_C, \quad (1.97)$$

где $C_1 = lC/2$. ■

Теорема 1.3 (о равномерной сходимости схемы с весами). *При $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ схема с весами (1.5) равномерно сходится.*

Доказательство. Поскольку краевые условия и начальные данные в схеме с весами аппроксимируются точно, то погрешность решения $z_h = (u)_h - u_h$ является решением следующей задачи с однородными краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} - \nu\Lambda[\sigma z_j^{n+1} + (1-\sigma)z_j^n] &= \psi_j^n, \\ z_0^n = z_N^n &= 0, \quad z_j^0 = 0, \end{aligned} \quad (1.98)$$

где ψ_j^n — погрешность аппроксимации. Для такой задачи из полученной оценки (1.97) будет следовать

$$\|u_h - (u)_h\|_C \leq C_1 \max_{0 \leq n \leq M} \|\psi^n\|_C = C_1 \|\psi_h\|_{F_h}, \quad (1.99)$$

что и означает сходимость схемы в равномерной сеточной норме с соответствующим порядком: $\|u_h - (u)_h\|_C =$

$$= \begin{cases} O(\tau + h^2), & \text{если } \varphi_j^n = f(x_j, t^n); \\ O(\tau^2 + h^2), & \text{если } \sigma = 0,5 \text{ и } \varphi_j^n = f\left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2}\right); \\ O(\tau^2 + h^4), & \text{если } \sigma = \sigma_* \\ & \text{и } \varphi_j^n = f\left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{h^2}{12} f_{xx}\left(x_j, t^n + \frac{\tau}{2}\right). \end{cases} \quad (1.100)$$

З А Д А Ч И

1.1. Показать, что явная схема (1.26) аппроксимирует задачу (1.3) для однородного уравнения теплопроводности с порядком $O(\tau + h^2)$. При каком законе предельного перехода она будет аппроксимировать с порядком $O(h^4)$?

1.2. Показать, что при $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$ явная схема (1.5) аппроксимирует задачу (1.3) с порядком $O(\tau + h^2)$. Подобрать сеточную функцию φ_j^n и закон предельного перехода так, чтобы схема аппроксимировала задачу (1.3) с порядком $O(h^4)$.

1.3. Найти параметр σ и закон предельного перехода, при которых двухслойная схема с весами (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu\Lambda[\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n], \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \\ u_j^0 &= u_0(x_j) \end{aligned} \tag{1.101}$$

аппроксимирует задачу (1.3) для однородного уравнения теплопроводности с порядком $O(h^6)$.

1.4. Определить, с каким порядком двухслойная разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{6} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} &= \nu\Lambda \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \\ u_j^0 &= u_0(x_j) \end{aligned} \tag{1.102}$$

аппроксимирует задачу (1.3) для однородного уравнения теплопроводности.

1.5. Определить, с каким порядком двухслойная разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} + \frac{5}{6} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{12} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} &= \nu\Lambda \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \\ u_j^0 &= u_0(x_j) \end{aligned} \tag{1.103}$$

аппроксимирует задачу (1.3) для однородного уравнения теплопроводности.

1.6. Построить явную схему, аппроксимирующую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, & \quad 0 < t \leq T, & \quad \nu = \text{const} > 0, \\ u_x(0, t) + \gamma u(0, t) &= \mu_0(t), & 0 \leq t \leq T, & \quad \gamma = \text{const} \leq 0, \\ u(l, t) &= \mu_l(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (1.104)$$

с порядком $O(\tau + h^2)$. Рассмотреть два способа аппроксимации производной $u_x(0, t)$ из краевого условия в точке $x = 0$: на двухточечном шаблоне и на трехточечном. Описать алгоритм получения численного решения.

1.7. Построить полностью неявную схему, аппроксимирующую начально-краевую задачу (1.104) с порядком $O(\tau + h^2)$. Рассмотреть два способа аппроксимации производной $u_x(0, t)$: на двухточечном шаблоне и на трехточечном. Описать алгоритм получения численного решения.

1.8. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости в равномерной норме схемы с весами (1.5) для одномерного уравнения теплопроводности при $0 \leq \sigma \leq 1$.

1.9. С помощью спектрального метода Неймана показать, что для полностью неявной двухслойной схемы

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_j^{n+1}, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad n = 0, \dots, M-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.105)$$

необходимый спектральный признак устойчивости (1.42) по начальным данным выполняется при любом законе предельного перехода.

1.10. С помощью спектрального метода Неймана получить необходимое условие устойчивости по начальным данным двухслойной схемы с весом $0 \leq \sigma \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n], \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad n = 0, \dots, M-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.106)$$

1.11. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad x_j = jh, \quad h = 1/N, \end{aligned} \quad (1.107)$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, & \quad \nu = \text{const} > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x) = \sin(\pi x), & & & \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (1.108)$$

1.12. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи, аппроксимирующей начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n, & j &= 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, & u_N^n &= 0, \\ u_j^0 &= u_0(x_j) = \sin(\pi x_j) - \frac{1}{2} \sin(2\pi x_j), & x_j &= jh, \quad h = 1/N. \end{aligned} \quad (1.109)$$

1.13. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи, аппроксимирующей начально-краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n + \sin(3\pi x_j), & j &= 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, & u_N^n &= 0, & n &= 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j) = \sin(\pi x_j), & x_j &= jh, \quad h = 1/N. \end{aligned} \quad (1.110)$$

1.14. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи, аппроксимирующей начально-краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n, & j &= 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 1, & u_N^n &= 0, \\ u_j^0 &= u^0(x_j) = 1 - x_j^2, & x_j &= jh, \quad h = 1/N. \end{aligned} \quad (1.111)$$

1.15. Докажите, что схема (1.102) абсолютно устойчива по начальным данным в среднеквадратичной норме.

1.16. Докажите, что схема (1.103) абсолютно устойчива по начальным данным в среднеквадратичной норме.

§ 2. Метод операторных неравенств

2.1. Каноническая форма двухслойных схем. В предыдущем параграфе рассмотрены некоторые методы исследования устойчивости схемы с весами, аппроксимирующей задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом ν . В данном параграфе мы познакомимся с достаточно универсальным аппаратом исследования устойчивости произвольных двухслойных схем, записанных в специальном виде — *канонической форме*

$$B(t^n) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A(t^n)u^n = \varphi^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

u^0 — задано

(индекс j опущен). Предполагается, что A и B являются линейными операторами, заданными на линейном пространстве H_h сеточных функций, определенных на одномерной сетке $\bar{\omega}_h$, $u^n \in H_h$, $u^0 \in H_h$. Операторы A и B могут зависеть от t^n . Тогда они называются *переменными*. Операторы, не зависящие от t^n , будем называть *постоянными* операторами.

Оказывается, что при определенных неравенствах между операторами A и B схема будет устойчивой. Таким образом, метод операторных неравенств для исследования устойчивости схем основан на приведении схемы к канонической форме и проверке выполнения некоторых неравенств для операторов A и B .

Далее каноническую форму (2.1) двухслойной схемы будем записывать в более компактном виде

$$Bu_t + Au^n = \varphi^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

u^0 — задано,

где

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}.$$

Пример. Запишем в канонической форме (2.2) двухслойную схему с весами (1.84) для уравнения теплопроводности (1.2). Для этого достаточно учесть тождество (1.86), переписать разностное уравнение схемы

$$u_t - \nu\sigma\Lambda u^{n+1} - \nu(1 - \sigma)\Lambda u^n = \varphi^n$$

в виде

$$u_t - \nu\sigma\tau\Lambda u_t - \nu\Lambda u^n = \varphi^n \quad (2.3)$$

и ввести операторы

$$A = -\nu\Lambda, \quad B = E + \sigma\tau A. \quad (2.4)$$

Определение. Если оператор B является тождественным ($B \equiv E$), то схема (2.2) называется явной, в противном случае — неявной.

Из формулы (2.4) следует, что в общем случае схема с весами является неявной. Она превращается в явную при $\sigma = 0$.

2.2. Общее определение устойчивости. Рассмотрим произвольную двухслойную схему (2.2). Начальный вектор u^0 и правая часть φ^n называются *входными данными задачи*. Пусть $\|u^n\|_{(1)}$ — норма на слое для сеточных функций из пространства H_h , $\|\varphi^n\|_{(2)}$ — норма на слое для функций из правой части разностных уравнений.

Определение. Двухслойная схема (2.2) называется *устойчивой*, если существуют положительные постоянные M_1 и M_2 , не зависящие от τ , h и входных данных задачи, такие, что при достаточно малых τ и h и любых u^0 и φ^n решение u^n схемы существует, единственно и для всех $n = 1, \dots, M$ удовлетворяет неравенству

$$\|u^n\|_{(1)} \leq M_1 \|u^0\|_{(1)} + M_2 \|\varphi\|_{(2)}, \quad (2.5)$$

где $\|\varphi\|_{(2)}$ — некоторая норма для функции $\varphi = (\varphi^0, \dots, \varphi^{n-1})$, вычисленная по нормам $\|\varphi^k\|_{(2)}$ на слоях с номерами $k = 0, \dots, n-1$.

Далее мы всегда будем предполагать, что решение задачи (2.2) существует и единственно. Поэтому для доказательства устойчивости будет достаточно проверить выполнение оценки (2.5).

Замечание. В качестве нормы $\|\varphi\|_{(2)}$ могут использоваться, например, следующие:

$$\|\varphi\|_{(2)} = \max_{0 \leq k \leq n-1} \|\varphi^k\|_{(2)}; \quad (2.6)$$

$$\|\varphi\|_{(2)} = \sum_{k=0}^{n-1} \tau \|\varphi^k\|_{(2)} \quad (2.7)$$

или

$$\|\varphi\|_{(2)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tau \|\varphi^k\|_{(2)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.8)$$

Приведенная оценка (2.5) означает устойчивость схемы по начальным данным и правой части. В предыдущем параграфе из частных примеров видно, что проверка устойчивости линейной схемы может быть сведена к доказательству ее устойчивости отдельно по начальным данным и правой части (см. теорему 1.2). Дадим соответствующие определения в общем случае.

Определение. Если для решения задачи

$$\begin{aligned} Bu_t + Au^n &= 0, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ u^0 &= \text{задано} \end{aligned} \quad (2.9)$$

верна оценка

$$\|u^n\|_{(1)} \leq M_1 \|u^0\|_{(1)}, \quad n = 1, \dots, M, \quad (2.10)$$

то схема (2.2) называется устойчивой по начальным данным.

Определение. Если для решения задачи

$$\begin{aligned} Bu_t + Au^n &= \varphi^n, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ u^0 &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

верна оценка

$$\|u^n\|_{(1)} \leq M_2 \|\varphi\|_{(2)}, \quad n = 1, \dots, M, \quad (2.12)$$

то схема (2.2) называется устойчивой по правой части.

2.3. Операторы перехода. Запишем двухслойную схему (2.1) в виде

$$u^{n+1} = S^{n+1}u^n + \tau f^n, \quad (2.13)$$

где $S^{n+1} = E - \tau B^{-1}A$, $f^n = B^{-1}\varphi^n$. При этом, естественно, предполагается, что оператор B^{-1} существует. Вообще говоря, $S^{n+1} = S^{n+1}(t^n)$, так как $A = A(t^n)$ и $B = B(t^n)$. Оператор S^{n+1} называется *оператором перехода* со слоя n на слой $(n+1)$.

Используя представление схемы в виде (2.13), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= S^{n+1}u^n + \tau f^n = \\ &= S^{n+1} [S^n u^{n-1} + \tau f^{n-1}] + \tau f^n = S^{n+1} S^n u^{n-1} + \tau (f^n + S^{n+1} f^{n-1}) = \\ &= S^{n+1} S^n [S^{n-1} u^{n-2} + \tau f^{n-2}] + \tau (f^n + S^{n+1} f^{n-1}) = \\ &= S^{n+1} S^n S^{n-1} u^{n-2} + \tau (f^n + S^{n+1} f^{n-1} + S^{n+1} S^n f^{n-2}) = \\ &= \dots = S^{n+1} S^n \dots S^1 u^0 + \tau (f^n + S^{n+1} f^{n-1} + \dots + S^{n+1} S^n \dots S^2 f^0). \end{aligned}$$

Следовательно, для решения можем написать выражение

$$u^{n+1} = T^{n+1,0}u^0 + \tau \sum_{k=0}^n T^{n+1,k+1} f^k, \quad (2.14)$$

где $T^{n+1,k} = S^{n+1}S^n \dots S^{k+1}$, $k = 0, \dots, n$, $T^{n+1,n+1} = E$ — тождественный или единичный оператор.

Определение. Оператор $T^{n+1,k}$ называется оператором перехода со слоя $k = 0, \dots, n$ на слой $(n+1)$.

Определение. Оператор $T^{n+1,0} = S^{n+1}S^n \dots S^1$ называется разрешающим оператором.

2.4. Равномерная устойчивость по начальным данным

Определение. Будем говорить, что схема (2.2) равномерно устойчива по начальным данным, если при постановке начальных данных u^k на любом слое k , $0 \leq k < M$ однородная схема

$$\begin{aligned} Bu_t + Au^n &= 0, \quad n = k, \dots, M-1, \\ u^k &\text{ — задано} \end{aligned} \quad (2.15)$$

устойчива, причем устойчивость равномерная по k , т. е.

$$\|u^n\|_{(1)} \leq M_1 \|u^k\|_{(1)} \quad (2.16)$$

при всех $0 \leq k < n \leq M$, где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h .

Равномерная устойчивость означает, что схема устойчива относительно возмущений, вносимых на каждом слое по времени, а не только на нулевом.

Замечание. Из равномерной устойчивости по начальным данным следует обычная устойчивость по начальным данным, но не наоборот.

Теорема 2.1. Необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости схемы (2.2) по начальным данным является равномерная (по n и k) ограниченность операторов перехода $T^{n,k}$ со слоя k на слой n :

$$\|T^{n,k}\| \leq M_1 \quad \text{для всех } 0 \leq k < n \leq M. \quad (2.17)$$

Доказательство. Пусть условие (2.17) выполнено. Решение задачи (2.15) может быть представлено как $u^n = T^{n,k}u^k$. Отсюда

$$\|u^n\|_{(1)} \leq \|T^{n,k}\| \cdot \|u^k\|_{(1)}$$

и в силу равномерной ограниченности (2.17) норм операторов перехода следует равномерная устойчивость по начальным данным (2.16).

Докажем теперь необходимость условия (2.17). Пусть схема равномерно устойчива по начальным данным, т. е. выполнено неравенство (2.16) при всех $0 \leq k < n \leq M$ и для любого $u^k \in H_h$. Тогда, поскольку $u^n = T^{n,k}u^k$, можем записать

$$\|u^n\|_{(1)} = \|T^{n,k}u^k\|_{(1)} \leq M_1 \|u^k\|_{(1)},$$

т. е. для любого $u^k \in H_h$

$$\frac{\|T^{n,k}u^k\|_{(1)}}{\|u^k\|_{(1)}} \leq M_1. \quad (2.18)$$

Поскольку норма оператора в конечномерном пространстве H_h есть

$$\|T^{n,k}\| = \max_{u^k \in H_h} \frac{\|T^{n,k}u^k\|_{(1)}}{\|u^k\|_{(1)}},$$

то из неравенства (2.18) следует выполнение условия (2.17) равномерной ограниченности норм операторов перехода. ■

Теорема 2.2 (достаточный признак равномерной устойчивости). *Достаточным условием равномерной устойчивости схемы (2.2) по начальным данным является равномерная ограниченность норм операторов перехода*

$$\|S^k\| \leq 1 + C_0\tau, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (2.19)$$

где $C_0 \geq 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h .

Доказательство. Для всех $0 \leq k < n \leq M$

$$\begin{aligned} \|T^{n,k}\| &= \|S^n S^{n-1} \dots S^{k+1}\| \leq \|S^n\| \cdot \|S^{n-1}\| \dots \|S^{k+1}\| \leq \\ &\leq (1 + C_0\tau)^{n-k} \leq (1 + C_0\tau)^n \leq (1 + C_0\tau)^M \leq e^{C_0\tau M} = e^{C_0T}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 следует равномерная устойчивость схемы (2.2) по начальным данным с постоянной $M_1 = e^{C_0T}$. ■

Теорема 2.3. *Если схема (2.2) имеет постоянные операторы A и B и устойчива по начальным данным, то она равномерно устойчива по начальным данным.*

Доказательство. По условию оператор перехода со слоя n на слой $(n+1)$ является постоянным, т. е. не зависит от времени. Тогда разрешающий оператор есть $T^{n,0} = S^n S^{n-1} \dots S^1 = (S)^n$ и поскольку схема устойчива по начальным данным, то для всех $n = 1, \dots, M$ выполняется оценка

$$\|u^n\|_{(1)} \leq M_1 \|u^0\|_{(1)}, \quad \forall u^0 \in H_h.$$

Следовательно,

$$\|u^n\|_{(1)} = \|(S)^n u^0\|_{(1)} \leq M_1 \|u^0\|_{(1)}.$$

Отсюда

$$\frac{\|(S)^n u^0\|_{(1)}}{\|u^0\|_{(1)}} \leq M_1, \quad \forall u^0 \in H_h.$$

Таким образом, $\|(S)^n\| \leq M_1$, $n = 1, \dots, M$, т. е. нормы всех степеней оператора S ограничены постоянной M_1 . Тогда также

$$\|T^{n,k}\| = \|(S)^{n-k}\| \leq M_1 \quad (2.20)$$

для всех $0 \leq k < n \leq M$, т. е. оператор перехода со слоя k на слой n равномерно (по n и k) ограничен. В силу теоремы 2.1, данная схема равномерно устойчива по начальным данным. ■

2.5. Связь между устойчивостью по начальным данным и устойчивостью по правой части. Вернемся к рассмотрению неоднородной схемы (2.2). Уравнение этой схемы мы записали в виде (2.13) и получили для решения формулу (2.14). Переходя к норме решения и используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} \leq \|T^{n+1,0}\| \cdot \|u^0\|_{(1)} + \tau \sum_{k=0}^n \|T^{n+1,k+1}\| \cdot \|f^k\|_{(1)}. \quad (2.21)$$

Выберем теперь норму на слое для функций φ^n специальным образом, а именно положим

$$\|\varphi^n\|_{(2)} = \|f^n\|_{(1)} \equiv \|B^{-1}\varphi^n\|_{(1)}. \quad (2.22)$$

Равенство (2.22) называется *условием согласования норм*. Тогда из оценки (2.21) следует утверждение.

Теорема 2.4. Для устойчивости схемы (2.2) по начальным данным и правой части достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной ограниченности (по n и k) операторов перехода со слоя k на слой n :

$$\|T^{n,k}\| \leq M_1 \quad (2.23)$$

для всех $0 \leq k < n \leq M$. При этом для решения верна оценка

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \left(\|u^0\|_{(1)} + \|\varphi\|_{(2)} \right), \quad (2.24)$$

означающая устойчивость (2.5) по начальным данным и по правой части при условии (2.22) согласования норм и выборе нормы $\|\varphi\|_{(2)}$ по формуле (2.7).

Установим связь между устойчивостью по начальным данным и устойчивостью по правой части.

Теорема 2.5. Если схема (2.2) равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива и по правой части при условии согласования норм (2.22).

Доказательство. В силу теоремы 2.1 из равномерной устойчивости схемы по начальным данным, следует равномерная ограниченность (2.17) оператора $T^{n,k}$. Тогда по теореме 2.4 схема будет устойчива по правой части при условии согласования норм (2.22), при этом для решения задачи (2.11) будет выполняться оценка

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} \leq M_1 \tau \sum_{k=0}^n \|\varphi^k\|_{(2)}. \quad (2.25)$$

Замечание. Условие равномерной ограниченности норм оператора перехода (2.19) является достаточным условием устойчивости схемы также и по правой части.

Теорема 2.6. Если схема (2.2) имеет постоянные операторы A и B , то устойчивость по начальным данным необходима и достаточна для устойчивости по правой части при условии согласования норм (2.22).

Доказательство. Пусть схема устойчива по начальным данным. Поскольку она имеет постоянные операторы, то, в силу теоремы 2.3, она равномерно устойчива по начальным данным, а тогда по теореме 2.5 схема устойчива и по правой части (при условии (2.22)).

Пусть, наоборот, схема (2.2) устойчива по правой части, т. е. для решения задачи (2.11) при условии (2.22) выполнено неравенство (2.12) с нормой $\|\varphi\|_{(2)}$, определенной равенством (2.7):

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} \leq M_2 \tau \sum_{k=0}^n \|B^{-1}\varphi^k\|_{(1)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.26)$$

По определению устойчивости эта оценка имеет место при любой правой части $f^k = B^{-1}\varphi^k$. С другой стороны, из представления (2.14) решения задачи при $u^0 = 0$ получаем

$$u^{n+1} = \sum_{k=0}^n T^{n+1, k+1} \tau f^k.$$

Поскольку операторы постоянные, то $S^n \equiv S$, $T^{n+1, k+1} = (S)^{n-k}$ и тогда

$$u^{n+1} = \sum_{k=0}^n (S)^{n-k} \tau f^k. \quad (2.27)$$

Выберем правую часть схемы φ^k так, чтобы

$$\tau f^k = \tau B^{-1}\varphi^k = \eta \delta_{k, k_0},$$

где η — произвольная сеточная функция, $\eta \in H_h$; k_0 — произвольное целое число; δ_{k, k_0} — символ Кронекера. Тогда из формулы для решения (2.27) следует, что

$$u^{n+1} = \sum_{k=0}^n (S)^{n-k} \tau f^k = \sum_{k=0}^n (S)^{n-k} \eta \delta_{k, k_0} = (S)^{n-k_0} \eta.$$

Поэтому

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} = \|(S)^{n-k_0} \eta\|_{(1)} \leq \|(S)^{n-k_0}\| \cdot \|\eta\|_{(1)}.$$

В то же время по условию

$$\|u^{n+1}\|_{(1)} \leq M_2 \|\eta\|_{(1)}.$$

Следовательно, $\|(S)^{n-k_0}\| \leq M_2$. Учитывая произвольность k_0 и n , приходим к выводу, что нормы степеней оператора S ограничены

$$\|(S)^m\| \leq M_2, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Тогда

$$\|T^{n,k}\| = \|(S)^{n-k}\| \leq M_2$$

для всех $0 \leq k < n \leq M$ и из теоремы 2.1 следует, что схема равномерно устойчива и тем более просто устойчива по начальным данным. ■

В силу доказанной теоремы мы ограничимся далее лишь исследованием устойчивости схем по начальным данным.

2.6. Устойчивость в энергетическом пространстве. Мы получили условия устойчивости двухслойных схем в виде неравенств (2.17) и (2.19) для норм операторов перехода. При этом в пространстве сеточных функций использовались некоторые абстрактные нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$, операторы A и B могли быть переменными или постоянными. Указанные неравенства трудны для проверки. Поэтому далее мы получим другие достаточно общие и легко проверяемые условия устойчивости схем по начальным данным в виде некоторых неравенств между операторами A и B , причем эти условия будут необходимыми и достаточными для устойчивости. Для упрощения выкладок будем рассматривать только случай постоянных операторов $A : H_h \rightarrow H_h$ и $B : H_h \rightarrow H_h$. Кроме того, теперь будет предполагаться, что H_h — действительное конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Как и прежде, мы считаем, что A и B являются линейными операторами и задача (2.2) однозначно разрешима при любых входных данных φ^n и u^0 , т. е. существует ограниченный обратный оператор B^{-1} с областью определения $\mathcal{D}(B^{-1}) = H_h$.

Напомним основные определения и некоторые свойства операторов, отображающих пространство H_h в себя. Оператор A называется *неотрицательным* (обозначается $A \geq 0$), если

$$(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in H_h.$$

Оператор A называется *положительным* ($A > 0$), если

$$(Ax, x) > 0, \quad \forall x \in H_h, \quad x \neq 0.$$

Оператор A называется *положительно определенным* ($A \geq \delta E$), если

$$(Ax, x) \geq \delta(x, x), \quad \delta > 0.$$

Оператор A называется *самосопряженным* ($A = A^*$), если

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H_h.$$

Неравенство $A \geq B$ понимается в том смысле, что $A - B \geq 0$ или

$$(Ax, x) \geq (Bx, x), \quad \forall x \in H_h.$$

Пусть $A = A^* > 0$. Тогда функция $(x, y)_A = (Ax, y)$ будет удовлетворять аксиомам скалярного произведения и, следовательно, можно ввести норму

$$\|x\|_A = \sqrt{(x, x)_A} = \sqrt{(Ax, x)}, \quad (2.28)$$

порожденную оператором A .

Определение. *Пространство H_h с нормой $\|\cdot\|_A$ называется энергетическим пространством и обозначается H_A .*

Таким образом, далее мы вместо абстрактной нормы $\|\cdot\|_{(1)}$ будем использовать энергетическую норму $\|\cdot\|_A$ пространства H_h и в этой норме будем устанавливать устойчивость двухслойных схем. При этом для получения совпадающих необходимого и достаточного условий устойчивости нам потребуется более специальное определение устойчивости по начальным данным, чем то, которое было раньше.

Определение. *Схема (2.2) с оператором $A = A^* > 0$ называется устойчивой с постоянной ρ по начальным данным в пространстве H_A (ρ -устойчивой в H_A), если при любых $u^n \in H_h$, при всех n и при всех достаточно малых τ и h для решения u^{n+1} уравнения*

$$Vu_t + Au^n = 0 \quad (2.29)$$

справедлива оценка

$$\|u^{n+1}\|_A \leq \rho \|u^n\|_A, \quad (2.30)$$

где $0 < \rho \leq 1 + C_0\tau$, $C_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h .

Поскольку $\rho^n \leq M_1 = e^{C_0T}$ для всех $n\tau \leq T$, то ρ -устойчивая в H_A схема является равномерно устойчивой по начальным данным в H_A и просто устойчивой в H_A в смысле введенных ранее определений.

2.7. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теорем о необходимом и достаточном условии устойчивости нам потребуются несколько вспомогательных утверждений. Известна [14]

Теорема (о норме самосопряженного оператора). *Если оператор S — самосопряженный, то*

$$\|S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Sx, x)|}{\|x\|^2}, \quad x \in H_h. \quad (2.31)$$

Оператор C называется *квадратным корнем* из оператора A , если $C^2 = A$. Квадратный корень из оператора A будем обозначать через $A^{1/2}$. Тогда $A^{1/2} \cdot A^{1/2} = A$. Известна [8]

Теорема (о квадратном корне из оператора). *Существует единственный положительный самосопряженный квадратный корень $A^{1/2}$ из любого положительного самосопряженного оператора A , перестановочный со всяким оператором, перестановочным с A .*

Далее будем предполагать, что в уравнении (2.29) A и B — самосопряженные операторы и A — положительный оператор, т. е. $A = A^* > 0$, $B = B^*$. По теореме о квадратном корне существует оператор $A^{1/2}$, который является положительным и самосопряженным. Подействуем на обе части уравнения (2.29) оператором $A^{1/2}B^{-1}$. В результате получим уравнение

$$(A^{1/2}u)_t + (A^{1/2}B^{-1}A^{1/2})A^{1/2}u^n = 0.$$

Обозначив $x = A^{1/2}u$, перепишем последнее уравнение в виде

$$x^{n+1} = Sx^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.32)$$

где $S = E - \tau A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$.

Лемма 2.1. *Для ρ -устойчивости схемы в H_A необходимо и достаточно выполнение оценки*

$$\|S\| \leq \rho. \quad (2.33)$$

Доказательство. В силу самосопряженности оператора $A^{1/2}$ для функций u и $x = A^{1/2}u$ справедливо равенство

$$\|x\| = \|u\|_A. \quad (2.34)$$

В самом деле,

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(A^{1/2}u, A^{1/2}u)} = \sqrt{(Au, u)} = \|u\|_A.$$

Достаточность. Пусть $\|S\| \leq \rho$ и u^n — произвольный элемент из H_h . Тогда

$$\|x^{n+1}\| = \|Sx^n\| \leq \rho\|x^n\|$$

и на основе равенства (2.34) получаем, что

$$\|u^{n+1}\|_A \leq \rho\|u^n\|_A, \quad (2.35)$$

т. е. схема устойчива в H_A с постоянной ρ .

Необходимость. Пусть $x^n \in H_h$ — произвольный элемент пространства H_h . В силу положительности оператора $A^{1/2}$ существует единственное решение u^n уравнения $A^{1/2}u^n = x^n$. Поскольку схема ρ -устойчива в H_A , то выполнена оценка (2.35), следовательно, и оценка

$$\|x^{n+1}\| \leq \rho \|x^n\|.$$

В силу равенства $x^{n+1} = Sx^n$ получаем

$$\|Sx^n\| \leq \rho \|x^n\|.$$

Отсюда ввиду произвольности $x^n \in H_h$ следует неравенство $\|S\| \leq \rho$. Лемма доказана. \blacksquare

Лемма 2.2. Пусть L и Q — операторы, действующие в H_h , причем оператор $L^{-1} : H_h \rightarrow H_h$ существует. Тогда операторные неравенства $Q \geq 0$ и $L^*QL \geq 0$ эквивалентны.

Доказательство следует из тождества

$$(L^*QLu, u) = (QLu, Lu) = (Qv, v),$$

где $v = Lu$ и $u = L^{-1}v$. \blacksquare

Лемма 2.3. Пусть $Q : H_h \rightarrow H_h$ — самосопряженный положительный оператор. Тогда Q^{-1} является таким же.

Доказательство. Поскольку $Q > 0$, то обратный оператор Q^{-1} существует и $\forall u \in H_h, u \neq 0$

$$(Q^{-1}u, u) = (v, Qv) = (Qv, v) > 0,$$

где $v = Q^{-1}u$, т. е. Q^{-1} является положительным оператором. Кроме того, для любых $u, v \in H_h$

$$(Q^{-1}u, v) = (Q^{-1}u, QQ^{-1}v) = (Q^*Q^{-1}u, Q^{-1}v) = (u, Q^{-1}v), \quad (2.36)$$

т. е. Q^{-1} — самосопряженный оператор. \blacksquare

Лемма 2.4. Пусть A и B — самосопряженные положительные операторы, α и β — любые действительные числа. Тогда эквивалентны операторные неравенства

$$\alpha A \geq \beta B \quad (2.37)$$

и

$$\alpha B^{-1} \geq \beta A^{-1}. \quad (2.38)$$

Доказательство. По теореме о квадратном корне существует самосопряженный положительный оператор $B^{1/2}$. Согласно лемме 2.3, обратный оператор $(B^{1/2})^{-1}$ также является самосопряженным и положительным. Умножая неравенство (2.37) с обеих сторон на $(B^{1/2})^{-1}$, согласно лемме 2.2 получаем неравенство, эквивалентное (2.37)

$$\alpha (B^{1/2})^{-1} A (B^{1/2})^{-1} \geq \beta (B^{1/2})^{-1} B^{1/2} B^{1/2} (B^{1/2})^{-1},$$

т. е.

$$\alpha C \geq \beta E, \quad (2.39)$$

где $C = (B^{1/2})^{-1} A (B^{1/2})^{-1}$. Поскольку $A > 0$, то из леммы 2.2 следует, что и $C > 0$. Кроме того, непосредственно проверяется, что $C = C^*$. Следовательно, существует корень квадратный $C^{1/2}$ — самосопряженный положительный оператор и обратный оператор $(C^{1/2})^{-1}$, также являющийся самосопряженным и положительным. Поэтому согласно лемме 2.2 неравенство (2.39) эквивалентно следующему:

$$\alpha E \geq \beta C^{-1}$$

или

$$\alpha E \geq \beta \left((B^{1/2})^{-1} A (B^{1/2})^{-1} \right)^{-1}.$$

Поэтому исходное неравенство (2.37) будет эквивалентно неравенству

$$\alpha E \geq \beta B^{1/2} A^{-1} B^{1/2},$$

которое после умножения с обеих сторон на самосопряженный оператор $(B^{1/2})^{-1}$ переходит, согласно лемме 2.2, в эквивалентное неравенство (2.38). ■

2.8. Необходимое и достаточное условие устойчивости

Теорема 2.7. Пусть в схеме (2.2) A и B — положительные, самосопряженные и постоянные операторы. Тогда для ρ -устойчивости схемы в H_A по начальным данным необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\frac{1 - \rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} B. \quad (2.40)$$

Доказательство. Покажем вначале, что оператор перехода S из уравнения (2.32) является самосопряженным оператором:

$$\begin{aligned} (Sx, y) &= ((E - \tau A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})x, y) = (x, y) - \tau (A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} x, y) = \\ &= (x, y) - \tau (x, A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} y) = (x, (E - \tau A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})y) = (x, Sy). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали свойство самосопряженности оператора B^{-1} (см. лемму 2.3) и квадратного корня $A^{1/2}$.

Перейдем теперь от неравенства (2.33) к эквивалентным неравенствам между операторами исходной схемы. По теореме о норме самосопряженного оператора условие $\|S\| \leq \rho$ из леммы 2.1 эквивалентно требованию

$$|(Sx, x)| \leq \rho \|x\|^2, \quad \forall x \in H_h.$$

В виде операторных неравенств последнее неравенство записывается так

$$-\rho E \leq S \leq \rho E,$$

или

$$-\rho E \leq E - \tau A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} \leq \rho E,$$

где E — единичный оператор. Отсюда получаем

$$\frac{1 - \rho}{\tau} E \leq A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} \leq \frac{1 + \rho}{\tau} E. \quad (2.41)$$

Умножим это неравенство с обеих сторон на положительный самосопряженный оператор $(A^{1/2})^{-1}$. Используя лемму 2.2, получаем

$$\frac{1 - \rho}{\tau} A^{-1} \leq B^{-1} \leq \frac{1 + \rho}{\tau} A^{-1}. \quad (2.42)$$

В силу леммы 2.4, неравенства (2.42) могут быть обращены:

$$\frac{1 - \rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} B.$$

Таким образом, доказано, что выполнение операторных неравенств (2.40) является необходимым и достаточным условием устойчивости схемы.

Если $1 \leq \rho \leq 1 + C_0 \tau$, то левое неравенство (2.40) будет выполняться автоматически и для устойчивости необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$B \geq \frac{\tau}{1 + \rho} A. \quad (2.43)$$

Теорема доказана. ■

2.9. Схема с весами (общий случай). Запишем схему с весами

$$u_t + A[\sigma u^{n+1} + (1 - \sigma)u^n] = 0 \quad (2.44)$$

в канонической форме $(E + \sigma\tau A)u_t + Au^n = 0$ или

$$Bu_t + Au^n = 0, \quad (2.45)$$

где $B = E + \sigma\tau A$.

Пусть $A = A^* > 0$ — линейный постоянный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} > 0. \quad (2.46)$$

Очевидно, что $B = B^*$. Пусть

$$\sigma > -\frac{1}{\tau\|A\|}. \quad (2.47)$$

Тогда для произвольного $x \in H_h$, $x \neq 0$ будем иметь

$$(Bx, x) > (x, x) - \frac{(Ax, x)}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|} \left(\|x\|^2 \|A\| - (Ax, x) \right) \geq 0,$$

т. е. при условии (2.47) оператор B является положительным и условия теоремы 2.7 выполняются.

Рассмотрим устойчивость с $\rho = 1$. В силу теоремы 2.7, необходимое и достаточное условие устойчивости схемы (2.45) в H_A представляется в виде неравенства $B = E + \sigma\tau A \geq 0, 5\tau A$ или

$$E + (\sigma - 0,5)\tau A \geq 0. \quad (2.48)$$

При $\sigma \geq 0,5$ это неравенство выполнено всегда, так как $A > 0$, т. е. схема в этом случае абсолютно устойчива.

Пусть теперь $\sigma < 0,5$. Неравенство (2.48) эквивалентно выполнению для произвольного x следующего неравенства:

$$\tau(0,5 - \sigma)(Ax, x) \leq (x, x), \quad (2.49)$$

или

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \frac{1}{\tau(0,5 - \sigma)}.$$

Таким образом, при $\sigma < 0,5$ операторное неравенство (2.48) эквивалентно числовому неравенству

$$\|A\| \leq \frac{1}{\tau(0,5 - \sigma)}$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \quad (2.50)$$

Очевидно, что если σ удовлетворяет условию (2.50), то условие (2.47) также выполняется и оператор B будет положительным.

Сформулируем полученный результат в виде следствия из теоремы 2.7.

Следствие 1. Пусть $A = A^* > 0$. Тогда при $\sigma \geq 0,5$ схема с весами (2.44) абсолютно устойчива. При $\sigma < 0,5$ для устойчивости этой схемы необходимо и достаточно выполнения условия (2.50).

2.10. Схема с весами для уравнения теплопроводности. Теперь пусть схема с весами (2.44) аппроксимирует уравнение теплопроводности

$$u_t = \nu u_{xx}. \quad (2.51)$$

Для этого случая $A = \nu \overset{\circ}{A}$, где $\overset{\circ}{A} u = -u_{xx}$, $u_0 = u_N = 0$.

Оператор $\overset{\circ}{A}$ является положительно определенным и самосопряженным. Его норма равна максимальному собственному значению (см. задачу 2.1):

$$\left\| \overset{\circ}{A} \right\| = \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right). \quad (2.52)$$

Следовательно, оператор A также является положительно определенным и самосопряженным и

$$\|A\| = \nu \left\| \overset{\circ}{A} \right\| = \frac{4\nu}{h^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right).$$

Таким образом, получили

Следствие 2. При $\sigma \geq 0,5$ схема с весами для уравнения теплопроводности абсолютно устойчива. При $\sigma < 0,5$ для устойчивости схемы в H_A необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sigma \geq \hat{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau\nu \cos^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right)}. \quad (2.53)$$

Отметим, что полученное в лемме 1.5 достаточное условие устойчивости

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau\nu} > \hat{\sigma}_0 \quad (2.54)$$

является хорошим приближением к необходимому и достаточному условию (2.53).

З А Д А Ч И

Решение некоторых из приведенных ниже задач непосредственно вытекает из следствия 2. Предлагается, однако, решать эти задачи с помощью теоремы 2.7, проверяя все ее условия. Устойчивость исследовать для постоянной $\rho = 1$. Из теоремы 2.7 следует, что для такой постоянной необходимое и достаточное условие устойчивости схемы по начальным данным в H_A заключается в выполнении неравенства

$$B \geq \frac{\tau}{2} A. \quad (2.55)$$

2.1. Доказать, что для вычисления нормы оператора $\overset{\circ}{A}$ можно использовать формулу (2.52).

2.2. С помощью метода операторных неравенств найти необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным явной схемы

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^n + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j), \end{aligned} \quad (2.56)$$

аппроксимирующей первую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad \nu = \text{const} > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(l, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3. С помощью метода операторных неравенств исследовать устойчивость по начальным данным неявной схемы

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j), \end{aligned} \quad (2.58)$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу (2.57).

2.4. С помощью метода операторных неравенств исследовать устойчивость по начальным данным схемы Кранка — Николсон

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \Lambda \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right) + f_j^{n+1/2}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (2.59)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j),$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу (2.57).

2.5. С помощью метода операторных неравенств найти необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным конечно-разностной схемы

$$\frac{1}{2}u_{t,j+1} + \frac{1}{2}u_{t,j-1} = \nu \Lambda u_j^{n+1} + f_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (2.60)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j),$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу (2.57).

2.6. С помощью метода операторных неравенств исследовать устойчивость по начальным данным схемы

$$\frac{1}{6}u_{t,j-1} + \frac{2}{3}u_{t,j} + \frac{1}{6}u_{t,j+1} = \nu \Lambda \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right) + f_j^{n+1/2}, \quad (2.61)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j),$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу (2.57).

2.7. С помощью метода операторных неравенств исследовать устойчивость по начальным данным схемы

$$\frac{1}{12}u_{t,j-1} + \frac{5}{6}u_{t,j} + \frac{1}{12}u_{t,j+1} = \nu \Lambda \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right) + f_j^{n+1/2}, \quad (2.62)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j),$$

аппроксимирующей начально-краевую задачу (2.57).

§ 3. Консервативные схемы

3.1. Ранее при построении разностных схем мы аппроксимировали дифференциальные операторы разностными и доказывали сходимость разностных схем, предполагая, что дифференциальная задача имеет достаточно гладкое решение. Однако не все физические процессы описываются с помощью дифференцируемых функций. Например, на ударной волне скорость газа, его плотность, давление и температура являются разрывными функциями. Соответствующие дифференциальные задачи не имеют гладких решений. Для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности

$$u_t = [\nu(x, t)u_x]_x + f(x, t) \quad (3.1)$$

не существует гладкого решения, если коэффициент теплопроводности всюду является гладкой функцией, но в одной точке x_0 имеет разрыв первого рода, т. е. $\nu_{\text{лев}}(x_0, t) \neq \nu_{\text{пр}}(x_0, t)$. В этом случае классическая постановка задачи для уравнения (3.1) может быть заменена, например, на следующую неклассическую постановку: найти функцию $u(x, t)$, которая во всех точках (x, t) , за исключением точек (x_0, t) , удовлетворяет уравнению (3.1), а в точках (x_0, t) — условиям сопряжения

$$u_{\text{лев}}(x_0, t) = u_{\text{пр}}(x_0, t); \quad (3.2)$$

$$(\nu u_x)_{\text{лев}}(x_0, t) = (\nu u_x)_{\text{пр}}(x_0, t). \quad (3.3)$$

Первое из условий сопряжения следует из требования непрерывности решения, второе — непрерывности потока тепла.

В общем случае, когда дифференциальное уравнение не имеет смысла, для получения разностных уравнений будем пользоваться записью физических законов сохранения не в дифференциальной, а в интегральной форме. Законы сохранения в интегральной форме имеют смысл и для негладких функций, которые нельзя дифференцировать, но интегрировать можно.

Вспомним, что в основе дифференциального уравнения теплопроводности лежит *интегральный закон сохранения тепла*:

$$\int_x^{x+\Delta x} u(\xi, t + \Delta t) d\xi - \int_x^{x+\Delta x} u(\xi, t) d\xi =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} W(x, \tau) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} W(x + \Delta x, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.4)$$

где Δt и Δx произвольные числа, $u(x, t)$ — температура, $W(x, t)$ — поток тепла (количество тепла, протекшего в единицу времени через единичную площадку)

$$W(x, t) = -\nu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

Интегральный закон (3.4) получается при подсчете баланса тепла на произвольном участке стержня за произвольный промежуток времени и потому называется еще *уравнением баланса тепла*. Приведенный закон устанавливает, что изменение количества тепла в стержне на отрезке $[x, x + \Delta x]$ за время Δt определяется:

- разностью количества тепла, которое втекло и вытекло через сечения стержня x и $x + \Delta x$ за время Δt ;
- количеством тепла, выделившимся на отрезке $[x, x + \Delta x]$ за время Δt за счет распределенных на нем источников тепла с плотностью $f(x, t)$.

Для получения разностного уравнения рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на *элементарной ячейке сетки* $\omega_j^n = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$, т. е. на отрезке $x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}$ за промежуток времени $t^n \leq t \leq t^{n+1}$

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx = \\ & = \int_{t^n}^{t^{n+1}} W(x_{j-1/2}, t) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} W(x_{j+1/2}, t) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Аппроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t^n) dx \sim u_j^n h, \\ & \int_{t^n}^{t^{n+1}} W(x_{j\pm 1/2}, t) dt \sim (\sigma W_{j\pm 1/2}^{n+1} + (1 - \sigma) W_{j\pm 1/2}^n) \tau, \end{aligned}$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} f(x, t) dx dt \sim \tau h \varphi_j^n,$$

$$W_{j+1/2}^n = -\nu_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}. \quad (3.5)$$

При этом $\nu_{j+1/2}^n$ определяется формулой

$$\nu_{j+1/2}^n = \frac{\nu_j^n + \nu_{j+1}^n}{2}, \quad \nu_j^n = \nu(x_j, t^n), \quad (3.6)$$

а для вычисления φ_j^n можно использовать одну из формул, приведенных в подп. 1.3 (в зависимости от выбранного значения параметра σ).

После такой замены интегральное уравнение баланса тепла превращается в *дискретное уравнение баланса тепла для элементарной ячейки*

$$u_j^{n+1} h - u_j^n h = \left(\sigma W_{j-1/2}^{n+1} + (1 - \sigma) W_{j-1/2}^n \right) \tau -$$

$$- \left(\sigma W_{j+1/2}^{n+1} + (1 - \sigma) W_{j+1/2}^n \right) \tau + \varphi_j^n \tau h, \quad (3.7)$$

которое после деления на τh дает разностное уравнение

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \sigma \frac{1}{h} \left[\nu_{j+1/2}^{n+1} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - \nu_{j-1/2}^{n+1} \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} \right] +$$

$$+ (1 - \sigma) \frac{1}{h} \left[\nu_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \nu_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right] + \varphi_j^n,$$

т. е. схему с весами

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \sigma \Lambda^{n+1} u_j^{n+1} + (1 - \sigma) \Lambda^n u_j^n + \varphi_j^n, \quad (3.8)$$

где

$$\Lambda^n u_j^n = \frac{1}{h} \left[\nu_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \nu_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right]. \quad (3.9)$$

Если ввести обозначения

$$a_j^n = \nu_{j-1/2}^n, \quad a_{j+1}^n = \nu_{j+1/2}^n,$$

и просуммируем их почленно сначала по индексу j :

$$\sum_{j=k}^l u_j^{n+1} h - \sum_{j=k}^l u_j^n h = W_{k-1/2}^n \tau - W_{l+1/2}^n \tau + \tau \sum_{j=k}^l \varphi_j^n h,$$

а затем по $n = p, \dots, p + m - 1$. В результате получим дискретный аналог

$$\begin{aligned} & \sum_{j=k}^l u_j^{p+m} h - \sum_{j=k}^l u_j^p h = \\ & = \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{k-1/2}^n \tau - \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{l+1/2}^n \tau + \sum_{n=p}^{p+m-1} \sum_{j=k}^l \varphi_j^n h \tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

интегрального закона сохранения тепла (3.10) во всей области Ω .

Важно отметить, что сокращение слагаемых при суммировании произошло благодаря тому, что для соседних элементарных ячеек поток на разделяющей их общей границе аппроксимировался по одной и той же формуле (3.5).

Определение. *Разностные схемы, выражающие дискретные законы сохранения в элементарных ячейках и в составных областях, полученные объединением элементарных ячеек, называются консервативными.*

Отметим еще раз, что для консервативных схем дискретный закон сохранения в составной области является алгебраическим следствием разностных уравнений.

3.2. Введем теперь понятие *дивергентных схем*. Так называются схемы, полученные в результате конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, записанных в дивергентной форме. Так, уравнение (3.1) имеет дивергентную форму, поскольку дифференциальный оператор этого уравнения имеет дивергентную форму

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv u_t + w_x = f(x, t),$$

где $w = -\nu u_x$ — тепловой поток, $\mathbf{a}(x, t) = (u(x, t), w(x, t))$. Сравнивая явную дивергентную схему

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left[\nu_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \nu_{j-1/2}^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \right] + \varphi_j^n, \quad (3.12)$$

где $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$, с явной ($\sigma = 0$) консервативной схемой (3.8), видим, что они совпадают. Этот факт имеет место и в общем случае в том смысле, что применяя интегро-интерполяционный метод к интегральным законам сохранения, можно построить разностные схемы, совпадающие с дивергентными схемами, аппроксимирующими дифференциальные уравнения, записанные в дивергентной форме. Поэтому можно сказать, что консервативные схемы являются дивергентными.

Если уравнение (3.1) записать в недивергентной форме

$$u_t = \nu u_{xx} + \nu_x u_x + f, \quad (3.13)$$

то аппроксимирующая его разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu_j^n u_{\bar{x}x,j}^n + \frac{\nu_{j+1}^n - \nu_{j-1}^n}{2h} \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \varphi_j^n \quad (3.14)$$

имеет название *недивергентной схемы*. Недивергентная схема, как правило, не является консервативной. Покажем это на примере недивергентной схемы (3.14), положив для простоты, что функция ν не зависит от времени ($\nu = \nu(x)$) и $f \equiv 0$.

Лемма 3.1. *Для недивергентной схемы (3.14) дискретный аналог закона сохранения (3.11) не выполняется.*

Доказательство. Перепишем недивергентную схему (3.14) в виде

$$u_{t,j} = \nu_j u_{\bar{x}x,j}^n + \frac{1}{4} (\nu_{x,j} + \nu_{\bar{x},j}) (u_{x,j}^n + u_{\bar{x},j}^n) \quad (3.15)$$

и выясним, чем она отличается от явной консервативной схемы (3.8)

$$u_{t,j} = (a u_{\bar{x}}^n)_{x,j}, \quad (3.16)$$

где $a_j = \nu_{j-1/2}$, $a_{j+1} = \nu_{j+1/2}$.

Для этого преобразуем правую часть консервативной схемы:

$$\begin{aligned} (a u_{\bar{x}})_{x,j} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\nu_j + \nu_{j+1}}{2} u_{\bar{x},j+1} - \frac{\nu_j + \nu_{j-1}}{2} u_{\bar{x},j} \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{\nu_j + \nu_j + h\nu_{x,j}}{2} u_{\bar{x},j+1} - \frac{\nu_j + \nu_j - h\nu_{\bar{x},j}}{2} u_{\bar{x},j} \right) = \\ &= \nu_j u_{\bar{x}x,j} + \frac{1}{2} \nu_{x,j} u_{x,j} + \frac{1}{2} \nu_{\bar{x},j} u_{\bar{x},j}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu_j u_{\bar{x}x,j} = (au_{\bar{x}})_{x,j} - \frac{1}{2}\nu_{x,j}u_{x,j} - \frac{1}{2}\nu_{\bar{x},j}u_{\bar{x},j}$$

и недивергентная схема (3.15) может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} u_{t,j} &= (au_{\bar{x}}^n)_{x,j} - \\ &- \frac{1}{2}\nu_{x,j}u_{x,j}^n - \frac{1}{2}\nu_{\bar{x},j}u_{\bar{x},j}^n + \frac{1}{4}(\nu_{x,j}u_{x,j}^n + \nu_{x,j}u_{\bar{x},j}^n + \nu_{\bar{x},j}u_{x,j}^n + \nu_{\bar{x},j}u_{\bar{x},j}^n) = \\ &= (au_{\bar{x}}^n)_{x,j} + \frac{1}{4}(\nu_{\bar{x},j}u_{x,j}^n - \nu_{x,j}u_{x,j}^n + \nu_{x,j}u_{\bar{x},j}^n - \nu_{\bar{x},j}u_{\bar{x},j}^n) = \\ &= (au_{\bar{x}}^n)_{x,j} - \frac{h}{4}u_{x,j}^n\nu_{\bar{x}x,j} + \frac{h}{4}u_{\bar{x},j}^n\nu_{\bar{x}x,j} = (au_{\bar{x}}^n)_{x,j} - \frac{h^2}{4}u_{\bar{x}x,j}^n\nu_{\bar{x}x,j}. \end{aligned}$$

Таким образом, недивергентная схема преобразована к консервативной схеме с дополнительным членом в правой части:

$$u_{t,j} = (au_{\bar{x}}^n)_{x,j} - \frac{h^2}{4}u_{\bar{x}x,j}^n\nu_{\bar{x}x,j}. \quad (3.17)$$

Умножим полученные уравнения на $h\tau$:

$$u_j^{n+1}h - u_j^n h = \left(W_{j-1/2}^n - W_{j+1/2}^n\right)\tau - \frac{h^2}{4}u_{\bar{x}x,j}^n\nu_{\bar{x}x,j}\tau h$$

и просуммируем почленно по всем элементарным ячейкам составной области Ω . В результате вместо дискретного закона сохранения (3.11)

$$\sum_{j=k}^l u_j^{p+m}h - \sum_{j=k}^l u_j^p h = \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{k-1/2}^n\tau - \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{l+1/2}^n\tau \quad (3.18)$$

получим следующее равенство:

$$\sum_{j=k}^l u_j^{p+m}h - \sum_{j=k}^l u_j^p h = \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{k-1/2}^n\tau - \sum_{n=p}^{p+m-1} W_{l+1/2}^n\tau - R,$$

где

$$R = \frac{h^2}{4} \sum_{n=p}^{p+m-1} \sum_{j=k}^l u_{\bar{x}x,j}^n \nu_{\bar{x}x,j} h \tau.$$

Таким образом, действительно, недивергентная схема не является консервативной схемой. ■

Теперь понятно, в каких случаях важно, чтобы схема была консервативной, а в каких можно пренебречь этим свойством. Консервативная схема после умножения на $h\tau$ и суммирования по элементарным ячейкам области $\Omega = [a, b] \times [t^p, t^{p+m}]$, где $a = x_{k-1/2}$, $b = x_{l+1/2}$, привела к дискретному аналогу интегрального закона сохранения тепла

$$\int_a^b u(x, t^{p+m}) dx - \int_a^b u(x, t^p) dx = \int_{t^p}^{t^{p+m}} W(a, t) dt - \int_{t^p}^{t^{p+m}} W(b, t) dt,$$

а для недивергентного уравнения мы получили дискретный аналог следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} & \int_a^b u(x, t^{p+m}) dx - \int_a^b u(x, t^p) dx = \\ & = \int_{t^p}^{t^{p+m}} W(a, t) dt - \int_{t^p}^{t^{p+m}} W(b, t) dt - \frac{h^2}{4} \int_{t^p}^{t^{p+m}} \int_a^b \nu_{xx} u_{xx} dx dt, \end{aligned}$$

которое отличается от уравнения баланса тепла последним членом: *дисбалансом*.

Если все функции гладкие, то отличие будет небольшим — в пределах погрешности аппроксимации. Если же функция ν разрывна, то будет разрывной и производная u_x (см. условие сопряжения (3.3)) и подынтегральное выражение в члене дисбаланса становится значительным. В результате решение по данной *неконсервативной* схеме может сходиться при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ к другому состоянию, сильно отличающемуся от истинного.

3.3. Устойчивость консервативной схемы. Возьмем однородную консервативную схему с весами (3.8):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n],$$

где $\Lambda u_j = (au_{\bar{x}})_{x,j}$, и рассмотрим для нее разностную задачу с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n], \\ & u_0^n = u_N^n = 0, \quad u_j^0 = u_0(x_j). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Теорема 3.1. Пусть коэффициент теплопроводности ν не зависит от времени и $0 < c_1 \leq \nu(x) \leq c_2$. Тогда при $\sigma \geq 0,5$ консервативная схема с весами (3.19) абсолютно устойчива. При $\sigma < 0,5$ для устойчивости этой схемы необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sigma \geq \hat{\sigma}_0 \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|}. \quad (3.20)$$

Доказательство. По теореме 2.4.2 оператор A второй разностной производной с переменными коэффициентами, введенный по формуле

$$Au = -\Lambda u = -(au_{\bar{x}})_x, \quad (3.21)$$

является самосопряженным и, поскольку его коэффициенты удовлетворяют условиям $0 < c_1 \leq a_j \leq c_2$, ($j = 1, \dots, N-1$), то A будет положительно определенным оператором, причем имеет место оценка (2.4.27)

$$c_1 \frac{8}{\tau^2} \|u\|^2 \leq (Au, u) \leq c_2 \frac{4}{h^2} \|u\|^2. \quad (3.22)$$

Тогда утверждение теоремы вытекает из следствия 1 теоремы 2.7. ■

Получим теперь достаточное условие устойчивости консервативной схемы. Из правого неравенства оценки (3.22) следует, что $\|A\| \leq 4c_2/h^2$. Тогда

$$\hat{\sigma}_0 \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau \|A\|} \leq \sigma_0 \equiv \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau c_2},$$

поэтому условие $\sigma \geq \sigma_0$ будет достаточным условием устойчивости консервативной схемы при $\sigma < 0,5$.

З А Д А Ч И

3.1. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \Lambda^n u_j^n + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (3.23)$$

аппроксимирует первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= (\nu(x, t)u_x)_x + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_0(0) &= \mu_0(0), \quad u_0(l) = \mu_l(0). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости в равномерной норме явной схемы (3.23) для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом $\nu(x, t) > 0$.

3.3. Определить, с каким порядком разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu_j^n \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{\nu_{j+1}^n - \nu_{j-1}^n}{2h} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (3.25)$$

аппроксимирует начально-краевую задачу (3.24).

3.4. Построить явную схему, которая с порядком $O(\tau + h^2)$ аппроксимирует начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= (\nu(x, t)u_x)_x + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ (\nu u_x)(0, t) &= \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ (\nu u_x)(l, t) &= \mu_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \nu(0, 0)u_{0,x}(0) &= \mu_0(0), \quad \nu(l, 0)u_{0,x}(l) = \mu_l(0). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для аппроксимации производных $u_x(0, t)$ и $u_x(l, t)$ использовать двухточечный шаблон.

3.5. Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом $\nu(x, t) > 0$ и однородными краевыми условиями второго рода:

$$\begin{aligned} u_t &= (\nu(x, t)u_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ (\nu u_x)(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ (\nu u_x)(l, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \nu(0, 0)u_{0,x}(0) &= 0, \quad \nu(l, 0)u_{0,x}(l) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Показать, что для решения этой задачи количество тепла $U(t)$, определяемое по формуле

$$U(t) = \int_0^l u(x, t) dx, \quad (3.28)$$

не меняется со временем, т. е.

$$U(t) = \text{const} = U(0), \quad 0 < t \leq T. \quad (3.29)$$

3.6. Показать, что разностная схема

$$\begin{aligned} u_{t,j} &= \Lambda^n u_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \nu_{1/2}^n u_{x,0}^n - \frac{h}{2} u_{t,0} &= 0, \\ \nu_{N-1/2}^n u_{x,N}^n + \frac{h}{2} u_{t,N} &= 0, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.30)$$

аппроксимирует задачу (3.27) с порядком $O(\tau + h^2)$ и сохраняет дискретный аналог количества тепла (3.28), определяемый формулой

$$U^n = u_0^n \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j^n h + u_N^n \frac{h}{2}, \quad (3.31)$$

т. е.

$$U^n = \text{const} = U^0, \quad n = 1, \dots, M.$$

3.7. Показать, что для недивергентной разностной схемы

$$\begin{aligned} u_{t,j} &= \nu_j^n \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{\nu_{j+1}^n - \nu_{j-1}^n}{2h} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, \\ \nu_{1/2}^n u_{x,0}^n - \frac{h}{2} u_{t,0} &= 0, \quad \nu_{N-1/2}^n u_{x,N}^n + \frac{h}{2} u_{t,N} = 0, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \end{aligned} \quad (3.32)$$

аппроксимирующей задачу (3.27) с порядком $O(\tau + h^2)$, дискретный аналог количества тепла (3.31) не является сохраняющейся величиной. Вычислить дисбаланс количества тепла $U^{n+1} - U^n$ при переходе с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й.

3.8. Показать, что схема с весами (3.8)

$$\begin{aligned}
 u_{t,j} &= \sigma \Lambda^{n+1} u_j^{n+1} + (1 - \sigma) \Lambda^n u_j^n + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
 \sigma \nu_{1/2}^{n+1} u_{x,0}^{n+1} + (1 - \sigma) \nu_{1/2}^n u_{x,0}^n - \frac{h}{2} (u_{t,0} - \varphi_0^n) &= \mu_0^{(\sigma)}, \\
 \sigma \nu_{N-1/2}^{n+1} u_{\bar{x},N}^{n+1} + (1 - \sigma) \nu_{N-1/2}^n u_{\bar{x},N}^n + \frac{h}{2} (u_{t,N} - \varphi_N^n) &= \mu_l^{(\sigma)}, \\
 u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

где $\mu_k^{(\sigma)} = \sigma \mu_k(t^{n+1}) + (1 - \sigma) \mu_k(t^n)$, ($k = 0, l$), аппроксимирует задачу (3.26) с погрешностью $O(\tau + h^2)$, если $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$ и с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$, если $\sigma = 0, 5$ и $\varphi_j^n = f(x_j, t^n + \tau/2)$.

3.9. Показать, что схема с весами (3.33), аппроксимирующая при $\varphi_j^n \equiv 0$ задачу (3.27), сохраняет количество тепла (3.31).

3.10. Обозначим через $H_{h,1}$ линейное пространство сеточных функций, определенных на одномерной сетке $\bar{\omega}_h$. При каждом фиксированном n решение u^n задачи (3.33) является элементом пространства $H_{h,1}$. В пространстве $H_{h,1}$ введем норму

$$\|u\|_{(1)} = \sqrt{(u, u)_{(1)}}, \quad u \in H_{h,1},$$

где

$$\begin{aligned}
 (u, v)_{(1)} &= u_0 v_0 \frac{h}{2} + (u, v) + u_N v_N \frac{h}{2}, \quad u, v \in H_{h,1}, \\
 (u, v) &= \sum_{j=1}^{N-1} u_j v_j h.
 \end{aligned}$$

В пространстве $H_{h,1}$ определим оператор

$$A^n u_j = \begin{cases} -\Lambda^n u_j, & j = 1, \dots, N-1, \\ -\nu_{1/2}^n \frac{2}{h} u_{x,0}, & j = 0, \\ \nu_{N-1/2}^n \frac{2}{h} u_{\bar{x},N}, & j = N, \end{cases} \tag{3.34}$$

где разностный оператор Λ^n задан по формуле (3.9). Тогда схему с весами (3.33) можно записать в операторном виде

$$u_t + \sigma A^{n+1} u^{n+1} + (1 - \sigma) A^n u^n = f^n, \tag{3.35}$$

где

$$f_j^n = \begin{cases} \varphi_j^n, & j = 1, \dots, N-1, \\ \varphi_0^n - \frac{2}{h} \mu_0^{(\sigma)}, & j = 0, \\ \varphi_N^n + \frac{2}{h} \mu_l^{(\sigma)}, & j = N. \end{cases}$$

Доказать, что оператор A^n является самосопряженным в $H_{h,1}$ и неотрицательным, но не является положительным. Найти нормированную собственную функцию, отвечающую нулевому собственному значению оператора A^n .

§ 4. Трехслойные схемы для уравнения теплопроводности

4.1. Схема Ричардсона. До сих пор для уравнения теплопроводности

$$u_t = \nu u_{xx} + f(x, t) \quad (4.1)$$

с постоянным коэффициентом $\nu = \text{const} > 0$ рассматривались двухслойные схемы. Для этого уравнения могут быть построены и трехслойные схемы, простейшей из которых является схема Ричардсона

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f_j^n. \quad (4.2)$$

Эта схема является явной и ее погрешность аппроксимации имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$. Напомним, что двухслойная явная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Однако при условии $\tau = O(h)$ и даже при условии $\tau = O(h^2)$ схема Ричардсона будет неустойчивой, несмотря на то, что она аппроксимирует уравнение теплопроводности.

Чтобы в этом убедиться, используем спектральный метод Неймана исследования устойчивости. Пусть, например, шаги τ и h связаны законом предельного перехода

$$\frac{\nu\tau}{h^2} = r = \text{const}. \quad (4.3)$$

Возьмем решение вида (1.54)

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\varphi}, \quad \varphi \in R \quad (4.4)$$

и подставим его в однородное разностное уравнение (4.2). В результате для определения множителя перехода $\lambda(\varphi)$ получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 + \lambda 8r \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1 = 0.$$

Корни этого уравнения действительны, различны и один из них при любом $\varphi \neq 2\pi k$ по модулю больше единицы. Следовательно, для любого r схема Ричардсона неустойчива при законе предельного перехода (4.3), т. е. она уступает даже явной двухслойной схеме, устойчивой при $r \leq 0,5$.

4.2. Схема Дюфорта — Франкела (схема «ромб») получается из схемы Ричардсона после замены величины u_j^n в правой части уравнения (4.2) на $0,5(u_j^{n-1} + u_j^{n+1})$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{j-1}^n - (u_j^{n-1} + u_j^{n+1}) + u_{j+1}^n}{h^2} + f_j^n. \quad (4.5)$$

Множитель перехода λ удовлетворяет уравнению

$$(1 + 2r)\lambda^2 - 4r\lambda \cos \varphi + 2r - 1 = 0,$$

где $r = \nu\tau/h^2$. Покажем, что при любых $r > 0$ и φ для корней этого уравнения выполняется неравенство $|\lambda| \leq 1$. В самом деле, дискриминант $d = 1 - 4r^2 \sin^2 \varphi$ рассматриваемого квадратного уравнения может быть как отрицательным, так и неотрицательным. Если корни λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные, то

$$0 < |\lambda|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2r - 1}{2r + 1} < 1.$$

Если корни действительные, т. е. $4r^2 \sin^2 \varphi \leq 1$, то $0 \leq d \leq 1$ и

$$-1 \leq \lambda_{1,2} = \frac{2r \cos \varphi \mp \sqrt{d}}{2r + 1} \leq 1.$$

Итак, схема Дюфорта — Франкела, полученная небольшой модификацией схемы Ричардсона и также являющаяся явной, удовлетворяет необходимому условию устойчивости при произвольном значении r , т. е. при любых соотношениях между шагами τ и h .

Исследуем теперь аппроксимационные свойства схемы Дюфорта — Франкела. Для этого перепишем схему (4.5) в следующем виде:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} - \nu \frac{\tau^2}{h^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} + f_j^n.$$

Отсюда видно, что схема «ромб» получается из схемы Ричардсона, имеющей порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$, добавлением члена

$$-\nu \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 u_{\bar{t}t},$$

обеспечивающего выполнение необходимого условия устойчивости, но портящего аппроксимационные свойства, поскольку получающаяся в результате добавления этого члена схема Дюфорта — Франкела имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2)$, т. е. она является лишь условно аппроксимирующей.

Определение. Если погрешность аппроксимации схемы стремится к нулю лишь при определенном законе предельного перехода $\tau = \tau(h)$, то говорят, что схема условно аппроксимирует дифференциальную задачу.

Если взять $\tau = \alpha h$, где $\alpha = \text{const}$, то очевидно, что схема будет аппроксимировать не уравнение теплопроводности, а уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

Поэтому необходимо, чтобы

$$\frac{\tau}{h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Например, взять $\tau = O(h^2)$. Тогда погрешность аппроксимации будет иметь порядок $O(h^2)$.

Таким образом, использование рассмотренных явных схем для уравнения теплопроводности возможно только при дополнительных ограничениях на шаги сетки: для явной двухслойной схемы (1.34) из-за условной устойчивости (1.52), для явной трехслойной схемы «ромб» (4.5) — из-за условной аппроксимации (4.6).

4.3. Неявная трехслойная схема записывается так:

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + f_j^{n+1}. \quad (4.7)$$

Эта схема имеет пятиточечный шаблон и ее погрешность аппроксимации равна $O(\tau^2 + h^2)$. Множитель перехода λ удовлетворяет уравнению

$$\left(3 + 8r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$

Для комплексно-сопряженных корней этого уравнения выполняется неравенство

$$0 < |\lambda|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{3 + 8r \sin^2 \frac{\varphi}{2}} < 1.$$

Если корни действительные, то для дискриминанта $d = 1 - 8r \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ выполняется неравенство $0 \leq d \leq 1$ и, следовательно,

$$0 < \lambda_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{d}}{3 + 8r \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leq 1.$$

Итак, неявная трехслойная схема удовлетворяет необходимому условию устойчивости при любых τ и h и она имеет второй порядок аппроксимации по τ и h . Однако, чтобы начать счет по этой схеме, необходимо, как это следует из формулы (4.7), задать начальные данные на двух временных слоях: нулевом и первом.

Положим

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad u_j^1 = u_j^*, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

где сеточная функция u_j^* подлежит определению. Подберем ее так, чтобы общий порядок аппроксимации схемы был не ниже, чем порядок аппроксимации дифференциального уравнения $O(\tau^2 + h^2)$. Имеем

$$\psi_j^1 = (L_h(u_h) - f_h)_j^1 = u(x_j, \tau) - u_j^* = u(x_j, 0) + \tau u_t(x_j, 0) + O(\tau^2) - u_j^*.$$

Предполагая, что решение $u(x, t)$ начально-краевой задачи удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.1) не только при $t > 0$, но и при $t = 0$, получаем

$$\psi_j^1 = u_0(x_j) + \tau(\nu u_{xx}(x_j, 0) + f(x_j, 0)) + O(\tau^2) - u_j^*.$$

Следовательно, функцию u_j^* можно выбрать в виде

$$u_j^* = u_0(x_j) + \tau \left(\nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j) + f(x_j, 0) \right).$$

Заметим, что вместо второй производной функции u_0 можно использовать вторую разностную производную, что также приводит к схеме с порядком аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. В самом деле, если начальные данные на первом временном слое заданы по формуле

$$u_j^1 = u_0(x_j) + \tau \left(\nu \frac{u_0(x_{j-1}) - 2u_0(x_j) + u_0(x_{j+1}))}{h^2} + f(x_j, 0) \right), \quad (4.8)$$

то для погрешности аппроксимации при $t = \tau$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \psi_j^1 &= u(x_j, \tau) - u_0(x_j) - \tau \left(\nu \frac{u_0(x_{j-1}) - 2u_0(x_j) + u_0(x_{j+1}))}{h^2} + f(x_j, 0) \right) = \\ &= u(x_j, 0) + \tau u_t(x_j, 0) + O(\tau^2) - \\ &- u_0(x_j) - \tau \left(\nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}(x_j) + O(h^2) + f(x_j, 0) \right) = O(\tau^2 + \tau h^2). \end{aligned}$$

С учетом порядка аппроксимации дифференциального уравнения отсюда следует, что рассматриваемая трехслойная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком $O(\tau^2 + h^2)$.

З А Д А Ч И

4.1. Определить, с каким порядком трехслойная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \nu \Lambda [\sigma u_j^{n+1} + (1 - 2\sigma)u_j^n + \sigma u_j^{n-1}] + \varphi_j^n, \quad (4.9)$$

где Λ — оператор второй разностной производной

$$\Lambda u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

аппроксимирует уравнение (4.1). С помощью спектрального метода Неймана получить необходимое условие устойчивости этой схемы при $\sigma = \text{const} \geq 0$ и законе предельного перехода (4.3).

4.2. Определить, с каким порядком трехслойная разностная схема

$$(1 + \sigma) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \sigma \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = \nu \Lambda u_j^{n+1} + \varphi_j^n \quad (4.10)$$

аппроксимирует уравнение (4.1). С помощью спектрального метода Неймана получить необходимое условие устойчивости этой схемы при $\sigma = \text{const} > -1$ и законе предельного перехода (4.3).

§ 5. Схемы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x, y) \mid 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y\}$ в плоскости xOy , через γ — его границу, $D = \Omega \times (0, T]$, боковую поверхность параллелепипеда \bar{D} обозначим через $\Gamma = \gamma \times [0, T]$. Тогда первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными формулируется так: требуется найти непрерывное в замкнутой области \bar{D} решение задачи

$$\begin{aligned} u_t &= \nu(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & (x, y, t) \in D, \\ u(x, y, t) &= \mu(x, y, t), & (x, y, t) \in \Gamma, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), & (x, y) \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Рассматривая разностные схемы для задачи (5.1), мы иногда будем указывать их обобщения на трехмерный случай, т. е. рассматривать схемы для решения начально-краевой задачи в трехмерной области

$$\begin{aligned} u_t &= \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), & (x, y, z, t) \in D, \\ u(x, y, z, t) &= \mu(x, y, z, t), & (x, y, z, t) \in \Gamma, \\ u(x, y, z, 0) &= u_0(x, y, z), & (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \quad 0 < z < l_z\}$ — параллелепипед в R^3 .

Кроме того, мы будем выделять те разностные схемы, которые пригодны и для решения *методом установления* задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + f(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= \mu(x, y), & (x, y) \in \gamma. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эта задача Дирихле называется *стационарной*. В ней искомая функция, ее граничные значения и функция f не зависят от времени. Суть метода установления заключается в переходе от стационарной задачи (5.3) к поиску решения нестационарной задачи (5.1) и его предела при $t \rightarrow \infty$.

Для построения разностной схемы введем сетки. Равномерную сетку в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ обозначим через

$$\bar{\omega}_h = \{(x_j, y_m) \mid x_j = jh_x, \quad y_m = mh_y, \quad j = 0, \dots, N_x, \quad m = 0, \dots, N_y\},$$

где $h_x = l_x/N_x$, $h_y = l_y/N_y$. Совокупность внутренних узлов обозначим

$$\omega_h = \{(x_j, y_m) \mid j = 1, \dots, N_x - 1, m = 1, \dots, N_y - 1\},$$

граничных — γ_h . Для сетки на отрезке $[0, T]$ будем использовать обозначение

$$\bar{\omega}_\tau = \{t^n \mid t^n = n\tau, n = 0, \dots, M\},$$

при этом $\tau = T/M$. Сетку в расчетном цилиндре D будем обозначать $\omega_{h\tau}$:

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_j, y_m, t^n) \mid (x_j, y_m) \in \omega_h, t^n \in \bar{\omega}_\tau\}.$$

Множество узлов, лежащих на Γ , обозначим через $\Gamma_h = \gamma_h \times \bar{\omega}_\tau$.

5.1. Аппроксимация. Вначале рассмотрим явную схему для решения уравнения теплопроводности. С помощью операторов вторых разностных производных

$$\Lambda_{xx} u_{j,m}^n \equiv u_{\bar{x}x,j,m}^n = \frac{u_{j-1,m}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j+1,m}^n}{h_x^2},$$

$$\Lambda_{yy} u_{j,m}^n \equiv u_{\bar{y}y,j,m}^n = \frac{u_{j,m-1}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j,m+1}^n}{h_y^2}$$

и разностного оператора Лапласа $\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}$ явную схему можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_{j,m}^n + \varphi_{j,m}^n, \quad (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m, t^n), \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\varphi_{j,m}^n = f(x_j, y_m, t^n)$.

Исследуем явную схему (5.4). Путь исследования сходимости схем, сводящий этот вопрос к исследованию аппроксимации и устойчивости, сформулирован нами ранее в столь общей форме, что рассматриваемую сейчас двумерную задачу можно считать частным случаем.

Поскольку начальные и граничные условия аппроксимируются точно, то достаточно исследовать аппроксимацию только дифференциального уравнения. Предполагая гладкость точного решения $u(x, y, t)$, можем записать

$$u(x_j, y_m, t^{n+1}) = (u + \tau u_t)(x_j, y_m, t^n) + O(\tau^2),$$

$$u(x_{j\pm 1}, y_m, t^n) = \left(u \pm h_x u_x + \frac{h_x^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h_x^3}{6} u_{xxx} \right) (x_j, y_m, t^n) + O(h_x^4),$$

$$u(x_j, y_{m\pm 1}, t^n) = \left(u \pm h_y u_y + \frac{h_y^2}{2} u_{yy} \pm \frac{h_y^3}{6} u_{yyy} \right) (x_j, y_m, t^n) + O(h_y^4).$$

Подставляя эти выражения в формулу для погрешности аппроксимации, получаем

$$(\psi_h)_{j,m}^n = (L_h(u)_h - f_h)_{j,m}^n = O(\tau + h_x^2 + h_y^2),$$

т. е., как и в одномерном случае, явная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространственным переменным. Здесь мы использовали операторную запись схемы (5.4)

$$L_h u_h = f_h, \quad (5.5)$$

где

$$L_h u_h \equiv \begin{cases} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} - \nu \Lambda u_{j,m}^n, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m}^n, & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0, & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{cases}$$

$$f_h \equiv \begin{cases} f(x_j, y_m, t^n), & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ \mu(x_j, y_m, t^n), & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h \\ u_0(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{cases}$$

Аналогично показывается, что полностью неявная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_{j,m}^{n+1} + \varphi_{j,m}^n, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m, t^n), & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\varphi_{j,m}^n = f(x_j, y_m, t^{n+1})$, тоже имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$, а схема Кранка — Николсон

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \frac{\nu}{2} \Lambda (u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^n) + \varphi_{j,m}^n, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m, t^n), & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\varphi_{j,m}^n = f_{j,m}^{n+1/2} \equiv f(x_j, y_m, t^n + \tau/2)$, имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Реализация явной схемы предельно проста. Зная сеточные функции на n -м слое, по рекуррентным формулам отыскивается сеточная функция на $(n+1)$ -м слое. Однако оказывается, что, будучи чрезвычайно простой в реализации, явная схема устойчива лишь при жестком ограничении на шаг τ . Покажем это.

5.2. Спектральный признак устойчивости. Подставим сеточную функцию

$$u_{j,m}^n = \lambda^n e^{i(j\varphi_1 + m\varphi_2)}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in R \quad (5.8)$$

в *однородное* разностное уравнение схемы (5.4). После сокращения на общие множители получим уравнение относительно λ :

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \nu \frac{e^{-i\varphi_1} - 2 + e^{i\varphi_1}}{h_x^2} + \nu \frac{e^{-i\varphi_2} - 2 + e^{i\varphi_2}}{h_y^2},$$

из которого следует, что

$$\lambda = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2},$$

где

$$r_x = \nu \frac{\tau}{h_x^2}, \quad r_y = \nu \frac{\tau}{h_y^2}. \quad (5.9)$$

Пусть шаги сетки стремятся к нулю по следующему закону предельного перехода:

$$r_x = C_1 = \text{const}, \quad r_y = C_2 = \text{const}.$$

Тогда множитель перехода λ не зависит от τ и для устойчивости необходимо выполнение неравенства $|\lambda| \leq 1$, т. е.

$$-1 \leq 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \leq 1.$$

Правое неравенство выполняется всегда. Из левого следует, что

$$2r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \leq 1.$$

Поскольку это неравенство должно выполняться при любых значениях φ_1 и φ_2 , то необходимое условие устойчивости эквивалентно ограничению

$$\tau \leq \frac{1}{2\nu \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)}. \quad (5.10)$$

Для квадратной сетки $h_x = h_y = h$ неравенство (5.10) принимает вид

$$\tau \leq \frac{h^2}{4\nu},$$

а в одномерном случае необходимое условие устойчивости выглядело так:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\nu}.$$

Следовательно, в двумерном случае условие устойчивости накладывает в 2 раза более жесткое ограничение на величину временного шага по сравнению с одномерным случаем и, следовательно, делает применение явного метода на практике еще менее целесообразным.

В трехмерном случае явная схема имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m,k}^{n+1} - u_{j,m,k}^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_{j,m,k}^n + f_{j,m,k}^n, \quad (x_j, y_m, z_k) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m,k}^n &= \mu(x_j, y_m, z_k, t^n), \quad (x_j, y_m, z_k, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m,k}^0 &= u_0(x_j, y_m, z_k), \quad (x_j, y_m, z_k) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где оператор $\Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} + \Lambda_{zz}$ есть сумма операторов вторых производных по направлениям x , y и z . Например:

$$\Lambda_{zz} u_{j,m,k}^n \equiv u_{zz,j,m,k}^n = \frac{u_{j,m,k+1}^n - 2u_{j,m,k}^n + u_{j,m,k-1}^n}{h_z^2}.$$

Легко проверить, что для явной схемы (5.11) необходимое условие устойчивости Неймана эквивалентно неравенству

$$\tau \leq \frac{1}{2\nu \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right)}, \quad (5.12)$$

что для кубической сетки $h_x = h_y = h_z = h$ приводит к необходимости выполнения неравенства

$$\tau \leq \frac{h^2}{6\nu},$$

т. е. к еще более жесткому ограничению на шаг по времени, чем в двумерном случае.

5.3. Принцип максимума может использоваться для исследования устойчивости схем и в многомерном случае. Пусть U_h — пространство сеточных функций u_h , которому принадлежит решение схемы (5.5), F_h — пространство сеточных функций, которому принадлежит правая часть схемы f_h . Введем равномерную норму на слое

$$\|u^n\|_C = \max_{j,m} |u_{j,m}^n|$$

и равномерную норму в пространствах U_h и F_h :

$$\|u_h\|_{U_h} = \max_n \|u^n\|_C; \quad (5.13)$$

$$\|f_h\|_{F_h} = \max \left[\max_{\Gamma_h} |\mu(x_j, y_m, t^n)|, \|(u_0)_h\|_C, \max_n \|\varphi^n\|_C \right]. \quad (5.14)$$

Определение. Говорят, что разностная схема (5.5) удовлетворяет принципу максимума, если при всех $n = 0, \dots, M-1$ для ее решения u_h выполняется неравенство

$$\|u^{n+1}\|_C \leq \max \left\{ \max_{\Gamma_h} |\mu(x_j, y_m, t^l)|, \|u^n\|_C + \tau \max_l \|\varphi^l\|_C \right\}. \quad (5.15)$$

Теорема 5.1. Пусть линейная разностная схема (5.5) удовлетворяет принципу максимума. Тогда она устойчива в равномерной норме.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.1, поэтому укажем лишь основные его этапы. Решение исходной задачи (5.5) представим в виде суммы $u_h = v_h + w_h$ решений v_h и w_h следующих задач:

$$L_h v_h = \eta_h \equiv \begin{cases} 0, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ \mu(x_j, y_m, t^n), & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_0(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h \end{cases}$$

и

$$L_h w_h = \theta_h \equiv \begin{cases} \varphi_{j,m}^n, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, \dots, M-1, \\ 0, & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h \\ 0, & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{cases}$$

По условию для каждой из этих задач выполняется принцип максимума, поэтому

$$\|v^{n+1}\|_C \leq \max \left\{ \max_{\Gamma_h} |\mu(x_j, y_m, t^l)|, \|(u_0)_h\|_C \right\} \leq \|f_h\|_{F_h},$$

$$\|w^{n+1}\|_C \leq (n+1)\tau \max_l \|\varphi^l\|_C \leq T \max_l \|\varphi^l\|_C \leq T \|f_h\|_{F_h}.$$

Следовательно,

$$\|u^{n+1}\|_C \leq \|v^{n+1}\|_C + \|w^{n+1}\|_C \leq (1+T) \|f_h\|_{F_h}.$$

Это неравенство выполняется при всех n , поэтому

$$\|u_h\|_{U_h} \leq C \|f_h\|_{F_h},$$

где $C = 1 + T$, т. е. схема устойчива в равномерной сеточной норме. ■

Следствие 1. При выполнении условия (5.10) явная схема (5.4) устойчива в равномерной норме.

Доказательство. Покажем, что явная схема удовлетворяет принципу максимума. Для этого перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} u_{j,m}^{n+1} &= (1 - 2r_x - 2r_y) u_{j,m}^n + \\ &+ r_x (u_{j-1,m}^n + u_{j+1,m}^n) + r_y (u_{j,m-1}^n + u_{j,m+1}^n) + \tau f_{j,m}^n. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Очевидно, что при выполнении условия (5.10) справедливо неравенство $1 - 2r_x - 2r_y \geq 0$, поэтому можем написать

$$\begin{aligned} |u_{j,m}^{n+1}| &\leq (1 - 2r_x - 2r_y) |u_{j,m}^n| + \\ &+ r_x (|u_{j-1,m}^n| + |u_{j+1,m}^n|) + r_y (|u_{j,m-1}^n| + |u_{j,m+1}^n|) + \tau |f_{j,m}^n| \leq \\ &\leq (1 - 2r_x - 2r_y) \|u^n\|_C + 2r_x \|u^n\|_C + 2r_y \|u^n\|_C + \tau \max_n \|f^n\|_C, \end{aligned}$$

или

$$\max_{(x_j, y_m) \in \omega_h} |u_{j,m}^{n+1}| \leq \|u^n\|_C + \tau \max_n \|f^n\|_C.$$

Учитывая, что

$$u_{j,m}^{n+1}|_{\Gamma_h} = \mu(x_j, y_m, t^{n+1}), \quad (x_j, y_m, t^{n+1}) \in \Gamma_h, \quad (5.17)$$

получаем принцип максимума (5.15). Тогда из теоремы 5.1 следует, что условие (5.10) является достаточным для устойчивости явной схемы (5.4) в равномерной норме по начальным данным, краевым условиям и по правой части. ■

5.4. Устойчивость в среднеквадратичной норме. Чтобы исследовать устойчивость схем в среднеквадратичной норме, вначале изучим свойства разностного оператора Лапласа Λ .

Аналогично одномерному случаю через H_h обозначим пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в нуль на ее границе γ_h . В пространстве H_h введем скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y-1} u_{j,m} v_{j,m} h_x h_y, \quad u, v \in H_h$$

и норму

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad u \in H_h. \quad (5.18)$$

Пространство H_h является линейным $(N_x - 1)(N_y - 1)$ -мерным пространством. Рассмотрим в нем следующие операторы:

$$A_x v = -\Lambda_{xx} v, \quad v \in H_h, \quad (5.19)$$

$$A_y v = -\Lambda_{yy} v, \quad v \in H_h, \quad (5.20)$$

$$A = A_x + A_y = -(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) = -\Lambda. \quad (5.21)$$

Возьмем собственные функции $u^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N_x - 1$) и $v^{(l)}$ ($l = 1, \dots, N_y - 1$) операторов A_x и A_y , соответственно

$$u_{j,m}^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l_x}\right), \quad j = 0, \dots, N_x,$$

$$v_{j,m}^{(l)} = \sqrt{\frac{2}{l_y}} \sin\left(\frac{l\pi y_m}{l_y}\right), \quad m = 0, \dots, N_y$$

и образуем систему функций

$$\psi_{j,m}^{(k,l)} = u_j^{(k)} \cdot v_m^{(l)} = \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \sin\left(\frac{k\pi x_j}{l_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y_m}{l_y}\right).$$

Здесь в записи сеточных функций $u^{(k)}$ и $v^{(l)}$ мы использовали лишь один индекс (j или m), поскольку от второго индекса значения этих функций не зависят.

Для функций $\psi^{(k,l)}$ выполняются равенства

$$A_x \psi_{j,m}^{(k,l)} = A_x (u_j^{(k)} \cdot v_m^{(l)}) = v_m^{(l)} A_x u_j^{(k)} = \lambda_k^{(x)} u_j^{(k)} \cdot v_m^{(l)} = \lambda_k^{(x)} \psi_{j,m}^{(k,l)},$$

где $\lambda_k^{(x)}$ — собственные значения оператора A_x ,

$$\lambda_k^{(x)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h_x}{2l_x}\right), \quad k = 1, \dots, N_x - 1.$$

Аналогично

$$A_y \psi_{j,m}^{(k,l)} = A_y \left(u_j^{(k)} \cdot v_m^{(l)} \right) = \lambda_l^{(y)} \psi_{j,m}^{(k,l)},$$

где $\lambda_l^{(y)}$ — собственные значения оператора A_y ,

$$\lambda_l^{(y)} = \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \left(\frac{l\pi h_y}{2l_y} \right), \quad l = 1, \dots, N_y - 1.$$

Отсюда следует, что

$$A \psi^{(k,l)} = \left(\lambda_k^{(x)} + \lambda_l^{(y)} \right) \psi^{(k,l)} = \lambda_{(k,l)} \psi^{(k,l)},$$

т. е. функции $\psi^{(k,l)}$ являются собственными функциями оператора A , а числа

$$\lambda_{(k,l)} = \lambda_k^{(x)} + \lambda_l^{(y)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h_x}{2l_x} \right) + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \left(\frac{l\pi h_y}{2l_y} \right) \quad (5.22)$$

— его собственными значениями.

Покажем, что собственные функции оператора A образуют ортонормальный базис в пространстве H_h . В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\psi^{(k,l)}, \psi^{(r,s)} \right) &= \sum_{j=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y-1} \psi_{j,m}^{(k,l)} \psi_{j,m}^{(r,s)} h_x h_y = \\ &= \sum_{j=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y-1} u_j^{(k)} v_m^{(l)} u_j^{(r)} v_m^{(s)} h_x h_y = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N_x-1} u_j^{(k)} u_j^{(r)} h_x \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{N_y-1} v_m^{(l)} v_m^{(s)} h_y \right) = \\ &= \delta^{kr} \delta^{ls} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = r \text{ и } l = s, \\ 0, & \text{если } k \neq r \text{ или } l \neq s. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, система $(N_x - 1)(N_y - 1)$ функций $\psi^{(k,l)}$ ортонормальна в линейном $(N_x - 1)(N_y - 1)$ -мерном пространстве H_h . Следовательно, эту систему можно взять в качестве базиса. Разложение произвольной

функции $v \in H_h$ по этому базису называется *представлением функции в виде конечного ряда Фурье*

$$v = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} c_{k,l} \psi^{(k,l)}, \quad (5.23)$$

коэффициенты которого

$$c_{k,l} = \left(v, \psi^{(k,l)} \right)$$

называются коэффициентами Фурье. При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\|v\|^2 = (v, v) = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} c_{k,l}^2.$$

Лемма 5.1. *Разностный оператор A является самосопряженным и положительно определенным в H_h .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого фиксированного m имеет место вторая разностная формула Грина (по направлению x):

$$\sum_{j=1}^{N_x-1} (\Lambda_{xx}v)_{j,m} w_{j,m} h_x = \sum_{j=1}^{N_x-1} v_{j,m} (\Lambda_{xx}w)_{j,m} h_x.$$

Суммируя последнее равенство по m и умножая на $-h_y$, получаем

$$(A_x v, w) = (v, A_x w).$$

Для каждого фиксированного j также справедлива вторая разностная формула Грина (по направлению y):

$$\sum_{m=1}^{N_y-1} (\Lambda_{yy}v)_{j,m} w_{j,m} h_y = \sum_{m=1}^{N_y-1} v_{j,m} (\Lambda_{yy}w)_{j,m} h_y,$$

откуда следует, что

$$(A_y v, w) = (v, A_y w).$$

Поэтому

$$(Av, w) = ((A_x + A_y)v, w) = (v, A_x w) + (v, A_y w) = (v, Aw),$$

т. е. оператор A является самосопряженным в H_h .

Докажем, что A — положительно определенный оператор. Возьмем произвольную функцию $v \in H_h$ и ее представление в виде конечного ряда Фурье (5.23). Тогда

$$\begin{aligned} (Av, v) &= \left(\sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} c_{k,l} \lambda_{(k,l)} \psi^{(k,l)}, \sum_{r=1}^{N_x-1} \sum_{s=1}^{N_y-1} c_{r,s} \psi^{(r,s)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} c_{k,l}^2 \lambda_{(k,l)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_{\min} \|v\|^2 \leq (Av, v) \leq \lambda_{\max} \|v\|^2,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= \min_{k,l} \lambda_{(k,l)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h_x}{2l_x} \right) + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h_y}{2l_y} \right) \geq \frac{8}{l_x^2} + \frac{8}{l_y^2}, \\ \lambda_{\max} &= \max_{k,l} \lambda_{(k,l)} = \lambda_{(N_x-1, N_y-1)} = \\ &= \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \left(\frac{(N_x-1)\pi h_x}{2l_x} \right) + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \left(\frac{(N_y-1)\pi h_y}{2l_y} \right) = \\ &= \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h_x}{2l_x} \right) + \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h_y}{2l_y} \right) < \frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Таким образом,

$$\left(\frac{8}{l_x^2} + \frac{8}{l_y^2} \right) \|v\|^2 \leq (Av, v) \leq \left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2} \right) \|v\|^2,$$

т. е.

$$A \geq \delta E, \quad \delta = \frac{8}{l_x^2} + \frac{8}{l_y^2} > 0. \quad (5.25)$$

что и доказывает положительную определенность оператора A . \blacksquare

Исследуем теперь устойчивость в среднеквадратичной норме явной схемы (5.4) с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \nu \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}^n, \quad (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n < M, \\ u_{j,m}^n &= 0, \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.26)$$

при этом считаем, что начальная функция u^0 тоже принадлежит пространству H_h .

Пусть $f \equiv 0$. Представим решение задачи (5.26) в виде конечного ряда Фурье (5.23):

$$u^n = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} T_{(k,l)}^n \psi^{(k,l)}, \quad (5.27)$$

подставим его в разностное уравнение задачи (5.26). В результате получим рекуррентное соотношение для коэффициентов $T_{(k,l)}^n$:

$$T_{(k,l)}^{n+1} = q_{(k,l)} T_{(k,l)}^n,$$

где

$$q_{(k,l)} = 1 - \tau\nu\lambda_{(k,l)}. \quad (5.28)$$

Следовательно,

$$T_{(k,l)}^n = q_{(k,l)} T_{(k,l)}^{n-1} = \dots = (q_{(k,l)})^n T_{(k,l)}^0.$$

Коэффициенты $T_{(k,l)}^0$ определим так, чтобы функция (5.27) удовлетворяла начальному условию

$$u^0 = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} T_{(k,l)}^0 \psi^{(k,l)}.$$

Следовательно, в качестве $T_{(k,l)}^0$ надо взять коэффициенты Фурье функции u^0 , т. е. $T_{(k,l)}^0 = (u^0, \psi^{(k,l)})$. Итак, решением задачи (5.26) при $f \equiv 0$ является функция

$$u^n = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} (q_{(k,l)})^n T_{(k,l)}^0 \psi^{(k,l)}. \quad (5.29)$$

Теорема 5.2. *Выполнение условия*

$$\tau \leq \frac{1}{2\nu \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)} \quad (5.30)$$

достаточно для устойчивости явной схемы (5.26) по начальным данным и правой части в среднеквадратичной норме (5.18).

Доказательство. Покажем, что при условии (5.30) справедливо неравенство

$$\max_{k,l} |q_{(k,l)}| < 1. \quad (5.31)$$

В самом деле, поскольку $\lambda_{(k,l)} > 0$, то неравенство $q_{(k,l)} < 1$ выполняется всегда. Кроме того, используя оценку (5.24) и условие (5.30), получаем

$$\begin{aligned} q_{(k,l)} &= 1 - \tau\nu\lambda_{(k,l)} > 1 - \tau\nu\left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2}\right) \geq \\ &\geq 1 - \frac{1}{2\nu\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)} \cdot \nu\left(\frac{4}{h_x^2} + \frac{4}{h_y^2}\right) = -1, \end{aligned}$$

т. е. неравенство (5.31) действительно имеет место.

Оценим теперь решение (5.27) задачи с однородным разностным уравнением, используя равенство Парсеваля и неравенство (5.31):

$$\|u^{n+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} \left(T_{(k,l)}^{n+1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} \left(q_{(k,l)}T_{(k,l)}^n\right)^2 \leq \|u^n\|^2.$$

Таким образом, рассматриваемая схема равномерно устойчива по начальным данным с постоянной $M_1 = 1$:

$$\|u^n\| \leq M_1 \|u^k\|$$

для всех $0 \leq k < n \leq M$. По теореме 2.5 из равномерной устойчивости по начальным данным следует устойчивость двухслойной схемы (5.26) и по правой части в среднеквадратичной норме (5.18). ■

5.5. Метод операторных неравенств можно применять и для исследования устойчивости многомерных разностных схем. Рассмотрим двухслойную схему с весами

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -A [\sigma u^{n+1} + (1 - \sigma)u^n] + \varphi^n, \quad (5.32)$$

где $A = -\nu\Lambda$. Постоянный оператор A является положительным и самосопряженным. Поэтому, согласно следствию 1 из теоремы 2.7, схема с весами (5.32) абсолютно устойчива при $\sigma \geq 0,5$, а при $\sigma < 0,5$ необходимое и достаточное условие устойчивости в энергетическом пространстве H_A дается неравенством (2.50):

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}, \quad (5.33)$$

при этом $\|A\| = \nu \lambda_{\max}$. Таким образом, при $\sigma < 0,5$ необходимым и достаточным условием устойчивости в H_A схемы с весами (5.32) является неравенство

$$\sigma \geq \hat{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau\nu \left[\frac{1}{h_x^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h_x}{2l_x} \right) + \frac{1}{h_y^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h_y}{2l_y} \right) \right]}. \quad (5.34)$$

Хорошим приближением к полученному необходимому и достаточному условию является следующее достаточное условие устойчивости:

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau\nu \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)}. \quad (5.35)$$

5.6. Сходимость явного метода простой итерации. Как сказано выше, метод установления позволяет искать решение стационарной задачи как предельное при $t \rightarrow \infty$ решение соответствующей нестационарной задачи. Применим метод установления для решения стационарной задачи Дирихле (5.3). Аппроксимируем эту задачу разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda u_{j,m} + f_{j,m} &= 0, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \\ u_{j,m} &= \mu(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \gamma_h \end{aligned} \quad (5.36)$$

и рассмотрим соответствующую явную разностную схему для уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m), & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (5.37)$$

при этом функции μ и f в стационарной и нестационарной задачах одни и те же, а начальная функция u_0 в нестационарной задаче берется произвольной, но так, чтобы она удовлетворяла граничному условию

$$u_0(x_j, y_m) = \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \gamma_h. \quad (5.38)$$

Такую функцию можно построить, например, *методом трансфинитной интерполяции*. Сначала с помощью линейной интерполяции по направлению оси Ox строим вспомогательную функцию

$$\tilde{u}_0(x, y) = \frac{x}{l_x} \mu(l_x, y) + \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \mu(0, y),$$

которая удовлетворяет граничным условиям на левой и правой сторонах прямоугольника $\bar{\Omega}$, но не удовлетворяет граничным условиям на нижней и верхней сторонах. Затем, используя интерполяцию в вертикальном направлении, получаем окончательный вид начальной функции

$$u_0(x, y) = \tilde{u}_0(x, y) + \frac{y}{l_y} [\mu(x, l_y) - \tilde{u}_0(x, l_y)] + \left(1 - \frac{y}{l_y}\right) [\mu(x, 0) - \tilde{u}_0(x, 0)], \quad (5.39)$$

удовлетворяющей граничным условиям на всех четырех сторонах прямоугольника $\bar{\Omega}$.

Отметим, что при решении стационарных задач методом установления нам важно предельное при $t \rightarrow \infty$ решение нестационарной задачи, а решения на промежуточных слоях по времени нас не интересуют. В этом заключается сходство метода установления с итерационными методами решения задач. Поэтому будем смотреть на схему (5.37) как на итерационный процесс, в котором n — номер итерационного шага, а τ — итерационный параметр. Рассматриваемая итерационная схема называется *явным методом простой итерации*.

Укажем еще на одну особенность. При использовании схем для решения начально-краевых задач мы должны брать шаги по времени достаточно малыми, чтобы лучше описать нестационарный процесс, например нестационарный процесс теплопроводности. Если же мы используем эту схему как итерационный метод, то итерационный параметр τ выбирается из условия минимальности числа итераций, требуемых для получения решения стационарной задачи с интересующей нас точностью. Следовательно, в итерационном процессе параметр τ может принимать относительно большие значения и возникает проблема выбора оптимального значения для τ , т. е. такого значения $\tau_{\text{опт}}$, при котором итерационный процесс сходится к решению стационарной задачи наиболее быстро.

Теорема 5.3. *При выполнении условия*

$$\tau \leq \frac{1}{2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)} \quad (5.40)$$

явный метод простой итерации (5.37) сходится, при этом

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)}. \quad (5.41)$$

Доказательство. Пусть $z_{j,m}^n$ — погрешность на n -й итерации в узле (x_j, y_m) , т. е.

$$z_{j,m}^n = u_{j,m}^n - u_{j,m}. \quad (5.42)$$

Тогда для z^n получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{z_{j,m}^{n+1} - z_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda z_{j,m}^n, & (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ z_{j,m}^n &= 0, & (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ z_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m) - u_{j,m}, & (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (5.43)$$

В этой задаче разностное уравнение и краевые условия являются однородными, поэтому решение можно представить в виде конечного ряда Фурье (5.29), т. е.

$$z^n = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} (q_{(k,l)})^n T_{(k,l)}^0 \psi^{(k,l)}, \quad (5.44)$$

где в качестве $T_{(k,l)}^0$ надо взять коэффициенты Фурье функции z^0 .

Теперь, используя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} \|z^n\|^2 &= \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} \left[(q_{(k,l)})^n T_{(k,l)}^0 \right]^2 \leq \\ &\leq \left(\max_{k,l} |q_{(k,l)}| \right)^{2n} \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} \left[T_{(k,l)}^0 \right]^2 = \left(\max_{k,l} |q_{(k,l)}| \right)^{2n} \|z^0\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\|z^n\|}{\|z^0\|} \leq \left(\max_{k,l} |q_{(k,l)}| \right)^n. \quad (5.45)$$

Покажем, что оценка (5.45) неулучшаема, т. е. в ней нельзя поставить знак строгого неравенства. В самом деле, пусть

$$\max_{k,l} |q_{(k,l)}| = |q_{(k_0, l_0)}|$$

и

$$z^0 = \psi^{(k_0, l_0)}. \quad (5.46)$$

Тогда $\|z^0\| = 1$, а для коэффициентов Фурье такой начальной функции получаем следующие выражения:

$$T_{(k,l)}^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k_0 \text{ и } l = l_0, \\ 0, & \text{если } k \neq k_0 \text{ или } l \neq l_0, \end{cases}$$

поэтому

$$z^n = (q_{(k_0, l_0)})^n \psi^{(k_0, l_0)}.$$

Следовательно, для функции z^0 , выбранной по формуле (5.46), неравенство (5.45) переходит в равенство

$$\frac{\|z^n\|}{\|z^0\|} = \|z^n\| = |q_{(k_0, l_0)}|^n = \left(\max_{k,l} |q_{(k,l)}| \right)^n.$$

Итак, о сходимости итераций можно судить по поведению при $n \rightarrow \infty$ правой части неравенства (5.45). Поскольку при условии (5.30) справедливо неравенство (5.31), то из оценки (5.45) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|z^n\|}{\|z^0\|} = 0,$$

т. е. итерационный процесс действительно сходится.

Осталось найти $\tau_{\text{опт}}$. Для этого на отрезке $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ рассмотрим функцию

$$q(\tau, \lambda) = |1 - \tau\lambda| \quad (5.47)$$

и выясним, при каком значении τ величина $\max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} q(\tau, \lambda)$ принимает минимальное значение.

Ясно, что при каждом фиксированном значении τ

$$\begin{aligned} \max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} q(\tau, \lambda) &= \max(q(\tau, \lambda_{\min}), q(\tau, \lambda_{\max})) = \\ &= \max(|1 - \tau\lambda_{\min}|, |1 - \tau\lambda_{\max}|), \end{aligned}$$

а минимальное значение правой части достигается только в том случае, когда выполняется равенство

$$1 - \tau\lambda_{\min} = -(1 - \tau\lambda_{\max}),$$

из которого и следует формула (5.41) для $\tau_{\text{опт}}$. ■

Посмотрим, какое минимальное количество n шагов в итерационном методе (5.37) с оптимальным значением $\tau_{\text{опт}}$ нужно проделать, чтобы для произвольного начального приближения относительная погрешность стала бы меньше заданного числа $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\|z^n\|}{\|z^0\|} \leq \varepsilon.$$

Для этого необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\left(\max_{k,l} |q(k,l)| \right)^n \leq \varepsilon. \quad (5.48)$$

Для простоты рассмотрим лишь случай квадратной сетки с шагом $h = l/N$, покрывающей квадрат Ω со стороной l . Тогда

$$\max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} q(\tau_{\text{опт}}, \lambda) = 1 - \tau_{\text{опт}} \lambda_{\min} = 1 - \frac{h^2}{4} \cdot \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2l}.$$

Следовательно, неравенство (5.48) эквивалентно такому

$$\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \right)^n \leq \varepsilon,$$

или

$$n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \right)}. \quad (5.49)$$

Получим оценку для n_{\min} при малых h :

$$n_{\min} \approx \frac{\ln \varepsilon}{-2 \sin^2 \frac{\pi h}{2l}} \approx \frac{\ln \varepsilon}{-\frac{\pi^2 h^2}{2l^2}} = \frac{2}{\pi^2} N^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5.50)$$

Например, при $N = 100$, $\varepsilon = 0.45 \cdot 10^{-4} \approx e^{-10}$ получим $n_{\min} \approx 20\,000$.

З А Д А Ч И

5.1. С помощью спектрального метода Неймана показать, что для полностью неявной двухслойной схемы (5.6) необходимый спектральный признак устойчивости по начальным данным выполняется при любом законе предельного перехода.

5.2. С помощью спектрального метода Неймана показать, что для схемы Кранка — Николсон (5.7) необходимый спектральный признак устойчивости по начальным данным выполняется при любом законе предельного перехода.

5.3. Используя принцип максимума, показать, что полностью неявная схема (5.6) абсолютно устойчива в равномерной норме (5.13), (5.14).

5.4. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости схемы Кранка — Николсон (5.7) в равномерной норме.

5.5. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи (5.6) с однородным уравнением ($f \equiv 0$) и однородными краевыми условиями ($\mu \equiv 0$).

5.6. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи (5.7) с однородным уравнением и однородными краевыми условиями.

5.7. Пусть для решения разностной задачи Дирихле (5.36) используется метод установления, основанный на полностью неявной схеме (5.6):

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda u_{j,m}^{n+1} + f_{j,m}, \quad (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Доказать, что при $n \rightarrow \infty$ решение u^n задачи (5.51) стремится в среднеквадратичной норме (5.18) к решению u задачи Дирихле (5.36).

5.8. Пусть для решения разностной задачи Дирихле (5.36) используется метод установления, основанный на схеме Кранка — Николсон (5.7), т. е. итерационный метод

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda \frac{u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^n}{2} + f_{j,m}, \quad (x_j, y_m) \in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Докажите, что при $n \rightarrow \infty$ решение задачи (5.52) будет стремиться в среднеквадратичной норме к решению стационарной задачи (5.36).

§ 6. Экономичные разностные схемы

Исследуя явную схему (5.4), мы отметили, что ее реализация предельно проста: зная сеточную функцию u^n на n -м временном слое, по явным формулам (5.16) отыскиваем сеточную функцию u^{n+1} на следующем по времени слое. При этом количество выполненных арифметических действий будет пропорционально числу неизвестных значений $u_{j,m}^{n+1}$, т. е. числу $N = (N_x - 1)(N_y - 1)$.

Определение. *Разностные схемы, в которых число арифметических действий для перехода от u^n к u^{n+1} пропорционально числу неизвестных значений, называются экономичными.*

Итак, явная схема экономична и в этом смысле неупрощаема. Однако она устойчива лишь при жестком ограничении на шаг τ (см. неравенства (5.10), (5.12)), что делает ее практически непригодной.

Рассмотрим теперь неявные схемы. При $\sigma \geq 0,5$ схема с весами (5.32) абсолютно устойчива, но она не является экономичной. Покажем это для схемы Кранка — Николсон (5.7):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda u^{n+1} + \frac{1}{2}\Lambda u^n + f^{n+1/2}, \quad (6.1)$$

имеющей второй порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$. Здесь для краткости индексы j и m опущены и принято $\nu = 1$.

Как по известным значениям u^n найти неизвестные u^{n+1} ? Перепишем разностное уравнение

$$\begin{aligned} (1 + r_x + r_y) u_{j,m}^{n+1} - \frac{r_x}{2} (u_{j+1,m}^{n+1} + u_{j-1,m}^{n+1}) - \frac{r_y}{2} (u_{j,m+1}^{n+1} + u_{j,m-1}^{n+1}) = \\ = u_{j,m}^n + \frac{\tau}{2} \Lambda u_{j,m}^n + \tau f_{j,m}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

и учтем, что в граничных узлах значения сеточной функции u^{n+1} известны:

$$u_{j,m}^{n+1} = \mu (x_j, y_m, t^{n+1}), \quad (x_j, y_m, t^{n+1}) \in \Gamma_h. \quad (6.3)$$

В результате получилась система из $N = (N_x - 1)(N_y - 1)$ линейных уравнений для определения такого же количества неизвестных $u_{j,m}^{n+1}$.

Как решить систему (6.2)? *Метод исключения Гаусса* при решении системы N уравнений требует выполнения примерно N^3 арифметических операций, поэтому этот метод для нас не подходит, поскольку для

экономичной схемы число операций должно быть пропорциональным числу N . Решение проблемы создания экономичного алгоритма для рассматриваемого типа задач лежит на другом пути.

6.1. Схема приближенной факторизации (СПФ). Учитывая, что

$$u^{n+1} = u^n + \tau \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau},$$

перепишем схему Кранка — Николсон (6.1) в виде

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2} \quad (6.4)$$

или в канонической форме

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2}, \quad (6.5)$$

где $B = E - \frac{\tau}{2}\Lambda = E - \frac{\tau}{2}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) = E + \frac{\tau}{2}A_x + \frac{\tau}{2}A_y$.

Обратив неявный оператор B , найдем сеточную функцию u^{n+1} на $(n+1)$ -м слое:

$$u^{n+1} = u^n + \tau B^{-1} \left(\Lambda u^n + f^{n+1/2} \right). \quad (6.6)$$

Однако непосредственное обращение оператора B является чрезвычайно трудоемкой задачей. В то же время если мы представим оператор B в виде произведения нескольких более простых, легко обрабатываемых («экономичных») операторов (*факторизуем* оператор B)

$$B = B_1 B_2 \cdots B_p, \quad (6.7)$$

то и сам оператор B может быть легко (экономично) обращен. Покажем это.

Схема (6.5) с факторизованным оператором (6.7) (ее называют *факторизованной*)

$$B_1 B_2 \cdots B_p \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2}$$

эквивалентна схеме из p дробных шагов

$$\begin{aligned}
 B_1 \xi^{n+1/p} &= \Lambda u^n + f^{n+1/2}, \\
 B_2 \xi^{n+2/p} &= \xi^{n+1/p}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 B_{p-1} \xi^{n+(p-1)/p} &= \xi^{n+(p-2)/p}, \\
 B_p \xi^{n+1} &= \xi^{n+(p-1)/p}, \\
 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \xi^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

На каждом k -м дробном шаге промежуточное значение $\xi^{n+k/p}$ находится простым обращением оператора B_k ($k = 1, \dots, p$). Таким образом, факторизация сложного оператора позволила свести его обращение к последовательному обращению нескольких более простых.

К сожалению, точно факторизовать неявный оператор удается редко. Поэтому, как правило, производится приближенная факторизация

$$B \approx B_1 B_2 \dots B_p. \tag{6.9}$$

Определение. Если замена неявного оператора на факторизованный проводится приближенно, то получающаяся схема называется схемой приближенной факторизации.

Определение. Погрешность, вносимая в исходную схему при приближенной факторизации, называется погрешностью факторизации.

Рассмотрим произвольную схему

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + Au^n = \varphi^n \tag{6.10}$$

с постоянными операторами A и B и предположим, что оператор B удается представить в виде

$$B = E + \tau(R_1 + \dots + R_p). \tag{6.11}$$

Тогда оператор B можно приближенно факторизовать, например, так:

$$B \approx (E + \tau R_1) \dots (E + \tau R_p) \equiv \tilde{B}. \tag{6.12}$$

В результате получается факторизованная схема

$$(E + \tau R_1) \dots (E + \tau R_p) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + Au^n = \varphi^n. \tag{6.13}$$

Поскольку факторизованная схема не совпадает с исходной, то для нее надо заново проводить исследование аппроксимации и устойчивости. В частности, операторы R_k следует выбирать так, чтобы не понизился порядок аппроксимации.

Возникает вопрос: если исходная схема устойчива, то будет ли СПФ также устойчивой?

Лемма 6.1. Пусть $A = A^* > 0$ и оператор B имеет вид (6.11), где операторы R_k — самосопряженные, неотрицательные и попарно перестановочные

$$R_k = R_k^* \geq 0, \quad R_k R_m = R_m R_k, \quad m, k = 1, 2, \dots, p. \quad (6.14)$$

Тогда если схема (6.10) устойчива по начальным данным в H_A , то СПФ (6.13) также устойчива в H_A .

Доказательство. В самом деле, поскольку схема (6.10) устойчива в H_A и $B = B^* > 0$, то

$$B \geq 0, 5\tau A.$$

Для произведения операторов $R_\alpha R_\beta$ имеем

$$(R_\alpha R_\beta u, v) = (R_\beta u, R_\alpha v) = (u, R_\beta R_\alpha v) = (u, R_\alpha R_\beta v), \quad \forall u, v \in H_h,$$

т. е. $(R_\alpha R_\beta)^* = R_\alpha R_\beta$. Это означает, что оператор $R_\alpha R_\beta$ является самосопряженным. Кроме того, этот оператор является неотрицательным, что следует из леммы 2.2

$$(R_\alpha^{1/2} R_\beta R_\alpha^{1/2} u, u) \geq 0, \quad \forall u \in H_h$$

и равенства $R_\alpha^{1/2} R_\beta R_\alpha^{1/2} = R_\alpha^{1/2} R_\alpha^{1/2} R_\beta = R_\alpha R_\beta$. Аналогично показывается, что любые произведения операторов R_k являются самосопряженными неотрицательными операторами. Поэтому для оператора факторизованной схемы получим, что $\tilde{B} = \tilde{B}^*$ и

$$\tilde{B} = E + \tau (R_1 + \dots + R_p) + \tau^2 Q_p = B + \tau^2 Q_p \geq B \geq 0, 5\tau A,$$

где оператор Q_p представлен суммой всевозможных произведений операторов R_k ($R_\alpha R_\beta$, $R_\alpha R_\beta R_\gamma$, ...). Следовательно, по теореме о необходимом и достаточном условии устойчивости получаем, что факторизованная схема также будет устойчивой по начальным данным в H_A . ■

Вернемся опять к схеме Кранка — Николсон (6.4) и рассмотрим для нее следующую схему приближенной факторизации:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2}. \quad (6.15)$$

Поскольку схема Кранка — Николсон абсолютно устойчива, а операторы $A_x = -\Lambda_{xx}$ и $A_y = -\Lambda_{yy}$ являются самосопряженными, положительными и перестановочными (см. задачу 6.1), то по лемме 6.1 СПФ (6.15) также будет абсолютно устойчивой схемой.

Выясним порядок аппроксимации СПФ (6.15). Перепишем эту схему в виде

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda\right)u_t = \Lambda u^n + f^{n+1/2} - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}u_t.$$

Таким образом, СПФ (6.15) с точностью до члена порядка $O(\tau^2)$ совпадает со схемой Кранка — Николсон (6.4), поэтому она также имеет погрешность аппроксимации порядка $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Для определения u^{n+1} будем использовать метод дробных шагов (6.8):

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\xi_{j,m}^{n+1/2} = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}^{n+1/2}; \quad (6.16)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)\xi_{j,m}^{n+1} = \xi_{j,m}^{n+1/2}; \quad (6.17)$$

$$u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^n + \tau\xi_{j,m}^{n+1}, \quad (6.18)$$

где $\xi^{n+1/2}$ и ξ^{n+1} — вспомогательные сеточные функции.

Сначала на первом дробном шаге (6.16) находим сеточную функцию $\xi^{n+1/2}$, а затем на втором шаге (6.17) — ξ^{n+1} и, наконец, на третьем шаге по формуле (6.18) вычисляем окончательное решение u^{n+1} . На первом шаге схема неявная по x и при каждом m функция $\xi^{n+1/2}$ находится скалярной прогонкой, при этом общее количество операций пропорционально произведению $N_x N_y$. Аналогично, на втором шаге схема является неявной по y и при каждом j вспомогательную функцию ξ^{n+1} находим также скалярной прогонкой. Общее количество операций для перехода со слоя n на слой $n + 1$ пропорционально $N_x N_y$. Таким образом, СПФ попадает под определение экономичной. Подчеркнем, что этого нам удалось добиться за счет использования приближенной факторизации оператора B и сведения перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач. Это и есть основная идея построения большинства (но не всех) экономичных методов.

Замечание. При реализации первого дробного шага необходимо знать на границах $x = 0$ и $x = l_x$ значения $\xi_{0,m}^{n+1/2}$ и $\xi_{N_x,m}^{n+1/2}$ ($m = 1, \dots, N_y - 1$). Они находятся из уравнения второго шага (6.17)

$$\xi^{n+1/2} = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{yy} \right) \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{\tau}. \quad (6.19)$$

При этом вторая производная Λ_{yy} вычисляется вдоль границ $x = 0$ и $x = l_x$. ■

Определение. *Разностная схема для уравнения теплопроводности обладает свойством полной аппроксимации, если при установлении, т. е. при $u_t = 0$, она переходит в разностную схему для уравнения Пуассона.*

На все схемы обладают свойством полной аппроксимации (см. задачи 6.7 и 6.8). Очевидно, что СПФ (6.15) обладает свойством полной аппроксимации. Следовательно, ее можно применять в методе установления для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. При использовании СПФ в качестве метода установления для решения задачи Дирихле (5.3), в которой граничная функция μ не зависит от времени t , для вспомогательных функций следует задавать согласно уравнениям (6.19) и (6.18) следующие граничные значения:

$$\xi_{0,m}^{n+1/2} = 0, \quad \xi_{N_x,m}^{n+1/2} = 0, \quad m = 1, \dots, N_y - 1; \quad (6.20)$$

$$\xi_{j,0}^{n+1} = 0, \quad \xi_{j,N_y}^{n+1} = 0, \quad j = 1, \dots, N_x - 1. \quad (6.21)$$

Для трехмерной задачи (5.2) СПФ, полученная из схемы Кранка — Николсон, имеет вид

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{xx} \right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{yy} \right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{zz} \right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2}, \quad (6.22)$$

т. е. она совершенно аналогична СПФ для двумерной задачи. В дробных шагах ее можно реализовать в соответствии с приведенным выше методом дробных шагов (6.8):

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{xx} \right) \xi_{j,m}^{n+1/3} = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}^{n+1/2}; \quad (6.23)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{yy} \right) \xi_{j,m}^{n+2/3} = \xi_{j,m}^{n+1/3}; \quad (6.24)$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{zz} \right) \xi_{j,m}^{n+1} = \xi_{j,m}^{n+2/3}; \quad (6.25)$$

$$u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^n + \tau \xi_{j,m}^{n+1}. \quad (6.26)$$

Из леммы 6.1 следует, что схема приближенной факторизации (6.22) для трехмерной задачи абсолютно устойчива. Так же как в двумерном случае, легко проверяется, что она имеет погрешность аппроксимации порядка $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ и обладает свойством полной аппроксимации.

6.2. СПН — схема переменных направлений (*схема продольно-поперечной прогонки*). Рассмотрим другие реализации в дробных шагах одной и той же схемы приближенной факторизации (6.15). В СПФ в дробных шагах (6.16), (6.17) вместо $\xi^{n+1/2}$ введем промежуточное решение $u^{n+1/2}$ по формуле

$$\xi^{n+1/2} = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2}. \quad (6.27)$$

Тогда формулы метода дробных шагов (6.16)–(6.18) переходят в следующие:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} - \Lambda_{xx} (u^{n+1/2} - u^n) = \Lambda u^n + f^{n+1/2},$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{1}{2} \Lambda_{yy} (u^{n+1} - u^n) = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2},$$

или

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx} u^{n+1/2} + \Lambda_{yy} u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.28)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{1}{2} \Lambda_{yy} u^{n+1} + \frac{1}{2} \Lambda_{yy} u^n = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2}. \quad (6.29)$$

Если теперь из первого уравнения (6.28) выразить $\Lambda_{yy} u^n$ и подставить во второе, то получим окончательный вид формул СПН:

$$\frac{u_{j,m}^{n+1/2} - u_{j,m}^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx} u_{j,m}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} u_{j,m}^n + f_{j,m}^{n+1/2}; \quad (6.30)$$

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_{xx} u_{j,m}^{n+1/2} + \Lambda_{yy} u_{j,m}^{n+1} + f_{j,m}^{n+1/2}. \quad (6.31)$$

Каждый из дробных шагов реализуется прогонками (см. задачу 6.2). На первом шаге (6.30) для вычисления $u^{n+1/2}$ используется продольная прогонка (прогонка по x при каждом фиксированном $m = 1, \dots, N_y - 1$), а на втором шаге (6.31) с помощью поперечной прогонки находим u^{n+1} .

Для реализации продольных прогонок необходимо иметь граничные значения промежуточного решения $u^{n+1/2}$ в узлах сетки на левой $x = 0$ и правой $x = l_x$ сторонах прямоугольника Ω . Ввиду равенств (6.27) и (6.19) получаем, что

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n + \frac{\tau}{2} \xi^{n+1/2} = \mu^n + \frac{\tau}{2} \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{yy} \right) \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{\tau} = \\ &= \mu^n + \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_{yy} (\mu^{n+1} - \mu^n) = \frac{\mu^{n+1} + \mu^n}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_{yy} (\mu^{n+1} - \mu^n). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Из этой формулы следует, что при использовании СПН для решения задачи Дирихле (5.3) следует задавать следующие граничные значения для промежуточного решения:

$$u_{0,m}^{n+1/2} = \mu(0, y_m), \quad u_{N_x,m}^{n+1/2} = \mu(l_x, y_m), \quad m = 1, \dots, N_y - 1. \quad (6.33)$$

Как обобщить СПН (6.30), (6.31) для трехмерной задачи (5.2)? Рассмотрим, например, следующее естественное обобщение (*схема Писмена — Рекфорда*):

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau/3} = \Lambda_{xx} u^{n+1/3} + \Lambda_{yy} u^n + \Lambda_{zz} u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.34)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau/3} = \Lambda_{xx} u^{n+1/3} + \Lambda_{yy} u^{n+2/3} + \Lambda_{zz} u^{n+1/3} + f^{n+1/2}; \quad (6.35)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau/3} = \Lambda_{xx} u^{n+2/3} + \Lambda_{yy} u^{n+2/3} + \Lambda_{zz} u^{n+1} + f^{n+1/2}. \quad (6.36)$$

Схема (6.34)—(6.36) экономична, но имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$. Кроме этого недостатка она не обладает свойством полной аппроксимации (см. задачу 6.3). Еще один существенный недостаток схемы (6.34)—(6.36) состоит в том, что она условно устойчива: для устойчивости необходимо выполнение неравенств

$$\nu \frac{\tau}{h_x^2} \leq \frac{3}{2}, \quad \nu \frac{\tau}{h_y^2} \leq \frac{3}{2}, \quad \nu \frac{\tau}{h_z^2} \leq \frac{3}{2}. \quad (6.37)$$

Чтобы получить в трехмерном случае СПН с хорошими свойствами, будем строить ее на основе СПФ (6.22), но вместо дробных шагов (6.23)—(6.26) будем использовать другие дробные шаги, аналогичные

СПН (6.30), (6.31). Для этого вместо вспомогательных функций $\xi^{n+1/3}$ и $\xi^{n+2/3}$ введем промежуточные решения $u^{n+1/3}$ и $u^{n+2/3}$ по формулам

$$\xi^{n+1/3} = \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau/2}, \quad \xi^{n+2/3} = \frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau/2}. \quad (6.38)$$

Тогда дробные шаги (6.23)–(6.26) запишутся так:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^n + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.39)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{yy}u^{n+2/3} - \Lambda_{yy}u^n + \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau/2}; \quad (6.40)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda_{zz}u^{n+1} - \frac{1}{2}\Lambda_{zz}u^n + \frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau/2}. \quad (6.41)$$

Второе уравнение с учетом первого можно переписать так:

$$\frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^{n+2/3} + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1/2}. \quad (6.42)$$

Выразим отсюда $\Lambda_{zz}u^n$ и подставим в уравнение (6.41). В результате получим СПН со следующими дробными шагами:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^n + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.43)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^{n+2/3} + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.44)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^{n+2/3} + \Lambda_{zz}u^{n+1} + f^{n+1/2}. \quad (6.45)$$

Видим, что такая реализация СПФ в трехмерном случае аналогична двумерной СПН (6.30), (6.31), поэтому схему (6.43)–(6.45) тоже будем называть схемой переменных направлений. Поскольку построенная СПН эквивалентна СПФ, то она абсолютно устойчива, имеет второй порядок аппроксимации по τ , h_x , h_y , h_z , обладает свойством полной аппроксимации и является экономичной.

6.3. ССП — схема стабилизирующей поправки (*схема Дугласа — Рекфорда*). Рассмотрим еще одну реализацию СПФ (6.15) для двумерной задачи. В методе дробных шагов (6.16)–(6.18) вместо $\xi^{n+1/2}$ введем промежуточное решение $u^{n+1/2}$ по формуле

$$\xi^{n+1/2} = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau}. \quad (6.46)$$

Тогда дробные шаги СПФ запишутся так:

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1/2};$$

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau},$$

или

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda_{xx} (u^{n+1/2} + u^n) + \Lambda_{yy}u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.47)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda_{yy} (u^{n+1} - u^n). \quad (6.48)$$

Реализация СПФ в дробных шагах (6.47), (6.48) называется ССП. Она является экономичной, поскольку вычисление промежуточного решения $u^{n+1/2}$ и решения u^{n+1} на $(n+1)$ -м временном слое производится методом прогонки в продольном и поперечном направлениях, соответственно.

Чтобы осуществить продольную прогонку на первом дробном шаге (6.47), необходимо иметь граничные значения сеточной функции $u^{n+1/2}$ при $x = 0$ и $x = l_x$. Из равенств (6.46) и (6.19) получаем, что

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= u^n + \tau \xi^{n+1/2} = \mu^n + \tau \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{\tau} = \\ &= \mu^{n+1} - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy} (\mu^{n+1} - \mu^n). \end{aligned} \quad (6.49)$$

При решении задачи Дирихле (5.3) функция μ не зависит от времени, поэтому граничные значения для промежуточного решения следует задавать по формулам (6.33).

Обобщим ССП (6.47), (6.48) на трехмерный случай. Для этого вместо вспомогательных функций $\xi^{n+1/3}$ и $\xi^{n+2/3}$, использующихся в методе дробных шагов (6.23)–(6.26) для СПФ, введем промежуточные решения $u^{n+1/3}$ и $u^{n+2/3}$ по формулам

$$\xi^{n+1/3} = \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau}, \quad \xi^{n+2/3} = \frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau}. \quad (6.50)$$

Тогда вместо формул (6.23)–(6.26) получим следующие:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx} \left(\frac{u^{n+1/3} + u^n}{2} \right) + \Lambda_{yy} u^n + \Lambda_{zz} u^n + f^{n+1/2}; \quad (6.51)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_{yy} \left(u^{n+2/3} - u^n \right); \quad (6.52)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda_{zz} \left(u^{n+1} - u^n \right). \quad (6.53)$$

Поскольку и в трехмерном случае ССП является лишь иной реализацией в дробных шагах СПФ, то ССП обладает теми же свойствами, что и СПФ: она экономична, абсолютно устойчива, имеет второй порядок аппроксимации по τ , h_x , h_y и является схемой полной аппроксимации.

6.4. Сходимость итерационного метода переменных направлений. Для решения разностной задачи Дирихле (5.36) используем итерационный процесс, основанный на схеме приближенной факторизации (6.15):

$$\begin{aligned} (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{xx})(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_{yy}) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}, \\ (x_j, y_m) &\in \omega_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (6.54)$$

СПФ имеет несколько реализаций в дробных шагах, но все эти реализации используют прогонки с переменной направления с продольного на поперечное, поэтому итерационный метод (6.54) будем называть *методом переменных направлений*. Покажем, что этот итерационный метод сходится, причем намного быстрее, чем рассмотренный выше явный метод простой итерации.

Теорема 6.1. Метод переменных направлений (6.54) сходится, при этом для квадратной области Ω ($l_x = l_y = l$) и квадратной сетки ($h_x = h_y = h = l/N$)

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{h^2}{\sin \frac{\pi h}{l}}. \quad (6.55)$$

Доказательство. Пусть $z_{j,m}^n = u_{j,m}^n - u_{j,m}$ — погрешность на n -й итерации в узле (x_j, y_m) . Для нее получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) \left(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) \frac{z_{j,m}^{n+1} - z_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda z_{j,m}^n, \\ z_{j,m}^n &= 0, \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \\ z_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m) - u_{j,m}, \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Поскольку эта задача однородная, то ее решение можно представить в виде конечного ряда Фурье (5.27)

$$z^n = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} T_{(k,l)}^n \psi^{(k,l)}. \quad (6.57)$$

Коэффициенты $T_{(k,l)}^n$ этого ряда найдем, подставив решение (6.57) в разностное уравнение задачи (6.56):

$$\frac{T_{(k,l)}^{n+1} - T_{(k,l)}^n}{\tau} \left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda_k^{(x)}\right) \left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda_l^{(y)}\right) = -\left(\lambda_k^{(x)} + \lambda_l^{(y)}\right) T_{(k,l)}^n,$$

где $\lambda_k^{(x)}$ и $\lambda_l^{(y)}$ — собственные значения операторов $A_x = -\Lambda_{xx}$ и $A_y = -\Lambda_{yy}$ соответственно. Отсюда получаем, что

$$T_{(k,l)}^{n+1} = q_{(k,l)} T_{(k,l)}^n,$$

где

$$q_{(k,l)} = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_k^{(x)}\right) \left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda_l^{(y)}\right)}{\left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda_k^{(x)}\right) \left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda_l^{(y)}\right)}. \quad (6.58)$$

Поэтому решение (6.57) можно записать в виде (5.44)

$$z^n = \sum_{k=1}^{N_x-1} \sum_{l=1}^{N_y-1} (q_{(k,l)})^n T_{(k,l)}^0 \psi^{(k,l)},$$

где $T_{(k,l)}^0$ — коэффициенты Фурье функции начальной ошибки z^0 .

Тогда для относительной ошибки на n -ой итерации будем иметь такую же неуклучшаемую оценку (5.45), как в теореме 5.3:

$$\frac{\|z^n\|}{\|z^0\|} \leq \left(\max_{k,l} |q_{(k,l)}| \right)^n, \quad (6.59)$$

поэтому о сходимости и скорости сходимости итераций можно судить по поведению правой части этого неравенства.

Из свойств собственных значений операторов A_x и A_y следует, что $\max_{k,l} |q_{(k,l)}| < 1$, поэтому итерационный метод переменных направлений сходится.

Найдем значение итерационного параметра τ , при котором в случае квадратной области ($l_x = l_y = l$) и квадратной сетки ($h_x = h_y = h$) итерации будут сходиться наиболее быстро. Для квадратной сетки собственные значения $\lambda_k^{(x)}$ и $\lambda_k^{(y)}$ совпадают, поэтому для них можно использовать общее обозначение λ_k , с учетом которого выражение (6.58) примет вид

$$q_{(k,l)} = \frac{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_k}{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_k} \cdot \frac{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_l}{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_l}.$$

Пусть

$$\alpha = \min_k \lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l}, \quad \beta = \max_k \lambda_k = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l}.$$

На квадрате $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ рассмотрим функцию

$$q(\tau, \lambda, \mu) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}\lambda}{1 + \frac{\tau}{2}\lambda} \cdot \frac{1 - \frac{\tau}{2}\mu}{1 + \frac{\tau}{2}\mu}. \quad (6.60)$$

Тогда $q_{(k,l)} = q(\tau, \lambda_k, \lambda_l)$. Легко убедиться, что функция $|q(\tau, \lambda, \mu)|$ (см. ее график на рис. 1, а) будет принимать максимальное значение в одном из углов квадрата $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$, т. е.

$$\max_{\alpha \leq \lambda, \mu \leq \beta} |q(\tau, \lambda, \mu)| = \max(|q(\tau, \alpha, \alpha)|, |q(\tau, \alpha, \beta)|, |q(\tau, \beta, \beta)|).$$

При любом $\tau > 0$ среднее из чисел меньше одного из крайних, поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \leq \lambda, \mu \leq \beta} |q(\tau, \lambda, \mu)| &= \max \left(\frac{\left(1 - \frac{\tau}{2}\alpha\right)^2}{\left(1 + \frac{\tau}{2}\alpha\right)^2}, \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2}\beta\right)^2}{\left(1 + \frac{\tau}{2}\beta\right)^2} \right) = \\ &= \left[\max \left(\frac{\left|1 - \frac{\tau}{2}\alpha\right|}{1 + \frac{\tau}{2}\alpha}, \frac{\left|1 - \frac{\tau}{2}\beta\right|}{1 + \frac{\tau}{2}\beta} \right) \right]^2 \equiv Q^2(\tau). \end{aligned}$$

График функции $Q(\tau)$ показан на рис. 1, б.

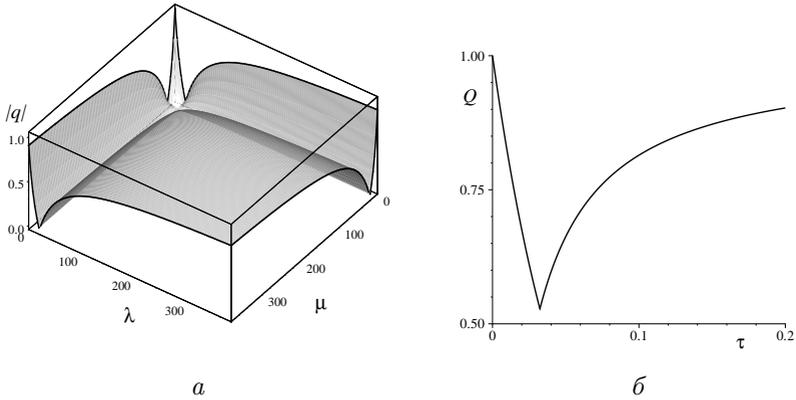


Рис. 1. Графики функций: а — $|q(\tau, \lambda, \mu)|$ при $\tau = h$; б — $Q(\tau)$; $l_x = 1$; $l_y = 1$; $N_x = 10$; $N_y = 10$

Нетрудно проверить, что

$$Q(\tau) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{\tau}{2}\alpha}{1 + \frac{\tau}{2}\alpha}, & \text{при } 0 < \tau \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}, \\ \frac{\frac{\tau}{2}\beta - 1}{1 + \frac{\tau}{2}\beta}, & \text{при } \tau \geq \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}, \end{cases}$$

поэтому функция $Q(\tau)$ принимает при $\tau = 2/\sqrt{\alpha\beta}$ минимальное значение

$$\min_{\tau} Q(\tau) = \frac{1 - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Итак,

$$\min_{\tau} \max_{k,l} |q_{(k,l)}| = \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}} \right)^2 ; \quad (6.61)$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{h^2}{\sin \frac{\pi h}{l}}, \quad (6.62)$$

что и доказывает теорему. ■

Чтобы при оптимальном значении итерационного параметра τ относительная погрешность в (6.59) стала меньше заданного положительного числа ε , необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}} \right)^{2n} \leq \varepsilon, \quad (6.63)$$

т. е.

$$n \geq \frac{\ln \varepsilon}{2 \ln \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2l}} \right)}. \quad (6.64)$$

При малых h/l отсюда получаем

$$n_{\min} \approx \frac{\ln \varepsilon}{2 \ln \left(1 - 2 \frac{\pi h}{2l} \right)} \approx \frac{\ln \varepsilon}{-2 \frac{\pi h}{l}} = \frac{1}{2\pi} N \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6.65)$$

Видим, что количество итераций в методе переменных направлений пропорционально числу N узлов, расположенных на стороне квадрата Ω , в то время как в методе простой итерации для достижения точности ε требовалось проделать число итераций, пропорциональное N^2 . Таким образом, метод переменных направлений сходится гораздо быстрее, чем метод простой итерации.

Например, при $N = 100$ получим, что при использовании метода переменных направлений будет достигнута относительная погрешность, не превосходящая $\varepsilon = 0.45 \cdot 10^{-4} \approx e^{-10}$ для произвольного начального приближения, если проделать $n_{\min} \approx 160$ итераций. Ранее было показано, что метод простой итерации требует для этого около 20 000 итераций.

З А Д А Ч И

6.1. Докажите, что операторы $A_x = -\Lambda_{xx}$ и $A_y = -\Lambda_{yy}$ попарно перестановочны.

6.2. Докажите корректность и устойчивость метода прогонки, используемого для решения уравнений СПН (6.30), (6.31).

6.3. Докажите, что СПН (6.34)–(6.36) для трехмерной задачи (5.2) экономична, имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$, не обладает свойством полной аппроксимации и необходимым условием ее устойчивости является выполнение неравенств (6.37).

6.4. Далее мы будем строить экономичные схемы на основе полностью неявной схемы

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + f^{n+1}. \quad (6.66)$$

Рассмотрим СПФ

$$(E - \tau\Lambda_{xx})(E - \tau\Lambda_{yy}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1}, \quad (6.67)$$

которая аппроксимирует уравнение

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \quad (6.68)$$

и реализуется методом дробных шагов

$$(E - \tau\Lambda_{xx}) \xi_{j,m}^{n+1/2} = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}^{n+1}; \quad (6.69)$$

$$(E - \tau\Lambda_{yy}) \xi_{j,m}^{n+1} = \xi_{j,m}^{n+1/2}; \quad (6.70)$$

$$u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^n + \tau \xi_{j,m}^{n+1}. \quad (6.71)$$

Исследовать свойства схемы (6.67) и выписать ее обобщение для случая уравнения теплопроводности с тремя пространственными переменными

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + f(x, y, z, t). \quad (6.72)$$

6.5. Используя замену

$$\xi^{n+1/2} = \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau}, \quad (6.73)$$

записать метод дробных шагов (6.69)–(6.71) в виде схемы переменных направлений

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/2} + \Lambda_{yy}u^n + f^{n+1}; \quad (6.74)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/2} + \Lambda_{yy}u^{n+1} + f^{n+1}, \quad (6.75)$$

аналогичной СПН (6.30), (6.31). Исследовать свойства схемы (6.74), (6.75) и выписать ее обобщение для уравнения (6.72).

6.6. Используя замену (6.73), записать метод дробных шагов (6.69)–(6.71) в виде схемы стабилизирующей поправки:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/2} + \Lambda_{yy}u^n + f^{n+1}; \quad (6.76)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{yy}(u^{n+1} - u^n), \quad (6.77)$$

аналогичной ССП (6.47), (6.48). Исследовать свойства схемы (6.76), (6.77) и выписать ее обобщение для уравнения (6.72).

6.7. Для решения уравнения (6.68) предлагается *схема расщепления*:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/2} + f^{n+1}; \quad (6.78)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{yy}u^{n+1}. \quad (6.79)$$

Показать, что она абсолютно устойчива, экономична, аппроксимирует уравнение (6.68) с порядком $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ и не обладает свойством полной аппроксимации. Обладает ли она этим свойством при $f \equiv 0$?

6.8. Будем использовать схему расщепления (6.78), (6.79) на двух первых дробных шагах *схемы предиктор – корректор*:

$$\frac{u^{n+1/4} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_{xx}u^{n+1/4} + f^{n+1/2}; \quad (6.80)$$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n+1/4}}{\tau/2} = \Lambda_{yy}u^{n+1/2}; \quad (6.81)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1/2} + f^{n+1/2}. \quad (6.82)$$

Показать, что она аппроксимирует уравнение (6.68) с порядком $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$, экономична, абсолютно устойчива, но не обладает свойством полной аппроксимации. Обладает ли она этим свойством при $f \equiv 0$?

6.9. Пусть для решения разностной задачи Дирихле (5.36) используется итерационный процесс, основанный на схеме приближенной факторизации (6.67):

$$(E - \tau \Lambda_{xx})(E - \tau \Lambda_{yy}) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m},$$

$$u_{j,m}^n = \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m, t^n) \in \Gamma_h, \quad (6.83)$$

$$u_{j,m}^0 = u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h,$$

где u_0 — начальное итерационное приближение, удовлетворяющее граничному условию (5.38). Докажите аналог теоремы 6.1 для метода переменных направлений (6.83). Какой из итерационных методов сходится быстрее — (6.54) или (6.83)?

§ 7. Метод адаптивных сеток

7.1. До сих пор конечно-разностные схемы для многомерных задач мы рассматривали лишь на равномерных сетках. Схемы на неравномерных сетках рассматривались в § 2.7 для стационарного уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной. При этом было показано, что применение неравномерных сеток может привести к повышению точности приближенного решения по сравнению с решением, полученным на равномерной сетке. В настоящем параграфе мы на примере задачи Дирихле (5.3) для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + f(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= \mu(x, y), & (x, y) \in \gamma = \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.1)$$

покажем, как строится разностная схема на неравномерной сетке и укажем один из методов построения адаптивных сеток. Адаптивными будем называть сетки, при построении которых используется информация о поведении решения дифференциальной задачи. Например, в области быстрого изменения решения сетку можно сгустить, а там, где решение меняется медленно, взять разреженную сетку. Это может привести к более точному представлению решения и обеспечить для заданного числа узлов большую точность, чем на равномерной сетке. Кроме того, адаптивные сетки подстраиваются к криволинейным границам области решения Ω .

Как пояснялось в § 2.7, для того чтобы воспользоваться методом адаптивных сеток, необходимо предварительно задать управляющую функцию $w(x, y) \geq 1$, в которой каким-то образом должна быть учтена информация о поведении погрешности численного решения. В общем случае управляющую функцию задают зависящей от производных до некоторого порядка, причем функция w должна принимать бóльшие значения в подобластях бóльших значений производных от решения. Например, для одномерных задач управляющая функция может быть задана формулой (2.7.54). Далее будем считать, что управляющая функция $w(x, y)$ задана и может быть вычислена в любой точке $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Метод адаптивных сеток позволяет получать численное решение задачи для области Ω с криволинейной границей γ сложной формы, однако ради простоты изложения, будем предполагать, что область Ω является, как и в предыдущих параграфах, прямоугольником в плоскости xOy , т. е. $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y\}$. Пусть область Ω требуется покрыть неравномерной сеткой с количеством узлов $(N_1+1) \times (N_2+1)$, причем на левой и правой сторонах прямоугольника Ω должно размещаться одинаковое количество $(N_2 + 1)$ узлов, а на нижней и верхней — $(N_1 + 1)$ узлов.

Наряду с «физической» областью Ω будет использоваться «вычислительная» область $\Xi = (0, 1) \times (0, 1)$ — единичный квадрат в плоскости $\xi O\eta$. Пусть

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \quad (7.2)$$

— произвольное достаточно гладкое взаимно-однозначное невырожденное (для определенности с положительным якобианом) отображение замкнутой области $\bar{\Xi}$ на $\bar{\Omega}$, такое, что левая, нижняя, правая и верхняя стороны прямоугольника Ω являются образами левой, нижней, правой и верхней сторон квадрата Ξ соответственно. Здесь $\mathbf{x} = (x, y)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$, $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Покроем $\bar{\Xi}$ равномерной прямоугольной сеткой с количеством узлов $(N_1 + 1)$ и шагом h_1 в направлении оси $O\xi$ и с количеством узлов $(N_2 + 1)$ и шагом h_2 в направлении оси $O\eta$. Тогда $h_1 = 1/N_1$, $h_2 = 1/N_2$, а координаты узлов в вычислительной области задаются формулами

$$\xi_{j_1} = j_1 h_1, \quad \eta_{j_2} = j_2 h_2, \quad j_1 = 0, \dots, N_1, \quad j_2 = 0, \dots, N_2.$$

Для узлов в вычислительной области будет использоваться обозначение $\boldsymbol{\xi}_j = (\xi_{j_1}, \eta_{j_2})$, где $j = (j_1, j_2)$ — мультииндекс. Совокупность всех

узлов ξ_j обозначим $\bar{\Xi}_h$, множество граничных узлов — $\partial\bar{\Xi}_h$. Множество $\Xi_h = \bar{\Xi}_h \setminus \partial\bar{\Xi}_h$ представляет собой совокупность внутренних узлов сетки.

Криволинейной сеткой $\bar{\Omega}_h$ назовем совокупность узлов $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$, являющихся образами узлов ξ_j при отображении (7.2). Таким образом, координаты узлов неравномерной сетки вычисляются по формулам

$$x_{j_1, j_2} = x(\xi_{j_1}, \eta_{j_2}), \quad y_{j_1, j_2} = y(\xi_{j_1}, \eta_{j_2}), \quad j_1 = 0, \dots, N_1, \quad j_2 = 0, \dots, N_2$$

с помощью отображения (7.2). Отметим, что координаты узлов равномерной на Ω сетки однозначно определяются заданием числа узлов N_1 и N_2 . Для неравномерной сетки это не так. Для заданных N_1 и N_2 существует бесконечное множество неравномерных сеток $\bar{\Omega}_h$, а отдельный представитель этого семейства будет определяться заданием конкретного отображения (7.2). Отображение (7.2) заранее неизвестно и наша задача — определить его. Для этого будем использовать метод эквираспределения [16].

7.2. Построение сетки в многомерной области начинается с построения сетки на ее границе. Для расстановки узлов на отрезках прямых, из которых составлена граница γ , будем использовать метод эквираспределения [16], при этом сетка будет сгущаться или разрежаться в соответствии с заданной управляющей функцией $w(x, y)$.

Итак, пусть задана управляющая функция $w(x, y) \geq 1$ и требуется построить адаптивную сетку на границе γ области Ω . Рассмотрим, для определенности, нижнюю сторону прямоугольника Ω . В соответствии с методом эквираспределения нам нужно решить задачу (2.7.39):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(w(x, 0) \frac{dx(\xi, 0)}{d\xi} \right) &= 0, \quad \xi \in (0, 1), \\ x(0, 0) &= 0, \quad x(1, 0) = l_x. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Получить решение $x = x(\xi, 0)$ нелинейной задачи (7.3) в виде аналитической формулы удастся очень редко. Поэтому для поиска отображения $x = x(\xi, 0)$ применим конечно-разностный метод. Для этого аппроксимируем задачу (7.3) разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1} \left(w(x_{j_1+1/2}, 0) \frac{x_{j_1+1,0} - x_{j_1,0}}{h_1} - w(x_{j_1-1/2}, 0) \frac{x_{j_1,0} - x_{j_1-1,0}}{h_1} \right) &= 0, \\ j_1 &= 1, \dots, N_1 - 1, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$x_{0,0} = 0, \quad x_{N_1,0} = l_x.$$

В результате получилась нелинейная разностная задача для вычисления абсцисс узлов на нижней стороне прямоугольника Ω (ординаты всех узлов равны нулю). Здесь $x_{j_1+1/2} = (x_{j_1,0} + x_{j_1+1,0})/2$. Полученная конечно-разностная задача решается итерационным методом, например, методом последовательных приближений [16]. Аналогично находятся абсциссы x_{j_1, N_2} узлов неравномерной сетки на верхней стороне прямоугольника Ω , при этом $y_{j_1, N_2} \equiv l_y$.

Для поиска координат узлов на левой стороне прямоугольника Ω необходимо решить задачу

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left(w(0, y) \frac{dy(0, \eta)}{d\eta} \right) &= 0, \quad \eta \in (0, 1), \\ y(0, 0) &= 0, \quad y(0, 1) = l_y. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Конечно-разностный аналог этой задачи записывается как

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2} \left(w(0, y_{j_2+1/2}) \frac{y_{0,j_2+1} - y_{0,j_2}}{h_2} - w(0, y_{j_2-1/2}) \frac{y_{0,j_2} - y_{0,j_2-1}}{h_2} \right) &= 0, \\ j_2 &= 1, \dots, N_2 - 1, \\ y_{0,0} &= 0, \quad y_{0,N_2} = l_y, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где $y_{j_2+1/2} = (y_{0,j_2} + y_{0,j_2+1})/2$. Аналогично определяются ординаты узлов на правой границе (их абсциссы равны $x_{N_1, j_2} \equiv l_x$).

В результате будут найдены все граничные узлы $\mathbf{x}_{j_1,0}$, \mathbf{x}_{j_1, N_2} , \mathbf{x}_{0, j_2} , \mathbf{x}_{N_1, j_2} сетки Ω_h . Совокупность этих граничных узлов будем обозначать через $\partial\bar{\Omega}_h$. Отметим, что если $\mathbf{x}_j \in \partial\bar{\Omega}_h$, то $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_j)$, где $\boldsymbol{\xi}_j \in \partial\bar{\Xi}_h$.

7.3. После того как на границе неравномерная сетка построена, вычисляются координаты внутренних узлов адаптивной сетки. Выведем уравнения метода эквираспределения для определения координат этих узлов. Во-первых, перепишем уравнение Пуассона в новых переменных ξ, η (см. задачу 7.2):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{g_{12}}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + Jf = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \quad (7.7)$$

где J — якобиан преобразования (7.2):

$$\begin{aligned} J &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi, \\ g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta. \end{aligned}$$

Поскольку линейные функции $u = x$ и $u = y$ удовлетворяют уравнению Лапласа, то для произвольного гладкого отображения (7.2) имеем два тождества

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{g_{12}}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{g_{22}}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{g_{12}}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{g_{11}}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \xi \in \Xi. \quad (7.9)$$

Далее будем предполагать, что система координат, определяемая искомым отображением (7.2), является ортогональной. Запишем это условие в аналитической форме. Возьмем произвольные числа ξ_0, η_0 из единичного отрезка. При изменении координаты ξ функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta_0)$ будет описывать координатную линию первого семейства с касательным вектором $\boldsymbol{\tau}_1 = (x_\xi, y_\xi)$. Координатная линия второго семейства $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_0, \eta)$, проходящая через точку $\mathbf{x}(\xi_0, \eta_0)$, имеет касательный вектор $\boldsymbol{\tau}_2 = (x_\eta, y_\eta)$. Поэтому в произвольной точке $\mathbf{x}(\xi_0, \eta_0)$ условие ортогональности координатных линий $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 0$ можно записать так:

$$g_{12}(\boldsymbol{\xi}) \equiv 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi. \quad (7.10)$$

Кроме того, будем считать, что отображение (7.2) удовлетворяет *принципу эквираспределения в дифференциальной форме*, аналогичному принципу (2.7.44) в одномерном случае:

$$w(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}))J(\boldsymbol{\xi}) = C = \text{const}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi. \quad (7.11)$$

Использование этих условий в тождествах (7.8), (7.9) приводит к двумерным уравнениям метода эквираспределения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w g_{22} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(w g_{11} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w g_{22} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(w g_{11} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(k_{11} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(k_{22} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right) = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \quad (7.12)$$

где $k_{11} = w g_{22}$, $k_{22} = w g_{11}$.

Итак, в двумерном случае уравнения для определения отображения (7.2) следуют из принципа эквираспределения (7.11) при дополнительном предположении об ортогональности системы координат, задаваемой этим отображением.

Учитывая, что на границе области Ω сетка уже построена, выпишем разностную задачу Дирихле для определения сеточных вектор-функций \mathbf{x}_j — координат внутренних узлов:

$$\begin{aligned} \Lambda \mathbf{x}_j &= 0, \quad \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi_h, \\ \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_j), \quad \boldsymbol{\xi}_j \in \partial \bar{\Xi}_h, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, а разностные операторы Λ_1 и Λ_2 аппроксимируют со вторым порядком соответственно первый и второй дифференциальные операторы в левой части уравнения (7.12):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \mathbf{x}_j &= \frac{1}{h_1} \left(\frac{(k_{11})_{j_1+1, j_2} + (k_{11})_{j_1, j_2}}{2} \cdot \frac{\mathbf{x}_{j_1+1, j_2} - \mathbf{x}_{j_1, j_2}}{h_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k_{11})_{j_1, j_2} + (k_{11})_{j_1-1, j_2}}{2} \cdot \frac{\mathbf{x}_{j_1, j_2} - \mathbf{x}_{j_1-1, j_2}}{h_1} \right), \\ \Lambda_2 \mathbf{x}_j &= \frac{1}{h_2} \left(\frac{(k_{22})_{j_1, j_2+1} + (k_{22})_{j_1, j_2}}{2} \cdot \frac{\mathbf{x}_{j_1, j_2+1} - \mathbf{x}_{j_1, j_2}}{h_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k_{22})_{j_1, j_2} + (k_{22})_{j_1, j_2-1}}{2} \cdot \frac{\mathbf{x}_{j_1, j_2} - \mathbf{x}_{j_1, j_2-1}}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Для решения разностной задачи (7.13) можно использовать один из рассмотренных ранее итерационных методов, например метод переменных направлений (6.30), (6.31):

$$\frac{\mathbf{x}_j^{n+1/2} - \mathbf{x}_j^n}{\tau/2} = \Lambda_1 \mathbf{x}_j^{n+1/2} + \Lambda_2 \mathbf{x}_j^n; \quad (7.14)$$

$$\frac{\mathbf{x}_j^{n+1} - \mathbf{x}_j^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 \mathbf{x}_j^{n+1/2} + \Lambda_2 \mathbf{x}_j^{n+1}. \quad (7.15)$$

При этом не надо забывать, что задача (7.13), в отличие от (5.36), является нелинейной, поскольку коэффициенты k_{11} и k_{22} операторов Λ_1 и Λ_2 сами зависят от решения \mathbf{x}_j . Если эти коэффициенты брать с предыдущей итерации, то реализация дробных шагов (7.14), (7.15) ничем не отличается от линейного случая — используются продольно-поперечные прогонки.

7.4. Теперь выпишем аппроксимацию задачи (7.1) на криволинейной сетке $\bar{\Omega}_h$. Согласно общей методике, описанной в § 2.7, сначала в исходной задаче надо перейти к новым независимым переменным ξ, η , а затем полученную задачу аппроксимировать на равномерной прямоугольной сетке $\bar{\Xi}_h$.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона (7.7) в переменных ξ, η имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (k_{11}u_\xi + k_{12}u_\eta)_\xi + (k_{21}u_\xi + k_{22}u_\eta)_\eta + Jf &= 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi, \\ u(\boldsymbol{\xi}) &= \mu(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial\Xi, \end{aligned} \quad (7.16)$$

где

$$k_{11} = \frac{g_{22}}{J}, \quad k_{12} = k_{21} = -\frac{g_{12}}{J}, \quad k_{22} = \frac{g_{11}}{J}.$$

Видим, что в новых координатах уравнение Пуассона имеет более сложный вид, чем в исходных: оно имеет переменные коэффициенты и смешанные производные. Воспользуемся одной из аппроксимаций этого уравнения, приведенных в работе [12]:

$$\Lambda u_j + J_j f_j = 0, \quad \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi_h, \quad (7.17)$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_{12} + \Lambda_2 + \Lambda_{21}$,

$$\Lambda_1 u_j = \frac{1}{h_1} \left(\frac{k_{11}(3) + k_{11}(0)}{2} \cdot \frac{u(3) - u(0)}{h_1} - \frac{k_{11}(0) + k_{11}(1)}{2} \cdot \frac{u(0) - u(1)}{h_1} \right),$$

$$\Lambda_2 u_j = \frac{1}{h_2} \left(\frac{k_{22}(4) + k_{22}(0)}{2} \cdot \frac{u(4) - u(0)}{h_2} - \frac{k_{22}(0) + k_{22}(2)}{2} \cdot \frac{u(0) - u(2)}{h_2} \right),$$

$$\Lambda_{12} u_j = \frac{1}{2h_1} \left(k_{12}(3) \cdot \frac{u(7) - u(6)}{2h_2} - k_{12}(1) \cdot \frac{u(8) - u(5)}{2h_2} \right),$$

$$\Lambda_{21} u_j = \frac{1}{2h_2} \left(k_{21}(4) \cdot \frac{u(7) - u(8)}{2h_1} - k_{21}(2) \cdot \frac{u(6) - u(5)}{2h_1} \right)$$

и для нумерации узлов использованы обозначения рис. 2.

Для решения разностной задачи

$$\begin{aligned} \Lambda u_j + J_j f_j &= 0, \quad \boldsymbol{\xi}_j \in \Xi_h, \\ u_j &= \mu(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_j)), \quad \boldsymbol{\xi}_j \in \partial\Xi_h \end{aligned} \quad (7.18)$$

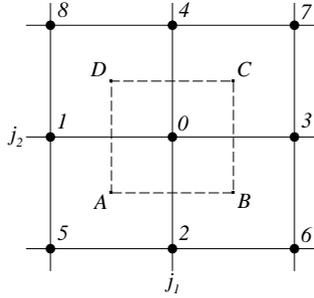


Рис. 2. Шаблон разностного уравнения

можно использовать итерационные методы, основанные на схеме приближенной факторизации для уравнений со смешанными производными [12], либо другие, более простые в реализации (но медленнее сходящиеся) итерационные методы, например, метод последовательной верхней релаксации [5]. Чтобы воспользоваться последним методом, перепишем разностные уравнения (7.17) в следующем виде:

$$\left(\sum_{k=0}^8 \alpha_k u_k \right)_j + P_j = 0, \quad (7.19)$$

где $P_j = h_1 h_2 J_j f_j$, u_k — значение сеточной функции u в узле 9-точечного шаблона, имеющем номер k . Коэффициенты этого уравнения вычисляются по формулам

$$\alpha_k = \frac{h_2}{2h_1} [k_{11}(0) + k_{11}(k)], \quad k = 1, 3, \quad \alpha_k = \frac{h_1}{2h_2} [k_{22}(0) + k_{22}(k)], \quad k = 2, 4,$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{4} [k_{12}(1) + k_{12}(2)], \quad \alpha_7 = \frac{1}{4} [k_{12}(3) + k_{12}(4)],$$

$$\alpha_6 = -\frac{1}{4} [k_{12}(2) + k_{12}(3)], \quad \alpha_8 = -\frac{1}{4} [k_{12}(1) + k_{12}(4)], \quad \alpha_0 = -\sum_{k=1}^8 \alpha_k.$$

Тогда расчетные формулы метода последовательной верхней релаксации примут вид

$$\bar{u}_0 = -\left(P_j + \sum_{k=1,2,5,6} \alpha_k u_k^{n+1} + \sum_{k=3,4,7,8} \alpha_k u_k^n \right) / \alpha_0, \quad (7.20)$$

$$u_0^{n+1} = \tau \bar{u}_0 + (1 - \tau)u_0^n, \quad (7.21)$$

где n — номер итерации, τ — итерационный параметр, $\tau \geq 1$.

7.5. Предположим, что мы хотим сгущать сетку в подобластях больших значений градиента $|\nabla u|$. Тогда целесообразно задать управляющую функцию в виде (2.7.53):

$$w(x, y) = 1 + a|\nabla u|^\beta. \quad (7.22)$$

Однако точное решение u нам не известно, следовательно, невозможно вычислить значения управляющей функции и построить адаптивную сетку. Поэтому для многомерных задач поступают так же, как в одномерном случае, описанном в § 2.7: необходимо одновременно вести поиск численного решения u_j и построение сетки \mathbf{x}_j с помощью какой-либо итерационной процедуры. В качестве начального итерационного приближения берется равномерная прямоугольная сетка в Ω и на этой сетке решается задача (7.18). Полученное решение u_j используется для вычисления управляющей функции в нужных точках. После этого определяется новое положение граничных узлов и путем решения разностной задачи (7.13) строится неравномерная сетка внутри области. Затем на этой сетке вновь решается задача (7.18). Итерационный процесс продолжается до сходимости решения с заданной точностью. Проведенные расчеты тестовых задач показывают, что зачастую хватает двух – трех итераций, поскольку дальнейшее итерирование уже не приводит к заметному повышению точности численного решения.

З А Д А Ч И

7.1. Показать, что если $w \equiv 1$ на γ , то сетка на границе области будет равномерной.

7.2. Показать, что при преобразовании координат (7.2) уравнение Пуассона (7.1) переходит в уравнение (7.7).

7.3. Показать, что при $w \equiv 1$ линейное отображение $x = \xi l_x$, $y = \eta l_y$ является решением уравнения (7.12).

7.4. Доказать, что при $w \equiv 1$ координаты узлов равномерной на Ω сетки являются решением задачи (7.13).

7.5. Показать, что разностная схема (7.18) аппроксимирует задачу (7.16) со вторым порядком по h_1 и h_2 .

§ 8. Метод конечных элементов

8.1. Метод конечных элементов является эффективным способом численного решения различных задач для дифференциальных уравнений с частными производными со сложной формой области решения. Для упрощения изложения рассмотрим суть этого метода на том же простейшем примере, который использовался в предыдущем параграфе — задаче Дирихле для уравнения Пуассона с двумя пространственными переменными в прямоугольнике Ω (7.1). Как и в одномерном случае, вначале сведем эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями. Для этого введем функцию $v = u - u_0$, взяв в качестве u_0 функцию (5.39), которая удовлетворяет граничным условиям задачи (7.1). Тогда функция v является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta v + \tilde{f}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \gamma = \partial\Omega, \end{aligned}$$

где Δ — оператор Лапласа,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= f(x, y) + \frac{y}{l_y} \mu_{xx}(x, l_y) + \left(1 - \frac{y}{l_y}\right) \mu_{xx}(x, 0) + \\ &+ \frac{x}{l_x} \mu_{yy}(l_x, y) + \left(1 - \frac{x}{l_x}\right) \mu_{yy}(0, y). \end{aligned}$$

Таким образом, вместо задачи (7.1) можно решать задачу

$$\begin{aligned} \Delta u + f(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \gamma. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Введем линейный оператор $A = -\Delta$ с областью определения

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u|_{\gamma} = 0 \right\}.$$

Тогда задача (8.1) может быть записана в виде операторного уравнения

$$Au = f. \tag{8.2}$$

Используя скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и взяв произвольные функции $u, v \in D_A \subset L_2(\Omega)$, согласно формуле Грина, получаем

$$(Au, v) = - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx dy = (u, Av),$$

поэтому оператор A является симметрическим [16] на D_A . Для произвольной функции $u \in D_A$ справедливы равенства

$$(Au, u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

поэтому из оценки (см. задачу 8.1)

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\min(l_x, l_y)}{2} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in D_A, \quad (8.3)$$

аналогичной оценке (2.8.14) для функций одной переменной, получаем

$$(Au, u) \geq \delta \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \delta(u, u)$$

где $\delta = 4/\min(l_x^2, l_y^2)$. Таким образом, оператор A является симметрическим и положительно определенным на D_A . Следовательно, на множестве D_A можно ввести скалярное произведение

$$(u, v)_A = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy, \quad u, v \in D_A$$

и норму

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}, \quad u \in D_A. \quad (8.4)$$

Тогда решение $u \in D_A$ задачи (8.1) удовлетворяет равенству

$$(u, v)_A = (f, v), \quad \forall v \in D_A.$$

Неполное в норме (8.4) множество D_A можно замкнуть в этой норме [14], присоединив к нему пределы всех фундаментальных последовательностей функций из D_A . В результате такого замыкания получается гильбертово пространство H_A — энергетическое пространство оператора A с энергетической нормой (8.4), которое совпадает с пространством Соболева $W_2^1(\Omega)$ [4].

Как и в одномерном случае (см. § 2.8), обобщенным решением задачи (8.1) назовем функцию $u \in H_A$, удовлетворяющую равенству

$$(u, v)_A = (f, v), \quad \forall v \in H_A. \quad (8.5)$$

Для одномерной задачи обобщенное решение существует, единственно и оценивается через правую часть f (см. теоремы 2.8.1 и 2.8.2). Для многомерных задач эти вопросы исследуются, например, в работах [4; 6]. Далее будем предполагать, что для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение $u \in H_A$ существует и единственно.

8.2. Обобщенное решение u задачи (8.1) принадлежит пространству $W_2^1(\Omega)$, которое является бесконечномерным и сепарабельным [14], следовательно, в нем существует счетный базис $\varphi_j \in H_A$ ($j = 1, 2, \dots$). Пусть U_N — конечномерное пространство с базисом $\varphi_j \in H_A$ ($j = 1, \dots, N$). Это пространство является замкнутым подпространством пространства H_A и для любой функции $v \in U_N$ имеет место разложение

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N v_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (8.6)$$

с вещественными коэффициентами v_j .

Определение. Приближенным обобщенным решением задачи (8.1) называется функция $u_h \in U_N$, такая что

$$(u_h, v)_A = (f, v), \quad \forall v \in U_N. \quad (8.7)$$

Далее будем предполагать, что для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ приближенное обобщенное решение $u_h \in U_N$ существует и единственно. Для того чтобы функция u_h была приближенным обобщенным решением задачи (8.1), необходимо и достаточно выполнения равенств (см. задачу 8.2)

$$(u_h, \varphi_k)_A = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (8.8)$$

Поскольку приближенное решение принадлежит подпространству U_N , то подставляя его представление (8.6)

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (8.9)$$

в равенства (8.8), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов u_j :

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_k)_A u_j = (f, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (8.10)$$

Квадратная матрица этой системы с элементами $(\varphi_j, \varphi_k)_A$ симметрична. Кроме того, она невырождена, поскольку является относительно энергетического скалярного произведения матрицей Грама для базиса φ_j . Следовательно, система (8.10) однозначно разрешима. В общем

случае матрица этой системы является полнозаполненной, т. е. все ее элементы отличны от нуля. В методе конечных элементов в качестве базисных функций берутся финитные функции, в результате эта матрица становится разреженной и может иметь ленточную структуру.

8.3. Для применения метода конечных элементов необходимо вначале выполнить дискретизацию области — ее разбиение на конечные элементы. В одномерной области элементами являются отрезки — ячейки сетки, неравномерной в общем случае. Для двумерных задач элементами разбиения могут быть треугольники, четырехугольники или другие многоугольники. Всюду далее будем предполагать, что элементами разбиения области Ω являются треугольники, при этом выполняются следующие условия:

- все треугольники не вырождены в том смысле, что величины α внутренних углов любых треугольников всех рассматриваемых разбиений ограничены снизу некоторым положительным числом: $\alpha \geq \alpha_0 > 0$;
- объединение всех треугольников совпадает с $\bar{\Omega}$;
- треугольники могут пересекаться только по своим границам;
- для каждого треугольника любая его вершина либо лежит на границе γ , либо является вершиной некоторого другого треугольника;
- для каждого треугольника любая его сторона либо лежит на γ , либо является стороной некоторого другого треугольника.

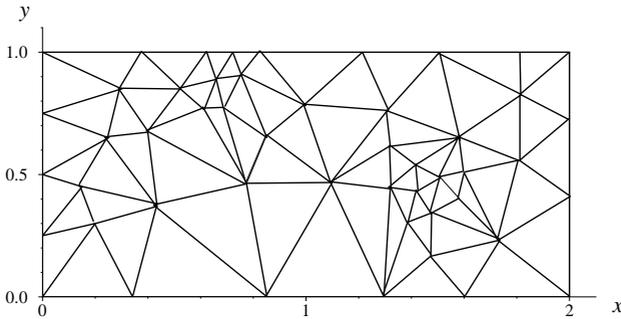


Рис. 3. Триангуляция прямоугольника Ω

Разбиение области решения на треугольники, удовлетворяющее указанным требованиям, называется *триангуляцией* области (рис. 3).

Пусть все различные вершины треугольников (общая вершина нес-

кольных треугольников считается за одну вершину) данной триангуляции упорядочены и число таких вершин равно N_0 . Через J_0 обозначим множество всех натуральных чисел от 1 до N_0 . Вершина \mathbf{x}_j ($j \in J_0$) может принадлежать границе γ или находиться внутри области Ω . Через J обозначим подмножество множества J_0 , состоящее из номеров тех вершин \mathbf{x}_j ($j \in J$), которые лежат внутри Ω . Общее число таких вершин обозначим через N , $N < N_0$. Для треугольника с вершинами \mathbf{x}_{j_k} ($j_k \in J_0, k = 1, 2, 3$) будем использовать обозначение $e_{j_1 j_2 j_3}$.

В качестве примера на рис. 4, а показан случай когда вершина \mathbf{x}_j ($j \in J$) является общей для шести треугольников $e_{j j_k j_{k+1}}, k = 1, \dots, 6$, где j_k — номера вершин в общей нумерации вершин ($j_k \in J_0$) и принято $j_7 = j_1$. Площадь треугольника $e_{j j_k j_{k+1}}$ вычисляется по формуле

$$S_{j j_k j_{k+1}} = \frac{1}{2} \left[(x_{j_k} - x_j) (y_{j_{k+1}} - y_j) - (x_{j_{k+1}} - x_j) (y_{j_k} - y_j) \right].$$

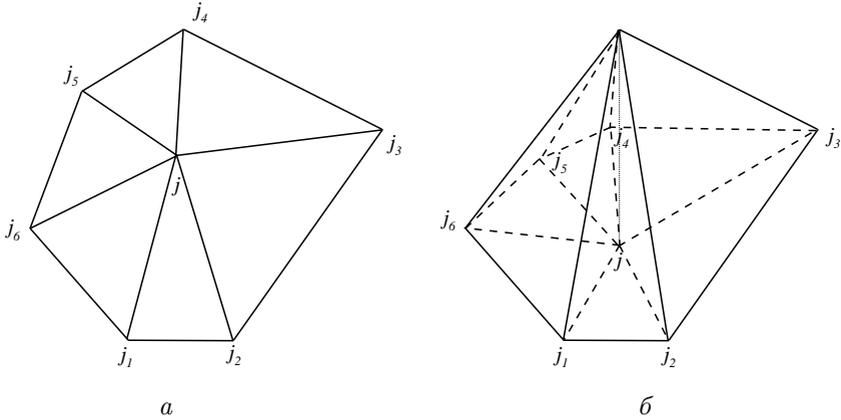


Рис. 4. а — элементы с общей вершиной \mathbf{x}_j ; б — базисная функция $\varphi_j(\mathbf{x})$

После того как триангуляция области выполнена, необходимо выбрать базисные функции. В методе конечных элементов в качестве базисных функций берутся кусочно-полиномиальные функции с конечным носителем. При этом задается набор узловых точек и каждая базисная функция φ связывается с одной из узловых точек \mathbf{x} так, что в этой точке она равна единице, в других узловых точках — нулю и носитель функции φ расположен в некоторой окрестности узловой точ-

ки \mathbf{x} . Так, например, в одномерном случае в качестве узловых точек выбирались узлы сетки и определялись кусочно-линейные финитные базисные функции (2.8.59), связанные с этими узловыми точками. Если множество узловых точек состояло из узлов сетки и середин ее ячеек, то строились кусочно-квадратичные базисные функции (см. подп. 2.8.9). Для двумерных задач имеется еще больший произвол в способах задания узловых точек. Ими могут быть, например, центры треугольников (кусочно-постоянные базисные функции), вершины треугольников (кусочно-линейные функции), вершины треугольников и середины их сторон (кусочно-квадратичные функции от двух переменных x, y) и т. д. Вообще говоря, повышение степени полиномов, представляющих базисные функции, ведет к повышению точности приближенного решения.

Далее мы будем рассматривать лишь случай кусочно-линейных базисных функций для узловых точек, совпадающих с вершинами треугольников построенной триангуляции. Пусть, например, вершина \mathbf{x}_j является внутренней ($j \in J$) и общей для шести треугольников $e_{jjkjk_{k+1}}$ (см. рис. 4, а). Тогда базисная функция $\varphi_j(\mathbf{x})$ должна принимать в этой вершине значение, равное 1, во всех других вершинах — нулевое значение, быть линейной на каждом из треугольников $e_{jjkjk_{k+1}}$ и равной нулю вне объединения этих треугольников. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_{j_k} y_{j_{k+1}} - x_{j_{k+1}} y_{j_k} + (y_{j_k} - y_{j_{k+1}})x - (x_{j_k} - x_{j_{k+1}})y}{S_{jjkjk_{k+1}}}, & \text{если } \mathbf{x} \in \bigcup_{k=1}^6 e_{jjkjk_{k+1}}, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{k=1}^6 e_{jjkjk_{k+1}}, \end{cases} \quad (8.11)$$

являющаяся аналогом кусочно-линейной функции (2.8.59) для одномерной задачи. График функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ на ее носителе изображен на рис. 4, б. По такой же формуле определяются базисные функции $\varphi_j(\mathbf{x})$, связанные с вершинами \mathbf{x}_j ($j \in J$), являющимися общими для другого числа треугольников, а также с вершинами $\mathbf{x}_j \in \gamma$.

Отметим, что $\varphi_j \in H_A$ и система функций φ_j ($j \in J$) линейно независима (задача 8.4) [4]. Тогда в качестве конечномерного подпространства U_N можно взять линейную оболочку N функций φ_j ($j \in J$) и приближенное обобщенное решение искать в виде разложения (8.9), коэффициенты которого определяются путем решения системы (8.10).

Однако теперь, в силу локальности носителей базисных функций, число неизвестных в каждом из уравнений (8.10) будет намного меньше общего числа N неизвестных. Например, для случая, изображенного на рис. 4, а, уравнение (8.10) принимает следующий вид:

$$(\varphi_j, \varphi_j)_A u_j + \sum_{k=1}^6 (\varphi_j, \varphi_{j_k})_A u_{j_k} = (f, \varphi_j), \quad j \in J \quad (8.12)$$

и содержит только семь неизвестных (точнее, не более семи, поскольку некоторые из вершин \mathbf{x}_{j_k} могут оказаться на границе γ , где $u_{j_k} = 0$). В силу равенств

$$\left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right|_{\mathbf{x} \in e_{jj_k j_{k+1}}} = \frac{y_{j_k} - y_{j_{k+1}}}{S_{jj_k j_{k+1}}}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right|_{\mathbf{x} \in e_{jj_k j_{k+1}}} = -\frac{x_{j_k} - x_{j_{k+1}}}{S_{jj_k j_{k+1}}}$$

коэффициенты уравнения (8.12) вычисляются по следующим формулам:

$$(\varphi_j, \varphi_j)_A = \sum_{k=1}^6 \frac{|\mathbf{x}_{j_{k+1}} - \mathbf{x}_{j_k}|^2}{4S_{jj_k j_{k+1}}}; \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_{j_k})_A &= \frac{(x_{j_k} - x_{j_{k+1}})(x_{j_{k+1}} - x_j) + (y_{j_k} - y_{j_{k+1}})(y_{j_{k+1}} - y_j)}{4S_{jj_k j_{k+1}}} + \\ &+ \frac{(x_{j_{k-1}} - x_{j_k})(x_j - x_{j_{k-1}}) + (y_{j_{k-1}} - y_{j_k})(y_j - y_{j_{k-1}})}{4S_{jj_k j_{k-1}}}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где принято, что $j_0 = j_6$.

Итак, при использовании финитных базисных функций матрица системы уравнений (8.10) становится разреженной и для решения этой системы можно использовать стандартные итерационные методы для систем с разреженными матрицами [5]. Отметим, что в некоторых случаях система уравнений (8.10), полученная методом конечных элементов, может совпадать с системой разностных уравнений для решения задачи (8.1) на прямоугольной равномерной сетке (см. задачу 8.6) или с системой разностных уравнений (7.17) для приближенного решения той же задачи на криволинейной сетке.

В работах [4; 6] доказано, что при некоторых условиях на триангуляцию области приближенное обобщенное решение u_h сходится к обобщенному решению u задачи (8.1).

З А Д А Ч И

8.1. Используя схему доказательства леммы 2.8.1, установить справедливость оценки (8.3) и вывести ее уточненный вариант:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\min(l_x, l_y)}{\sqrt{6}} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in D_A.$$

8.2. Используя схему доказательства леммы 2.8.4, установить следующий факт: для того чтобы функция u_h была приближенным обобщенным решением задачи (8.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (8.8).

8.3. Покажите, что функция (8.11) равна единице в узле \mathbf{x}_j и нулю в вершинах \mathbf{x}_{j_k} ($k = 1, \dots, 6$).

8.4. Доказать, что система функций φ_j ($j \in J$) линейно независима.

8.5. Вывести формулы (8.13), (8.14) для коэффициентов уравнения (8.12).

8.6. Доказать, что если вершины треугольников совпадают с узлами прямоугольной равномерной сетки и каждая внутренняя по отношению к Ω вершина \mathbf{x}_j является общей для шести прямоугольных треугольников $e_{jj_k j_{k+1}}$ (рис. 5), то уравнения (8.12) после деления на $h_x h_y$ совпадают со стандартной аппроксимацией (5.36) уравнения Пуассона на пятиточечном шаблоне

$$\frac{u_{j_3} - 2u_j + u_{j_6}}{h_x^2} + \frac{u_{j_5} - 2u_j + u_{j_2}}{h_y^2} + f_j = 0, \quad j \in J.$$

где $f_j = \frac{(f, \varphi_j)}{h_x h_y}$.

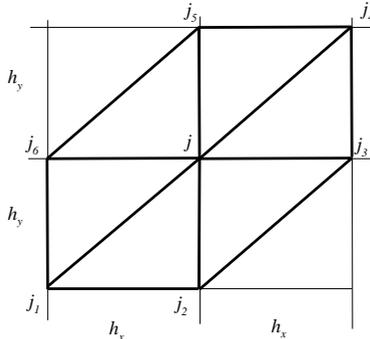


Рис. 5. Конечные элементы на равномерной прямоугольной сетке с шагами h_x и h_y . Вершина \mathbf{x}_j является общей для шести прямоугольных треугольников $e_{jj_k j_{k+1}}$, $k = 1, \dots, 6$, $j_7 = j_1$

§ 9. Контрольная работа по теме «Конечно-разностные схемы для уравнения теплопроводности»

ВАРИАНТ 1

9.v1.1. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости в равномерной норме схемы

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{1}{3}\nu\Lambda u_j^{n+1} + \frac{2}{3}\nu\Lambda u_j^n + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (9.1)$$

аппроксимирующей на равномерной сетке $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$, $h = l/N$) первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом $\nu > 0$. Здесь Λ — оператор второй разностной производной.

9.v1.2. С помощью спектрального метода Неймана получить необходимое условие устойчивости схемы (9.1) по начальным данным при законе предельного перехода $\nu\tau/h^2 = \text{const}$.

9.v1.3. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи (9.1), если $\varphi \equiv 0$, $\mu_0 \equiv 0$, $\mu_l \equiv 0$,

$$u_0(x_j) = 2 \sin\left(\frac{2\pi x_j}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi(l - 2x_j)}{2l}\right).$$

Вычислить норму решения на слое.

ВАРИАНТ 2

9.v2.1. Используя принцип максимума, найти достаточное условие устойчивости в равномерной норме схемы

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{1}{12}\nu\Lambda u_j^{n+1} + \frac{11}{12}\nu\Lambda u_j^n + \varphi_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= \mu_0(t^n), \quad u_N^n = \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (9.2)$$

аппроксимирующей на равномерной сетке $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$, $h = l/N$) первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом $\nu > 0$. Здесь Λ — оператор второй разностной производной.

9.v2.2. С помощью спектрального метода Неймана получить необходимое условие устойчивости схемы (9.2) по начальным данным при законе предельного перехода $\nu\tau/h^2 = \text{const}$.

9.v2.3. С помощью метода Фурье найти решение разностной задачи (9.2), если $\varphi \equiv 0$, $\mu_0 \equiv 0$, $\mu_l \equiv 0$,

$$u_0(x_j) = 2 \sin\left(\frac{2\pi x_j}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x_j}{l}\right).$$

Вычислить норму решения на слое.

§ 10. Контрольная работа по теме «Исследование разностных схем для уравнения теплопроводности»

ВАРИАНТ 1

10.v1.1. С помощью метода операторных неравенств найти необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным схемы

$$\begin{aligned} u_{t,j} &= \frac{1}{3}\nu\Lambda u_j^{n+1} + \frac{2}{3}\nu\Lambda u_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n &= 0, \quad u_N^n = 0, \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned} \tag{10.1}$$

аппроксимирующей на равномерной сетке $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$, $h = l/N$) первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом $\nu > 0$. Здесь

$$u_{t,j} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad \Lambda u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

10.v1.2. Пусть $\nu = \nu(x) > 0$, $\nu_{j+1/2} = 0,5(\nu(x_j) + \nu(x_{j+1}))$,

$$\Lambda u_j^n = \frac{1}{h} (\nu_{j+1/2} u_{x,j}^n - \nu_{j-1/2} u_{\bar{x},j}^n), \quad U^n = u_0^n \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j^n h + u_N^n \frac{h}{2}.$$

Показать, что разностная схема

$$\begin{cases} u_{t,j} = \frac{1}{3}\Lambda u_j^{n+1} + \frac{2}{3}\Lambda u_j^n, & j = 1, \dots, N-1, \\ \nu_{1/2} \left(\frac{1}{3} u_{x,0}^{n+1} + \frac{2}{3} u_{x,0}^n \right) - \frac{h}{2} u_{t,0} = 0, \\ \nu_{N-1/2} \left(\frac{1}{3} u_{\bar{x},N}^{n+1} + \frac{2}{3} u_{\bar{x},N}^n \right) + \frac{h}{2} u_{t,N} = 0, \\ u_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, N \end{cases} \quad (10.2)$$

сохраняет количество тепла U^n , т. е. $U^n = \text{const}$, $n = 0, \dots, M$.

ВАРИАНТ 2

10.v2.1. С помощью метода операторных неравенств найти необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным схемы

$$\begin{cases} u_{t,j} = \frac{1}{12}\nu\Lambda u_j^{n+1} + \frac{11}{12}\nu\Lambda u_j^n, & j = 1, \dots, N-1, \\ u_0^n = 0, & u_N^n = 0, & n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (10.3)$$

аппроксимирующей на равномерной сетке $x_j = jh$ ($j = 0, \dots, N$, $h = l/N$) первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом $\nu > 0$. Здесь

$$u_{t,j} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}, \quad \Lambda u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

10.v2.2. Пусть $\nu = \nu(x) > 0$, $\nu_{j+1/2} = 0,5(\nu(x_j) + \nu(x_{j+1}))$,

$$\Lambda u_j^n = \frac{1}{h} (\nu_{j+1/2} u_{x,j}^n - \nu_{j-1/2} u_{\bar{x},j}^n), \quad U^n = u_0^n \frac{h}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} u_j^n h + u_N^n \frac{h}{2}.$$

Показать, что разностная схема

$$\begin{cases} u_{t,j} = \frac{1}{12}\Lambda u_j^{n+1} + \frac{11}{12}\Lambda u_j^n, & j = 1, \dots, N-1, \\ \nu_{1/2} \left(\frac{1}{12} u_{x,0}^{n+1} + \frac{11}{12} u_{x,0}^n \right) - \frac{h}{2} u_{t,0} = 0, \\ \nu_{N-1/2} \left(\frac{1}{12} u_{\bar{x},N}^{n+1} + \frac{11}{12} u_{\bar{x},N}^n \right) + \frac{h}{2} u_{t,N} = 0, \\ u_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, N \end{cases} \quad (10.4)$$

сохраняет количество тепла U^n , т. е. $U^n = \text{const}$, $n = 0, \dots, M$.

§ 11. Задания для лабораторной работы 4

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме: «Разностные схемы для уравнений параболического типа с одной пространственной переменной». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, выявлении новых, важных для практики особенностей используемых методов, экспериментальном сравнении разностных схем и экспериментальном определении условий их применимости.

По каждому заданию готовится **краткий отчет** (о содержании отчета см. § 1.13).

На лекциях мы изучали только первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности (1.3). Задачи с краевыми условиями второго и третьего рода рассматривались на семинарских занятиях. При выполнении лабораторных работ необходимо будет решать задачи с краевыми условиями первого, второго или третьего рода, а также смешанные краевые задачи, когда на левом конце отрезка $[0, l]$ задано условие одного рода, а на правом — другого (см., например, задачу 1.6 из § 1).

Тестирование созданных программ проводить на точном решении задачи, в качестве которого брать достаточно гладкую произвольную функцию $u(x, t)$ и для нее определять входные данные задачи: подставив ее в исходное уравнение, определить правую часть $f(x, t)$; положив $t = 0$, найти начальные условия — функцию $u_0(x)$; положив $x = 0$ и $x = l$, определить в соответствующих краевых условиях функции $\mu_0(t)$ и $\mu_l(t)$. Для экспериментального определения порядка точности схем выполнить расчеты на последовательности измельчающихся сеток. Для экспериментального определения условий устойчивости схем провести расчеты при разных соотношениях шагов τ и h .

11.1. В первой группе заданий рассматриваются конечно-разностные схемы для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом ν .

Задание 1. *На тестовых задачах с различными краевыми условиями выполнить численное исследование явной схемы. Экспериментально определить порядок точности схемы, а также показать, что схема является условно устойчивой. Экспериментально подтвердить факт повышения точности численного решения при использовании явной схемы повышенного порядка аппроксимации.*

Задание 2. На примере первой краевой задачи экспериментально доказать, что схема Кранка — Николсон имеет второй порядок точности и абсолютно устойчива.

Задание 3. На тестовых задачах с различными краевыми условиями численно исследовать схему с весами (1.5). Экспериментально подтвердить условия устойчивости схемы с весами, приведенные в следствии 2 § 1. Путем проведения численных экспериментов показать, что схема повышенного порядка аппроксимации (вес σ вычисляется по формуле (1.74)) абсолютно устойчива и имеет порядок точности, указанный в формуле (1.100).

Задание 4. Экспериментально доказать, что неявная трехслойная схема (4.7) абсолютно устойчива и имеет порядок точности $O(\tau^2 + h^2)$.

Задание 5. Экспериментально исследовать на устойчивость трехслойную схему (4.9). Исследовать влияние веса σ на точность численного решения.

Задание 6. Экспериментально исследовать на устойчивость трехслойную схему с весами по времени (4.10). Исследовать влияние веса σ на точность численного решения.

Задание 7. Экспериментально исследовать на устойчивость схему Дюфорта — Франкела (4.5). Выбирая $\tau = O(h)$ и $\tau = O(h^2)$, численно показать сущность условной аппроксимации для схемы (4.5), т. е. показать, что при $\tau = O(h)$ аппроксимируется другое дифференциальное уравнение и отклонения численного решения от точного будут существенными, а при $\tau = O(h^2)$ погрешность численного решения будет величиной порядка $O(h^2)$.

11.2. В этом пункте приводятся несколько заданий по экспериментальной проверке свойств конечно-разностных схем для уравнения теплопроводности (3.1) с переменным коэффициентом $\nu(x, t) > 0$. Свойства схем проверять для двух случаев: коэффициент $\nu(x, t)$ является гладкой функцией, например $\nu(x, t) = t + 2e^x$ или $\nu(x, t) = 2x + e^{-t}$; коэффициент $\nu(x, t)$ является разрывной функцией, например, кусочно-постоянной или кусочно-линейной.

Задание 8. На тестовых задачах с краевыми условиями второго рода выполнить численное исследование явной схемы (3.12). Экспериментально определить порядок точности схемы, а также показать, что схема является условно устойчивой.

Задание 9. На примере второй краевой задачи экспериментально

доказать, что схема Кранка — Николсон (схема с весами (3.8) при $\sigma = 0,5$) имеет второй порядок точности и абсолютно устойчива.

Задание 10. На тестовых задачах с краевыми условиями второго рода выяснить порядок точности схемы с весами (3.8) при различных значениях весового параметра. Экспериментально подтвердить условия устойчивости схемы с весами, приведенные в теореме 3.1.

11.3. В этом пункте собраны задания по экспериментальной проверке свойств явной и полностью неявной конечно-разностных схем для нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = [\nu(x, t, u)u_x]_x + f(x, t, u). \quad (11.1)$$

с коэффициентом $\nu > 0$ и правой частью f , зависящими от независимых переменных x, t и искомого решения $u(x, t)$. При использовании явной схемы (3.12) для решения нелинейного уравнения (11.1) сеточные функции $\nu_{j+1/2}^n$ и φ_j^n определяются формулами

$$\nu_{j+1/2}^n = \frac{\nu(x_j, t^n, u_j^n) + \nu(x_{j+1}, t^n, u_{j+1}^n)}{2}, \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^n, u_j^n),$$

поэтому явная схема для нелинейного уравнения является линейной и ее реализация такая же, как в линейном случае.

Для полностью неявной схемы (схема с весами (3.8) при $\sigma = 1$) полагаем

$$\nu_{j+1/2}^{n+1} = \frac{\nu(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1}) + \nu(x_{j+1}, t^{n+1}, u_{j+1}^{n+1})}{2}, \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1}),$$

откуда видно, что полностью неявная схема является нелинейной, поскольку ее коэффициенты и правая часть зависят от искомой функции u^{n+1} на $(n+1)$ -м слое по времени. Для нелинейных схем при переходе со слоя n на слой $(n+1)$ вводятся *итерации по нелинейности*: вычисление функции u^{n+1} по известной функции u^n осуществляется с использованием итерационного процесса, суть которого состоит в том, что на итерации с номером $(m+1)$ определяются значения функции $u^{n+1, m+1}$ по той же разностной схеме, но с коэффициентом $\nu^{n+1, m}$ и правой частью $\varphi^{n, m}$, вычисляемыми по функции $u^{n+1, m}$ с предыдущей итерации. Тем самым схема линеаризуется и принимает следующий вид:

$$\frac{u_j^{n+1,m+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left[\nu_{j+1/2}^{n+1,m} \frac{u_{j+1}^{n+1,m+1} - u_j^{n+1,m+1}}{h} - \nu_{j-1/2}^{n+1,m} \frac{u_j^{n+1,m+1} - u_{j-1}^{n+1,m+1}}{h} \right] + \varphi_j^{n,m}, \quad (11.2)$$

где

$$\nu_{j+1/2}^{n+1,m} = \frac{\nu(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1,m}) + \nu(x_{j+1}, t^{n+1}, u_{j+1}^{n+1,m})}{2},$$

$$\varphi_j^{n,m} = f(x_j, t^{n+1}, u_j^{n+1,m}).$$

В качестве начального приближения полагают $u_j^{n+1,0} = u_j^n$. Итерационный процесс заканчивается либо по ограничению на число итераций, либо по условию достаточной близости решений на двух соседних итерациях.

Отметим, что если правая часть f линейна по u , то в уравнении (11.2) можно использовать $\varphi_j^{n,m+1}$, если этого позволяют условия (2.2.49)–(2.2.51) корректности и устойчивости метода прогонки.

Задание 11. На тестовых задачах для нелинейных уравнений параболического типа выполнить численное исследование явной схемы. Экспериментально определить порядок точности схемы и условия ее устойчивости.

Задание 12. На тестовых задачах для нелинейных уравнений параболического типа выполнить численное исследование полностью неявной схемы. Экспериментально определить порядок точности схемы и условия ее устойчивости.

Приведем несколько задач с известным аналитическим решением, на которых можно тестировать указанные схемы.

Задача 1 (о бегущей температурной волне):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varkappa u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x, t \geq t_0,$$

$$u(x, t_0) = \begin{cases} [\sigma \varkappa \varepsilon^{-1} (ct_0 - x)]^{1/\sigma} & \text{при } x \leq ct_0, \\ 0 & \text{при } x \geq ct_0, \end{cases}$$

$$u(0, t) = u_0 t^{1/\sigma},$$

где $u_0 = (\sigma c^2 / \varkappa)^{1/\sigma}$. Задача имеет точное решение:

$$u(x, t) = \begin{cases} [\sigma \varkappa \varepsilon^{-1} (ct - x)]^{1/\sigma} & \text{при } x \leq ct, \\ 0 & \text{при } x \geq ct, \end{cases}$$

где σ , \varkappa , c , t_0 — положительные параметры, c — скорость распространения температурной волны.

При решении этой задачи ограничиться конечным интервалом интегрирования $x \in [0, l]$ таким, чтобы $ct_0 < 0,5l$. Число узлов на $[0, l]$ вводить таким, чтобы на отрезке $[0, ct_0]$ помещалось не менее пяти ячеек сетки. Конечное значение $t = T$ выбирать таким, что $T \leq l/c$. В этом случае можно полагать $u(l, t) = 0$. Обратите внимание, что начальные данные задачи заданы при $t = t_0 > 0$. В качестве параметров задачи можно взять, например, следующие: $\sigma = 1$, $\varkappa = 1$, $c = 1$, $t_0 = 0,1$, $l = 1$ или такие же значения с заменой $\sigma = 1$ на $\sigma = 2$.

Задача 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((e^x + t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (e^x - 2te^{2x} - tu), \quad x \in (0; l); \quad t \in (0; T];$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = t; \quad u(l, t) = te^l.$$

Задача имеет точное решение $u(x, t) = te^x$.

Задача 3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + x^2 - 6(t+2)u, \quad x \in (0; l); \quad t \in (0; T];$$

$$u(x, 0) = 2x^2; \quad u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = (t+2)l^2.$$

Задача имеет точное решение $u(x, t) = (t+2)x^2$.

Задача 4:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + t \sin x + \cos x + (x+t) \cdot u, \quad x \in (0; l); \quad t \in (0; T];$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = t; \quad u(l, t) = t \cos l.$$

Задача имеет точное решение $u(x, t) = t \cos x$.

Задача 5:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 4(u-t) \cos x, \quad x \in (0; l); \quad t \in (0; T];$$

$$u(x, 0) = \cos x; \quad u(0, t) = 1 + 2t; \quad u(l, t) = \cos l + 2t.$$

Задача имеет точное решение $u(x, t) = \cos x + 2t$.

При решении этой задачи правую границу l выбирать так, чтобы коэффициент $\nu = 2u$ был положительным, например, положить $l < \pi/2$.

§ 12. Задания для лабораторной работы 5

В данном параграфе приведены задания к практическим занятиям на ЭВМ по теме «Итерационные методы численного решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона». Основная цель этих заданий состоит в экспериментальной проверке тех свойств численных методов, которые были установлены теоретически на лекциях и семинарских занятиях, выявлении новых, важных для практики особенностей используемых методов, экспериментальном сравнении методов и экспериментальном определении условий применимости численных методов.

По каждому заданию готовится **краткий отчет** (о содержании отчета см. § 1.13).

12.1. Для всех заданий рассматривается одна и та же задача Дирихле (5.3) для уравнения Пуассона в прямоугольнике Ω . Эта задача аппроксимируется схемой (5.36). Разностная задача (5.36) решается методом установления, при этом начальную функцию $u_0(x, y)$ нужно выбирать так, чтобы она удовлетворяла заданному краевому условию Дирихле (см. формулу (5.39)). Общая схема всех итерационных методов выглядит так:

$$\begin{aligned} B \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \Lambda u_{j,m}^n + f(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \omega_h, \\ u_{j,m}^n &= \mu(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \gamma_h, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{j,m}^0 &= u_0(x_j, y_m), \quad (x_j, y_m) \in \bar{\omega}_h, \end{aligned} \quad (12.1)$$

где n — номер итерационного шага, а τ — итерационный параметр.

Приведем сводку итерационных методов, используемых в заданиях. Для **метода простой итерации** (5.37) оптимальное значение итерационного параметра τ находится по формуле (5.41). Для программной реализации метода требуется два двумерных массива.

Представим оператор Λ в виде суммы трех операторов

$$\Lambda = -D + L + R,$$

где

$$\begin{aligned} Du_{j,m} &= \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) u_{j,m}, \\ Lu_{j,m} &= \frac{u_{j-1,m}}{h_x^2} + \frac{u_{j,m-1}}{h_y^2}, \quad Ru_{j,m} = \frac{u_{j+1,m}}{h_x^2} + \frac{u_{j,m+1}}{h_y^2}. \end{aligned}$$

В методе Зейделя производится следующая замена разностного уравнения (5.36):

$$(-D + L)u_{j,m}^{n+1} + Ru_{j,m}^n + f_{j,m} = 0. \quad (12.2)$$

Преобразуем итерационную схему (12.2):

$$(-D + L)(u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n) + (-D + L)u_{j,m}^n + Ru_{j,m}^n + f_{j,m} = 0,$$

или

$$(D - L)(u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n) = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}. \quad (12.3)$$

Сравнивая схему (12.3) с общей схемой итерационных методов (12.1), видим, что $B = D - L \neq E$, т. е. схема Зейделя неявная с итерационным параметром $\tau = 1$.

Расчетные формулы получаем из разностного уравнения (12.2):

$$\frac{u_{j-1,m}^{n+1} - 2u_{j,m}^{n+1} + u_{j+1,m}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{j,m-1}^{n+1} - 2u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m+1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{j,m} = 0, \quad (12.4)$$

причем расчет $u_{j,m}^{n+1}$ можно проводить по строкам, т. е. для каждого $m = 1, \dots, N_y - 1$ эта величина вычисляется при изменении $j = 1, \dots, N_x - 1$. Расчет начинается с узла (x_1, y_1) и проводится по строкам сетки ω_h с перебором строк снизу вверх. Найденное значение $u_{j,m}^{n+1}$ размещается в массиве на месте $u_{j,m}^n$, поэтому для программной реализации метода Зейделя требуется только один двумерный массив.

ПВР — метод последовательной верхней релаксации отличается от метода Зейделя тем, что вначале по схеме, аналогичной (12.2), вычисляется вспомогательная величина $\bar{u}_{j,m}$:

$$-D\bar{u}_{j,m} + Lu_{j,m}^{n+1} + Ru_{j,m}^n + f_{j,m} = 0, \quad (12.5)$$

а затем уже определяется $u_{j,m}^{n+1}$:

$$u_{j,m}^{n+1} = \omega \bar{u}_{j,m} + (1 - \omega)u_{j,m}^n, \quad (12.6)$$

где $1 \leq \omega < 2$ — параметр верхней релаксации.

Приведем формулы (12.5), (12.6) к общей схеме (12.1) итерационных методов. Из равенства (12.6) следует, что

$$\bar{u}_{j,m} = \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\omega} + u_{j,m}^n.$$

Поэтому уравнение (12.5) можно переписать как

$$-D \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\omega} - Du_{j,m}^n + Lu_{j,m}^n + Ru_{j,m}^n + Lu_{j,m}^{n+1} - Lu_{j,m}^n + f_{j,m} = 0,$$

или

$$-D \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\omega} + \Lambda u_{j,m}^n + L(u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n) + f_{j,m} = 0,$$

т. е.

$$(D - \omega L) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\omega} = \Lambda u_{j,m}^n + f_{j,m}. \quad (12.7)$$

Таким образом, метод ПВР — неявный итерационный метод с оператором $B = D - \omega L$ и итерационным параметром τ , равным параметру релаксации ω . При $\omega = 1$ метод ПВР совпадает с методом Зейделя (12.3).

Расчетные формулы следуют из формул (12.5) и (12.6). При каждом фиксированном $m = 1, \dots, N_y - 1$ из уравнения

$$\frac{u_{j-1,m}^{n+1} - 2\bar{u}_{j,m} + u_{j+1,m}^n}{h_x^2} + \frac{u_{j,m-1}^{n+1} - 2\bar{u}_{j,m} + u_{j,m+1}^n}{h_y^2} = -f_{j,m}$$

в цикле по $j = 1, \dots, N_x - 1$ определяется вспомогательная величина $\bar{u}_{j,m}$, которая сразу подправляется по формуле релаксации (12.6), поэтому для реализации метода требуется только один двумерный массив.

Оптимальное значение итерационного параметра τ в случае квадратной сетки ($h_x = h_y = h$, $N_x = N_y = N$), покрывающей квадрат ($l_x = l_y = l$), вычисляется по формуле

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi h}{l}}. \quad (12.8)$$

Остальные три метода: **СПФ** — схема приближенной факторизации, **СПН** — схема переменных направлений и **ССП** — схема стабилизирующей поправки — подробно описаны в § 6. Для программной реализации этих методов достаточно двух двумерных массивов.

12.2. Тестовые задачи. Задача (5.3) рассматривается в единичном ($l_x = l_y = 1$) квадрате Ω , при этом функция f задана в области Ω , а функция μ — на ее границе $\gamma = \partial\Omega$.

Задача 1:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4, \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = y(1 - y), \\ \mu(x, 0) &= \mu(x, 1) = x(1 - x). \end{aligned}$$

Задача имеет точное решение (рис. 6, а):

$$u(x, y) = x(1 - x) + y(1 - y), \quad (12.9)$$

которое является и решением разностной задачи (5.36). Таким образом, на этом решении разностная схема (5.36) аппроксимирует дифференциальную задачу (5.3) с бесконечным порядком.

Задача 2:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -4 + 12(x + y) - 12(x^2 + y^2), \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = y^2(1 - y)^2, \\ \mu(x, 0) &= \mu(x, 1) = x^2(1 - x)^2. \end{aligned}$$

Задача имеет точное решение (рис. 6, б):

$$u(x, y) = x^2(1 - x)^2 + y^2(1 - y)^2. \quad (12.10)$$

Задача 3:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = 0, \\ \mu(x, 0) &= \mu(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

Задача имеет точное решение (рис. 7, а):

$$u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y). \quad (12.11)$$

Задача 4:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 32\pi^2 \sin(4\pi x) \sin(4\pi y), \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = 0, \\ \mu(x, 0) &= \mu(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

Задача имеет точное решение (рис. 7, б):

$$u(x, y) = \sin(4\pi x) \sin(4\pi y). \quad (12.12)$$

Для следующих задач точное решение не известно, поэтому они решались численно. Графики полученных решений изображены на рис. 8, 9, а.

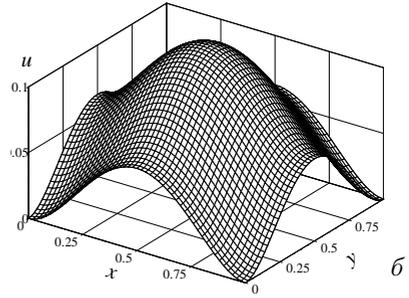
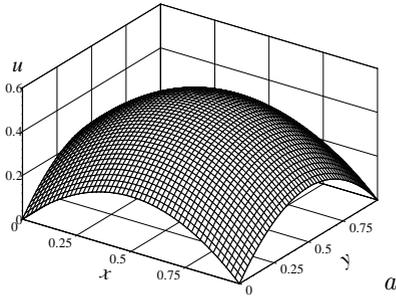


Рис. 6. Графики решений: *a* — задача 1; *б* — задача 2

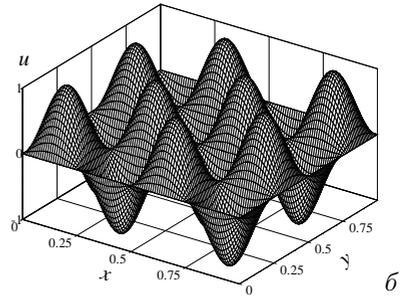
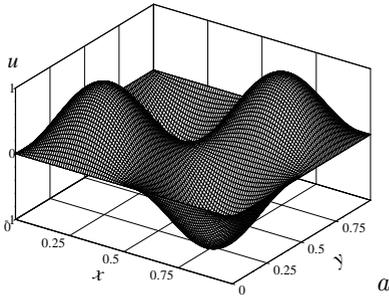


Рис. 7. Графики решений: *a* — задача 3; *б* — задача 4

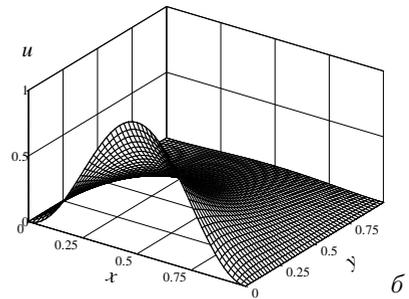
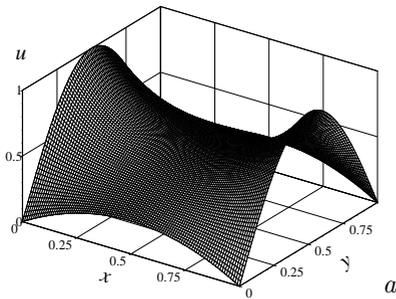


Рис. 8. Графики решений: *a* — задача 5; *б* — задача 6

Задача 5:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin^2(\pi xy), \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = \sin(\pi y), \\ \mu(x, 0) &= \mu(x, 1) = x(1 - x). \end{aligned}$$

Задача 6:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \arctan\left(\frac{x+1}{y+1}\right), \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = 0, \\ \mu(x, 0) &= \sin^2(\pi x), \quad \mu(x, 1) = \cosh[x(1-x)] - 1. \end{aligned}$$

Задача 7:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |2x - y|, \\ \mu(0, y) &= \mu(1, y) = y(1 - y), \\ \mu(x, 0) &= |\sin(2\pi x)|, \quad \mu(x, 1) = |\sin(2\pi x)|e^{2x}. \end{aligned}$$

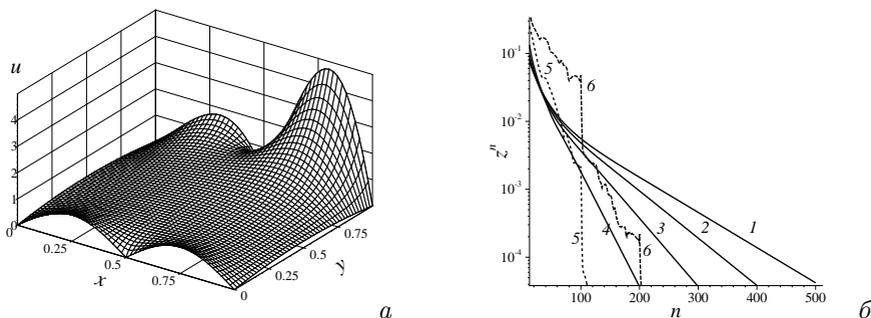


Рис. 9. *а* — график решения задачи 7; *б* — поведение нормы разности $z^n = \|u^{n+1} - u^n\|_C$; метод ПВР для задачи 7 при различных значениях параметра верхней релаксации: $\tau = 1.5$ (1), $\tau = 1.6$ (2), $\tau = 1.7$ (3), $\tau = 1.8$ (4), $\tau = 1.9$ (5), $\tau = 1.95$ (6). Размер сетки $N_x = N_y = 50$

12.3. Задания к практическим занятиям. Для каждого из двух указанных в задании итерационных методов определить экспериментально оптимальное значение $\tau_{\text{опт}}$ итерационного параметра τ , при котором итерации сходятся наиболее быстро. В расчетах использовать квадратную сетку с шагом h . Выяснить характер зависимости $\tau_{\text{опт}}$ от h . Экспериментально проверить сходимость разностной схемы на последо-

вательности измельчающихся сеток. На основе численных экспериментов выявить, какой из двух итерационных методов предпочтительнее для рассматриваемого класса тестовых задач.

В процессе решения задачи выводить в файл данные, характеризующие сходимость итерационного процесса, например, номер итерации n и норму разности двух последовательных итераций $z^n = \|u^{n+1} - u^n\|_C$. Эту же информацию можно визуализировать (см. рис. 9, б). Если известно точное решение $u(x, y)$ тестовой задачи, то дополнительно в файл выводить и норму $\|u^n - (u)_h\|_C$ отклонений итераций от точного решения. Графическая информация должна включать графики численного решения на каждой итерации в одном или нескольких заданных сечениях $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$.

Задание 1. *Метод простой итерации и СПФ.*

Задание 2. *Метод Зейделя и СПН.*

Задание 3. *Метод ПВР и ССП.*

Задание 4. *Метод простой итерации и СПН.*

Задание 5. *Метод Зейделя и ССП.*

Задание 6. *Метод ПВР и СПФ.*

Задание 7. *Метод простой итерации и ССП.*

Задание 8. *Метод Зейделя и СПФ.*

Задание 9. *Метод ПВР и СПН.*

Задание 10. *Метод простой итерации и метод Зейделя.*

Задание 11. *Метод Зейделя и метод ПВР.*

Задание 12. *Метод простой итерации и метод ПВР.*

12.4. Следующая группа заданий предусматривает решение нелинейных уравнений эллиптического типа. Таковыми являются, например, уравнения метода эквираспределения (7.12). В заданиях требуется построить адаптивную сетку с помощью двух итерационных методов и провести анализ скорости сходимости сравниваемых методов. Управляющую функцию вычислять по формуле (7.22), где u — одно из точных решений (12.9)—(12.12) задач 1—4. Выяснить влияние параметров a и β на вид адаптивной сетки.

Таким образом, следующие 12 заданий, с 13-го по 24-е, заключаются в сравнении итерационных методов, перечисленных в первых 12 заданиях, но не на задаче Дирихле для уравнения Пуассона, а на нелинейной задаче (7.13) для уравнений метода эквираспределения.

Ответы, указания, решения

$$1.1. \quad \nu \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}.$$

$$1.2. \quad \nu \frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}; \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^n) + \frac{\tau}{2} f_t(x_j, t^n) + \nu \frac{\tau}{2} f_{xx}(x_j, t^n).$$

$$1.3. \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6}; \quad \tau = \frac{h^2}{2\nu\sqrt{5}}.$$

Р е ш е н и е. Пусть $u(x, t)$ — решение однородного уравнения теплопроводности

$$u_t = \nu u_{xx}. \quad (13.1)$$

Рассмотрим на этом решении локальную погрешность аппроксимации в узле (x_j, t^n) дифференциального уравнения (13.1) разностным уравнением (1.101):

$$\begin{aligned} \psi_{h,j}^n &= (L_h(u)_h - f_h) \Big|_{(x_j, t^n)} = \left(u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} \right) (x_j, t^n) - \\ &\quad - \sigma \nu \left(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \frac{h^4}{360} u_{xxxxxx} \right) (x_j, t^{n+1}) - \\ &= -(1 - \sigma) \nu \left(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \frac{h^4}{360} u_{xxxxxx} \right) (x_j, t^n) + O(\tau^3 + h^6) = \\ &= u_t + \frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \sigma \nu \left(u_{xx} + \tau u_{xxt} + \frac{\tau^2}{2} u_{xxtt} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \tau \frac{h^2}{12} u_{xxxxt} + O(\tau^2 h^2) + \frac{h^4}{360} u_{xxxxxx} + O(\tau h^4) \right) - \\ &\quad - (1 - \sigma) \nu \left(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \frac{h^4}{360} u_{xxxxxx} \right) + O(\tau^3 + h^6). \end{aligned}$$

В последнем равенстве все производные вычисляются в одном и том же узле (x_j, t^n) . Далее для сокращения записи формул этот узел указываться не будет.

После приведения подобных получим

$$\begin{aligned} \psi_{h,j}^n &= u_t - \nu u_{xx} + \frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \sigma \nu \tau \left(u_{xxt} + \frac{\tau}{2} u_{xxtt} + \frac{h^2}{12} u_{xxxxt} \right) - \\ &\quad - \nu \left(\frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \frac{h^4}{360} u_{xxxxxx} \right) + O(\tau^3 + h^6 + \tau^2 h^2 + \tau h^4). \end{aligned}$$

Учитывая, что для решения уравнения (13.1) выполняются равенства

$$\begin{aligned} u_t - \nu u_{xx} &= 0, & u_{tt} &= \nu u_{xxt}, & u_{txx} &= \nu u_{xxxx}, & u_{tt} &= \nu^2 u_{xxxx}, \\ u_{txxxx} &= \nu u_{xxxxxx}, & u_{ttxx} &= \nu^2 u_{xxxxxx}, & u_{ttt} &= \nu^3 u_{xxxxxx}, \end{aligned}$$

перепишем выражение для погрешности аппроксимации в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_{h,j}^n &= \left(\frac{\tau}{2} \nu^2 - \sigma \nu^2 \tau - \nu \frac{h^2}{12} \right) u_{xxxx} + \\ &+ \left(\frac{\tau^2}{6} \nu^3 - \tau \sigma \nu^2 \frac{h^2}{12} - \sigma \nu^3 \frac{\tau^2}{2} - \nu \frac{h^4}{360} \right) u_{xxxxxx} + O(\tau^3 + h^6 + \tau^2 h^2 + \tau h^4). \end{aligned}$$

Пусть

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau\nu}. \quad (13.2)$$

Тогда коэффициент при u_{xxxx} обратится в нуль и, следовательно,

$$\psi_{h,j}^n = \frac{\nu}{12} \left(\frac{h^4}{20} - \tau^2 \nu^2 \right) u_{xxxxxx} + O(\tau^3 + h^6 + \tau^2 h^2 + \tau h^4).$$

Если теперь приравнять нулю коэффициент при u_{xxxxxx} , т. е. взять

$$\tau = \frac{h^2}{\nu\sqrt{20}}, \quad (13.3)$$

то для погрешности аппроксимации будем иметь выражение $\psi_{h,j}^n = O(h^6)$.

1.4. $O(\tau^2 + h^2)$.

У к а з а н и е. Покажите, что разностное уравнение схемы (1.102) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{6\tau} (h^2 \Lambda u_j^{n+1} - h^2 \Lambda u_j^n) + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \Lambda \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2},$$

или

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \Lambda \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{6\tau\nu} \right) u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{6\tau\nu} \right) u_j^n \right]. \quad (13.4)$$

Таким образом, схема (1.102) является схемой с весами, причем

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{6\tau\nu}.$$

1.5. $O(\tau^2 + h^4)$.

У к а з а н и е. Покажите, что схема (1.103) является схемой с весами повышенного порядка аппроксимации.

1.6. У к а з а н и е. При использовании трехточечного шаблона для аппроксимации производной $u_x(0, t)$ в левом граничном узле явная схема с порядком аппроксимации $O(\tau + h^2)$ запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{-3u_0^n + 4u_1^n - u_2^n}{2h} + \gamma u_0^n &= \mu_0(t^n), \\ u_N^n &= \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\ u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Алгоритм получения решения на временном слое t^{n+1} включает в себя два шага:

- 1) вычисление с помощью разностного уравнения значений u_j^{n+1} во внутренних узлах сетки x_j , $j = 1, \dots, N-1$;
- 2) определение значений u_0^{n+1} и u_N^{n+1} в граничных узлах $x_0 = 0$ и $x_N = l$ на основе разностных уравнений в этих узлах с использованием при необходимости значений u_j^{n+1} во внутренних узлах, уже вычисленных на первом шаге. Например:

$$u_0^{n+1} = \frac{4u_1^{n+1} - u_2^{n+1} - 2h\mu_0(t^{n+1})}{3 - 2h\gamma}. \quad (13.6)$$

Условие $\gamma \leq 0$ исходной задачи (1.104) гарантирует, что $3 - 2h\gamma \neq 0$ при любом h .

Теперь для аппроксимации той же производной $u_x(0, t)$ будем использовать двухточечный шаблон. Чтобы получить на решении задачи аппроксимацию второго порядка по h , потребуем выполнения дифференциального уравнения вплоть до границы $x = 0$. Тогда

$$u_{xx}(0, t) = \frac{1}{\nu} (u_t(0, t) - f(0, t)) \quad (13.7)$$

и разностная схема

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + f_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
 \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2\nu} \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - f_0^n \right) + \gamma u_0^n &= \mu_0(t^n), \\
 u_N^n &= \mu_l(t^n), \quad n = 0, \dots, M, \\
 u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

будет аппроксимировать задачу (1.104) с порядком $O(\tau + h^2)$.

Алгоритм решения по этой схеме совпадает с алгоритмом реализации схемы (13.5), только вместо (13.6) теперь используем другую формулу:

$$u_0^{n+1} = \frac{u_1^{n+1} + \frac{h^2}{2\nu\tau} (u_0^n + \tau f_0^{n+1}) - h\mu_0(t^{n+1})}{1 + \frac{h^2}{2\nu\tau} - h\gamma}. \tag{13.9}$$

1.7. У к а з а н и е. Соответствующие полностью невные схемы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + f_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
 \frac{-3u_0^{n+1} + 4u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{2h} + \gamma u_0^{n+1} &= \mu_0(t^{n+1}), \\
 u_N^{n+1} &= \mu_l(t^{n+1}), \quad n = 0, \dots, M-1, \\
 u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

и

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \nu \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + f_j^{n+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \\
 \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} - \frac{h}{2\nu} \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - f_0^{n+1} \right) + \gamma u_0^{n+1} &= \mu_0(t^{n+1}), \\
 u_N^{n+1} &= \mu_l(t^{n+1}), \quad n = 0, \dots, M-1, \\
 u_j^0 &= u_0(x_j), \quad j = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

В обеих схемах разностные уравнения во внутренних узлах являются трехточечными:

$$a_j u_{j-1}^{n+1} - c_j u_j^{n+1} + b_j u_{j+1}^{n+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$a_j = b_j = r, \quad c_j = 1 + a_j + b_j, \quad d_j = -u_j^n - \tau f_j^{n+1}, \quad r = \frac{\nu\tau}{h^2},$$

поэтому для вычисления значений u_j^{n+1} можно использовать метод прогонки

$$u_N^{n+1} = \mu_l(t^{n+1}), \quad u_j^{n+1} = \xi_j u_{j+1}^{n+1} + \eta_j, \quad j = N-1, \dots, 0,$$

прогоночные коэффициенты которого задаются следующими формулами:

$$\xi_j = \frac{b_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad \eta_j = \frac{a_j \eta_{j-1} - d_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо предварительно определить начальные коэффициенты ξ_0 и η_0 . Для схемы (13.11) из граничного условия, записанного в виде (13.9), получаем

$$u_0^{n+1} = \xi_0 u_1^{n+1} + \eta_0, \quad (13.12)$$

где

$$\xi_0 = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2\nu\tau} - h\gamma}, \quad \eta_0 = \frac{\frac{h^2}{2\nu\tau} (u_0^n + \tau f_0^{n+1}) - h\mu_0(t^{n+1})}{1 + \frac{h^2}{2\nu\tau} - h\gamma}.$$

Для схемы (13.10) граничное условие при $x = 0$ также можно записать в виде (13.12). Для этого надо исключить из формулы (13.6) значение u_2^{n+1} , используя для этого разностное уравнение во внутреннем узле с номером $j = 1$:

$$a_1 u_0^{n+1} - c_1 u_1^{n+1} + b_1 u_2^{n+1} = d_1.$$

В результате получим

$$\xi_0 = \frac{4b_1 - c_1}{b_1(3 - 2h\gamma) - a_1}, \quad \eta_0 = -\frac{d_1 + 2hb_1\mu_0^{n+1}}{b_1(3 - 2h\gamma) - a_1}.$$

1.8. $\sigma \geq 1 - \frac{h^2}{2\tau\nu}.$

1.9. У к а з а н и е. Показать, что $|\lambda(\varphi)| \leq 1 \quad \forall \varphi \in R.$

1.10. У к а з а н и е. Покажите, что при $\sigma \geq 0,5$ необходимое условие устойчивости Неймана выполняется при любом законе предельного перехода, а при $0 \leq \sigma < 0,5$ необходимое условие устойчивости имеет вид неравенства (1.73).

$$1.11. \quad u_j^n = \left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}\right)^n \sin(\pi x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

Р е ш е н и е. Для решения u^n задачи (1.107) справедливо представление (1.65), при этом $T_{(k)}^n = q_k^n T_{(k)}^0$, $q_k = 1 - \tau\nu\lambda_k$, $T_{(k)}^0$ — коэффициенты Фурье в представлении (1.64) начальной функции, т. е.

$$T_{(k)}^0 = (u^0, u^{(k)}). \quad (13.13)$$

В разностной задаче (1.107) $l = 1$ и

$$u_j^0 = \sin(\pi x_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_j^{(1)}.$$

Тогда из формулы (13.13) получим

$$T_{(k)}^0 = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$T_{(k)}^n = \begin{cases} q_k^n/\sqrt{2}, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

и представление решения (1.65) принимает вид $u^n = T_{(1)}^n u^{(1)}$.

$$1.12. \quad u_j^n = \left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}\right)^n \sin(\pi x_j) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2(\pi h)\right)^n \sin(2\pi x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

У к а з а н и е. Покажите, что в представлении (1.65) только два коэффициента $T_{(1)}^n$ и $T_{(2)}^n$ отличны от нуля.

$$1.13. \quad u_j^n = \left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}\right)^n \sin(\pi x_j) + \frac{1 - \left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{3\pi h}{2}\right)^n}{\frac{4\nu}{h^2} \sin^2 \frac{3\pi h}{2}} \sin(3\pi x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

У к а з а н и е. Для решения u^n задачи (1.110) справедливо представление в виде конечного ряда Фурье (1.65). После подстановки функции (1.65) в разностное уравнение задачи (1.110) получим следующие уравнения для коэффициентов Фурье:

$$\frac{T_{(k)}^{n+1} - T_{(k)}^n}{\tau} + \nu\lambda_k T_{(k)}^n - f_{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (13.14)$$

где $f_{(k)}$ — коэффициенты Фурье функции $f_j = \sin(3\pi x_j)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} T_{(k)}^n &= (1 - \tau\nu\lambda_k)^n T_{(k)}^0 + \\ &+ \tau f_{(k)} \left[1 + (1 - \tau\nu\lambda_k) + (1 - \tau\nu\lambda_k)^2 + \dots + (1 - \tau\nu\lambda_k)^{n-1} \right] = \\ &= (1 - \tau\nu\lambda_k)^n T_{(k)}^0 + \tau f_{(k)} \frac{1 - (1 - \tau\nu\lambda_k)^n}{\tau\nu\lambda_k}. \end{aligned}$$

С учетом равенств

$$u_j^0 = \sin(\pi x_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_j^{(1)}, \quad f_j = \sin(3\pi x_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_j^{(3)}$$

получаем

$$T_{(k)}^n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \tau\nu\lambda_1)^n, & k = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - (1 - \tau\nu\lambda_3)^n}{\nu\lambda_3}, & k = 3, \\ 0, & k \neq 1, k \neq 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1.14.} \quad u_j^n &= 1 - x_j + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left[\left(1 - \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \right)^n \sin(k\pi x_j) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \sum_{p=1}^{N-1} x_p (1 - x_p) \sin(k\pi x_p) h \right], \quad j = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Решение u_j^n разностной схемы (1.111) не обращается в нуль на границе, поэтому мы не можем представить это решение в виде конечного ряда Фурье. Чтобы это все же можно было сделать, преобразуем исходную схему к схеме с однородными краевыми условиями. Для этого введем функцию (1.55):

$$v_j^n = 1 - x_j$$

и перейдем к задаче (1.56) с однородными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\tau} &= \nu \Lambda z_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ z_0^n &= 0, \quad z_N^n = 0, \\ z_j^0 &= x_j(1 - x_j). \end{aligned}$$

Для решения z^n этой задачи справедливо представление в виде конечного ряда Фурье

$$z^n = \sum_{k=1}^{N-1} T_{(k)}^n u^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \tau \nu \lambda_k)^n T_{(k)}^0 u^{(k)},$$

где

$$T_{(k)}^0 = (z^0, u^{(k)}) = \sum_{j=1}^{N-1} x_j(1 - x_j) \sqrt{2} \sin(k\pi x_j) h.$$

1.15. У к а з а н и е. Поскольку схема (1.102) записывается в виде схемы с весами (13.4), то достаточно проверить выполнение условия леммы 1.3.

1.16. У к а з а н и е. Смотри указание к задаче 1.5 и следствие 3 леммы 1.3.

$$\mathbf{2.2.} \quad \tau \leq \frac{h^2}{2\nu \cos^2\left(\frac{\pi h}{2l}\right)}.$$

Р е ш е н и е. В схеме (2.56) оператор Λ есть оператор второй разностной производной

$$\Lambda u = u_{\bar{x}x}.$$

Свойства оператора $\overset{\circ}{A} = -\Lambda$, действующего в пространстве H_h сеточных функций, обращающихся в нуль на границах $x = 0$ и $x = l$, известны [16]: он является положительно определенным, самосопряженным, имеет полную систему собственных функций, его норма вычисляется по формуле (2.52). Следовательно, оператор $A = \nu \overset{\circ}{A}$ также является положительно определенным и самосопряженным оператором и

$$\|A\| = \nu \left\| \overset{\circ}{A} \right\| = \frac{4\nu}{h^2} \cos^2\left(\frac{\pi h}{2l}\right).$$

Для явной схемы $B = E$, поэтому $B = B^* > 0$.

Итак, все условия теоремы 2.7 выполнены, поэтому необходимым и достаточным условием устойчивости в H_A по начальным данным с постоянной $\rho = 1$ будет неравенство (2.55):

$$E \geq \frac{\tau}{2}A,$$

или

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)} \leq \frac{2}{\tau}, \quad \forall u \in H_h, \quad u \neq 0. \quad (13.15)$$

Норма самосопряженного положительного оператора A определяется по формуле (2.46), поэтому неравенство (13.15) эквивалентно неравенству $\|A\| \leq 2/\tau$ или неравенству

$$\frac{4\nu}{h^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right) \leq \frac{2}{\tau}. \quad (13.16)$$

2.3. Схема абсолютно устойчива.

У к а з а н и е. Используя тождество (1.86), показать, что неявная схема (2.58) записывается в каноническом виде (2.2) с операторами $A = \nu \overset{\circ}{A}$ и $B = E + \tau A$. Показать, что $B = B^* > 0$. Доказать, что необходимое и достаточное условие (2.55) устойчивости в H_A по начальным данным будет выполнено при любых шагах τ и h .

2.4. Схема абсолютно устойчива.

У к а з а н и е. Показать, что каноническая форма схемы Кранка — Николсон (2.59) имеет вид

$$\left(E - \frac{\tau}{2}\nu\Lambda \right) u_t - \nu\Lambda u^n = f^{n+1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13.17)$$

u^0 — задано,

т. е. $A = \nu \overset{\circ}{A}$ и $B = E + \frac{\tau}{2}A$.

$$\mathbf{2.5.} \quad \tau \geq \frac{h^2}{\nu} - \frac{h^2}{2\nu \cos^2 \left(\frac{\pi h}{2l} \right)}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть разностного уравнения

$$\frac{1}{2}u_{t,j+1} + \frac{1}{2}u_{t,j-1} = \frac{1}{2} \left[u_{t,j+1} - 2u_{t,j} + u_{t,j-1} \right] + u_{t,j} = \frac{h^2}{2}\Lambda u_{t,j} + u_{t,j}.$$

Следовательно, разностная схема (2.60) запишется в каноническом виде так:

$$\left(E + \frac{h^2}{2}\Lambda - \nu\tau\Lambda\right)u_t - \nu\Lambda u^n = f^{n+1},$$

или

$$\left(E - \frac{h^2}{2\nu}A + \tau A\right)u_t + Au^n = f^{n+1} \quad (13.18)$$

и необходимое и достаточное условие (2.55) устойчивости примет вид неравенства

$$E - \frac{h^2}{2\nu}A + \tau A \geq \frac{\tau}{2}A,$$

или

$$E \geq \left(\frac{h^2}{2\nu} - \frac{\tau}{2}\right)A. \quad (13.19)$$

При $\tau \geq h^2/\nu$ коэффициент при операторе A не положителен, поэтому неравенство (13.19) при таких τ будет справедливым. Пусть теперь $0 < \tau < h^2/\nu$. Тогда

$$\frac{h^2}{2\nu} - \frac{\tau}{2} > 0.$$

Рассуждая далее так же, как при решении задачи 2.2, получаем неравенство, эквивалентное (13.19):

$$\|A\| \leq \frac{2\nu}{h^2 - \tau\nu},$$

или

$$\frac{4\nu}{h^2} \cos^2\left(\frac{\pi h}{2l}\right) \leq \frac{2\nu}{h^2 - \tau\nu}. \quad (13.20)$$

2.6. Схема абсолютно устойчива.

У к а з а н и е. Преобразуя левую часть разностного уравнения аналогично тому, как это делалось при решении предыдущей задачи, получаем канонический вид разностной схемы

$$\left(E - \frac{h^2}{6\nu}A + \frac{\tau}{2}A\right)u_t + Au^n = f^{n+1/2}.$$

Следовательно, необходимое и достаточное условие устойчивости запишется так:

$$E \geq \frac{h^2}{6\nu}A.$$

2.7. Схема абсолютно устойчива.

3.1. $O(\tau + h^2)$.

3.2. $\tau \leq \frac{h^2}{2 \max_{x,t} \nu(x,t)}$.

3.3. $O(\tau + h^2)$.

$$\mathbf{3.4.} \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \Lambda^n u_j^n + f_j^n, & j = 1, \dots, N-1, \\ \nu_{1/2}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - f(0, t^n) \right) = \mu_0^n, \\ \nu_{N-1/2}^n \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\tau} - f(l, t^n) \right) = \mu_l^n, \\ u_j^0 = u_0(x_j), & j = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (13.21)$$

У к а з а н и е. Для аппроксимации дифференциального уравнения можно использовать разностные уравнения схем (3.23) или (3.25).

Легко проверить, что аппроксимация

$$\nu_0^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \mu_0^n$$

краевого условия на левой границе будет иметь только первый порядок по h . Для повышения порядка аппроксимации возьмем разностное краевое условие в виде

$$\nu_0^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + u_* = \mu_0^n$$

и величину u_* подберем так, чтобы получить второй порядок аппроксимации:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (L_h(u)_h - f_h)_0 = \nu(0, t^n) \frac{u(h, t^n) - u(0, t^n)}{h} + u_* - \mu(0, t^n) = \\ &= \nu \left(u_x + \frac{h}{2} u_{xx} + O(h^2) \right) + u_* - \mu = \nu \frac{h}{2} u_{xx} + u_* + O(h^2). \end{aligned} \quad (13.22)$$

Последнее равенство имеет место вследствие того, что аппроксимация проверяется на решении $u(x, t)$ дифференциальной задачи (3.26), поэтому $(\nu u_x)(0, t^n) = \mu_0(t^n)$.

Из выражения (13.22), используя уравнение (3.13), получаем

$$\begin{aligned} u_* &= -\frac{h}{2}\nu u_{xx} = -\frac{h}{2}(u_t - \nu_x u_x - f) \sim \\ &\sim -\frac{h}{2}\left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} - \frac{\nu_1^n - \nu_0^n}{h} \cdot \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - f(0, t^n)\right). \end{aligned}$$

3.6. У к а з а н и е. Разностные уравнения схемы умножим на τh и просуммируем по внутренним узлам сетки $j = 1, \dots, N-1$:

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j^{n+1} h = \sum_{j=1}^{N-1} u_j^n h + \tau \left(\nu_{N-1/2}^n \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} - \nu_{1/2}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h} \right).$$

Учитывая краевые условия схемы (3.30), получаем

$$\frac{h}{2}u_0^{n+1} = \frac{h}{2}u_0^n + \tau\nu_{1/2}^n \frac{u_1^n - u_0^n}{h}, \quad \frac{h}{2}u_N^{n+1} = \frac{h}{2}u_N^n - \tau\nu_{N-1/2}^n \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h},$$

поэтому $U^{n+1} = U^n$ и, следовательно, выполняются равенства

$$U^n = U^0, \quad n = 1, \dots, M.$$

$$\mathbf{3.7.} \quad U^{n+1} - U^n = -\frac{\tau h^3}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \nu_{\bar{x},j}^n u_{\bar{x},j}^n.$$

У к а з а н и е. Разностное уравнение схемы (3.32) может быть записано в виде (3.17) или

$$u_{t,j} = \frac{1}{h} \left(\nu_{j+1/2}^n u_{x,j}^n - \nu_{j-1/2}^n u_{x,j-1}^n \right) + r_j^n, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Оно отличается от уравнения консервативной схемы (3.30) наличием в его правой части дополнительного члена $r_j^n = -\frac{h^2}{4}\nu_{\bar{x},j}^n u_{\bar{x},j}^n$. Далее, как и при решении задачи 3.6, следует вычислить количество тепла U^{n+1} .

3.8. У к а з а н и е. Пусть $u(x, t)$ — гладкое решение задачи (3.26), удовлетворяющее дифференциальному уравнению вплоть до границ $x = 0$ и $x = l$. Покажите, что на этом решении локальная погрешность аппроксимации в узле (x_j, t^n) дифференциального уравнения разностным уравнением равна

$$\psi_{h,j}^n = \tau(0,5 - \sigma)(\nu u_x)_{xt} + f + 0,5\tau f_t - \varphi_j^n + O(\tau^2 + h^2).$$

Поэтому порядок аппроксимации будет зависеть от выбора параметра σ и функции φ . В граничных же узлах он всегда будет вторым. В самом деле, рассмотрим, например, левую границу:

$$\begin{aligned} \psi_{h,0}^n &= \sigma \left[(\nu u_x)(0, t^{n+1}) + \frac{h}{2} (\nu u_x)_x(0, t^{n+1}) \right] + \\ &+ (1 - \sigma) \left[(\nu u_x)(0, t^n) + \frac{h}{2} (\nu u_x)_x(0, t^n) \right] - \\ &- \frac{h}{2} u_t(0, t^n) + \frac{h}{2} \varphi_0^n - \sigma \mu_0(t^{n+1}) - (1 - \sigma) \mu_0(t^n) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Поскольку при всех $t \in [0, T]$ выполняется равенство $(\nu u_x)(0, t) = \mu_0(t)$, то

$$\begin{aligned} \psi_{h,0}^n &= -\frac{h}{2} \left[u_t(0, t^n) - (\nu u_x)_x(0, t^n) \right] + \frac{h}{2} \varphi_0^n + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= \frac{h}{2} \left[\varphi_0^n - f(0, t^n) \right] + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что как для $\varphi_0^n = f(0, t^n)$, так и для $\varphi_0^n = f(0, t^n + \tau/2)$ порядок аппроксимации будет вторым.

3.9. У к а з а н и е. См. решение задачи 3.6.

3.10. Р е ш е н и е. Пусть $u, v \in H_{h,1}$. Тогда

$$(Au, v)_{(1)} = -\nu_{1/2}^n u_{x,0} v_0 - (\Lambda^n u, v) + \nu_{N-1/2}^n u_{\bar{x},N} v_N.$$

Используя вторую формулу Грина (2.3.10), получаем

$$\begin{aligned} (\Lambda^n u, v) &= ((a^n u_{\bar{x}})_x, v) = \\ &= (u, (a^n v_{\bar{x}})_x) + a_N^n (u_{\bar{x}} v - uv_{\bar{x}})_N - a_1^n (u_x v - uv_x)_0 = \\ &= (u, \Lambda^n v) + \nu_{N-1/2}^n (u_{\bar{x},N} v_N - u_N v_{\bar{x},N}) - \nu_{1/2}^n (u_{x,0} v_0 - u_0 v_{x,0}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Au, v)_{(1)} = -\nu_{1/2}^n u_0 v_{x,0} - (u, \Lambda^n v) + \nu_{N-1/2}^n u_N v_{\bar{x},N} = (u, Av)_{(1)},$$

т. е. $A = A^*$.

Докажем неотрицательность оператора A . Из первой формулы Грина (2.3.7) следует, что

$$(\Lambda^n u, u) = ((a^n u_{\bar{x}})_x, u) = -(a^n u_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}] + a_N^n u_N u_{\bar{x}, N} - a_1^n u_0 u_{x, 0},$$

поэтому

$$(Au, u)_{(1)} = -\nu_{1/2}^n u_{x, 0} u_0 - (\Lambda^n u, u) + \nu_{N-1/2}^n u_{\bar{x}, N} u_N = (a^n u_{\bar{x}}, u_{\bar{x}}],$$

т. е.

$$(Au, u)_{(1)} = \sum_{j=1}^N \nu_{j-1/2}^n u_{\bar{x}, j}^2 \geq 0.$$

Таким образом, оператор A^n является неотрицательным в $H_{h, 1}$.

Возьмем сеточную функцию $u \in H_{h, 1}$, которая принимает постоянное значение во всех узлах сетки, т. е. $u_j = \text{const} = u_0 \neq 0$ ($j = 0, \dots, N$). Тогда $(Au, u)_{(1)} = 0$. Следовательно, оператор A не может быть положительным.

Рассмотрим сеточную функцию $u^{(0)}$, значения которой в узлах сетки постоянны:

$$u_j^{(0)} = 1/\sqrt{l}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (13.23)$$

Тогда $Au^{(0)} = 0$ и $\|u^{(0)}\|_{(1)} = 1$, поэтому функция (13.23) является нормированной собственной функцией оператора A^n , отвечающей его нулевому собственному значению.

4.1. $\sigma \geq 1/4$.

Решение. Пусть $u(x, t)$ — достаточно гладкое решение уравнения (4.1). Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda [\sigma u(x_j, t^{n+1}) + (1 - 2\sigma)u(x_j, t^n) + \sigma u(x_j, t^{n-1})] = \\ = u + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \tau^2 \sigma u_{ttxx} + O(\tau^4 + h^4), \end{aligned}$$

при этом все функции из правой части вычисляются в точке (x_j, t^n) . Следовательно, для погрешности аппроксимации получается выражение

$$\begin{aligned} \psi_j^n = u_t + \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \nu u_{xx} - \nu \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - \nu \tau^2 \sigma u_{ttxx} - \varphi_j^n + O(\tau^4 + h^4) = \\ = \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - \nu \frac{h^2}{12} u_{xxxx} - \nu \tau^2 \sigma u_{ttxx} + f - \varphi_j^n + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned}$$

Учитывая следствия из уравнения (4.1)

$$\begin{aligned}u_{tt} &= \nu^2 u_{xxxx} + \nu f_{xx} + f_t; \\u_{ttt} &= \nu^3 u^{(6)} + \nu^2 f_{xxxx} + \nu f_{xxt} + f_{tt}; \\u_{tttx} &= \nu^2 u^{(6)} + \nu f_{xxxx} + f_{txx},\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}\psi_j^n &= \nu^3 \frac{\tau^2}{6} (1 - 6\sigma) u^{(6)} - \nu \frac{h^2}{12} u_{xxxx} + \frac{\tau^2}{6} [\nu^2 (1 - 6\sigma) f_{xxxx} + \nu (1 - 6\sigma) f_{txx}] + \\&+ \frac{\tau^2}{6} f_{tt} + f - \varphi_j^n + O(\tau^4 + h^4).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\varphi_j^n = f(x_j, t^n)$, то $\psi_j^n = O(\tau^2 + h^2)$. Если

$$\sigma = \frac{1}{6}, \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^n) + \frac{\tau^2}{6} f_{tt}(x_j, t^n),$$

то $\psi_j^n = O(\tau^4 + h^2)$.

Заметим, что при $\sigma = 0$ схема (4.9) совпадает со схемой Ричардсона (4.2), которая неустойчива, поэтому далее будем считать, что $\sigma > 0$. Множитель перехода λ является корнем уравнения $F(\lambda) = 0$, где

$$F(\lambda) = (1 + \sigma\xi)\lambda^2 + (1 - 2\sigma)\xi\lambda - 1 + \sigma\xi,$$

$\xi = 8r \sin^2(\varphi/2)$, $r = \nu\tau/h^2$, φ — произвольное действительное число. Если для некоторого ξ дискриминант $d = 4 + (1 - 4\sigma)\xi^2$ квадратного уравнения $F(\lambda) = 0$ неотрицателен, то корни этого уравнения будут вещественными числами и условие $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ будет эквивалентно выполнению системы неравенств

$$-1 \leq -\frac{(1 - 2\sigma)\xi}{2(1 + \sigma\xi)} \leq 1, \quad F(-1) \geq 0, \quad F(1) \geq 0 \quad (13.24)$$

или

$$4\sigma\xi \geq \xi - 2, \quad 4\sigma\xi \geq \xi$$

или $\sigma \geq 1/4$. Если $d < 0$, то

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{\sigma\xi - 1}{1 + \sigma\xi}$$

и условие $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ также выполнено.

Итак, необходимое условие устойчивости эквивалентно условию $\sigma \geq 1/4$, при этом $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ при любых значениях r , т. е. при любых τ и h .

4.2. $\sigma \geq -1/2$.

У к а з а н и е. Покажите, что на решении уравнения (4.1) выражение для погрешности аппроксимации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_j^{n+1} = & \left(\tau \nu^2 (\sigma - 0,5) - \frac{\nu h^2}{12} \right) u_{xxxx} + \tau (\sigma - 0,5) (\nu f_{xx} + f_t) + \\ & + f - \varphi_j^n + O(\tau^2 + h^4), \end{aligned}$$

при этом все функции из правой части вычисляются в точке (x_j, t^{n+1}) . Следовательно,

$$\psi_j^{n+1} = \begin{cases} O(\tau + h^2), & \text{если } \sigma \neq 0,5, \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^{n+1}); \\ O(\tau^2 + h^2), & \text{если } \sigma = 0,5, \quad \varphi_j^n = f(x_j, t^{n+1}); \\ O(\tau^2 + h^4), & \text{если } \sigma = 0,5 + \frac{h^2}{12\tau\nu}, \quad \varphi_j^n = \\ & = \left(f + \frac{h^2}{12\nu} (\nu f_{xx} + f_t) \right) (x_j, t^{n+1}). \end{cases} \quad (13.25)$$

Отметим, что при $\sigma = 0,5$ схема (4.10) совпадает с неявной трехслойной схемой (4.7).

Множитель перехода схемы (4.10) является корнем уравнения

$$(1 + \sigma + \xi)\lambda^2 - (1 + 2\sigma)\lambda + \sigma = 0,$$

где $\xi = 4r \sin^2(\varphi/2) \geq 0$. Возьмем $\xi = 0$. Чтобы для этого значения ξ корни уравнения удовлетворяли условию $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ необходимо выполнение неравенства $\sigma \geq -0,5$. Поэтому далее можно рассматривать только такие значения σ . Если дискриминант $d = 1 - 4\sigma\xi < 0$, то

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{\sigma}{1 + \sigma + \xi} < 1.$$

В случае $d \geq 0$ выпишите систему вида (13.24).

5.1. **У к а з а н и е.** Покажите, что множитель перехода схемы (5.6) вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + 4r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}},$$

где использованы обозначения (5.9).

5.2. У к а з а н и е. Покажите, что $\lambda = \frac{1 - 2r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - 2r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{1 + 2r_x \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + 2r_y \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}$.

5.4.
$$\tau \leq \frac{1}{\nu \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)}.$$

Р е ш е н и е. Из разностного уравнения схемы Кранка — Николсон (5.7) следует равенство

$$\begin{aligned} (1 + r_x + r_y) u_{j,m}^{n+1} &= (1 - r_x - r_y) u_{j,m}^n + \\ &+ \frac{r_x}{2} (u_{j-1,m}^{n+1} + u_{j+1,m}^{n+1}) + \frac{r_y}{2} (u_{j,m-1}^{n+1} + u_{j,m+1}^{n+1}) + \\ &+ \frac{r_x}{2} (u_{j-1,m}^n + u_{j+1,m}^n) + \frac{r_y}{2} (u_{j,m-1}^n + u_{j,m+1}^n) + \tau \varphi_{j,m}^n. \end{aligned}$$

Пусть выполнено условие

$$r_x + r_y \leq 1. \quad (13.26)$$

Тогда

$$(1 + r_x + r_y) |u_{j,m}^{n+1}| \leq (r_x + r_y) \|u^{n+1}\|_C + \|u^n\|_C + \tau \max_n \|\varphi^n\|_C. \quad (13.27)$$

Эта оценка справедлива во всех внутренних узлах (x_j, y_m, t^{n+1}) , т. е. при $(x_j, y_m) \in \omega_h$, $n = 0, \dots, M - 1$.

Учитывая граничные условия, будем иметь

$$(1 + r_x + r_y) |u_{j,m}^{n+1}| \leq \max_{\Gamma_h} |\mu(x_j, y_m, t^n)| + (r_x + r_y) \|u^{n+1}\|_C. \quad (13.28)$$

Эта оценка имеет место в граничных узлах $(x_j, y_m, t^{n+1}) \in \Gamma_h$.

Поскольку максимальное значение выражений в левых частях неравенств (13.27), (13.28) не превосходит максимума правых частей, то будет справедливым следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &(1 + r_x + r_y) \|u^{n+1}\|_C \leq \\ &\leq \max \left(\max_{\Gamma_h} |\mu(x_j, y_m, t^n)|, \|u^n\|_C + \tau \max_n \|\varphi^n\|_C \right) + (r_x + r_y) \|u^{n+1}\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда следует принцип максимума (5.15), поэтому выполнение условия (13.26) достаточно для устойчивости рассматриваемой схемы в равномерной норме.

5.5. У к а з а н и е. Покажите, что решение задается формулой (5.29), где

$$q_{(k,l)} = \frac{1}{1 + \tau\nu\lambda_{(k,l)}}. \quad (13.29)$$

5.6. У к а з а н и е. Покажите, что решение задается формулой (5.29), где

$$q_{(k,l)} = \frac{1 - \frac{\tau}{2}\nu\lambda_{(k,l)}}{1 + \frac{\tau}{2}\nu\lambda_{(k,l)}}. \quad (13.30)$$

5.7. У к а з а н и е. Покажите, что для разности (5.42) решений нестационарной и стационарной задач выполняется оценка (5.45), при этом $q_{(k,l)}$ вычисляется по формуле (13.29) и $\max_{k,l} |q_{(k,l)}| < 1$. Отсюда следует сходимость при $n \rightarrow \infty$, причем скорость сходимости тем больше, чем больше величина шага по времени τ .

5.8. У к а з а н и е. Покажите, что для разности (5.42) решений нестационарной и стационарной задач выполняется оценка (5.45), где $q_{(k,l)}$ вычисляется по формуле (13.30), $\nu = 1$. Докажите, что $\max_{k,l} |q_{(k,l)}| < 1$.

6.2. У к а з а н и е. Рассмотрим, например, уравнение (6.30) при некотором фиксированном m , $m = 1, \dots, N_y - 1$. Запишем его в виде

$$a_j u_{j-1,m}^{n+1/2} - c_j u_{j,m}^{n+1/2} + b_j u_{j+1,m}^{n+1/2} = d_j, \quad j = 1, \dots, N_x - 1, \quad (13.31)$$

где

$$a_j = b_j = \frac{r_x}{2}, \quad c_j = 1 + r_x, \quad r_x = \frac{\tau}{h_x^2},$$

$$d_j = -u_{j,m}^n - \frac{r_y}{2} (u_{j,m-1}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j,m+1}^n) - \tau f_{j,m}^{n+1/2}, \quad r_y = \frac{\tau}{h_y^2}.$$

Для решения трехточечного разностного уравнения (13.31) используем метод прогонки

$$u_{j,m}^{n+1/2} = \xi_j u_{j+1,m}^{n+1/2} + \eta_j, \quad j = N_x - 1, \dots, 0,$$

где

$$\xi_j = \frac{b_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad \eta_j = \frac{a_j \eta_{j-1} - d_j}{c_j - a_j \xi_{j-1}}, \quad j = 1, \dots, N_x - 1.$$

Из граничного условия (6.32) получаем, что $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = u_{0,m}^{n+1/2}$. Проверьте, что достаточные условия (2.2.49)–(2.2.51) корректности и устойчивости метода прогонки выполняются.

6.4. У к а з а н и е. Схема (6.67) абсолютно устойчива, экономична, обладает свойством полной аппроксимации, погрешность аппроксимации имеет порядок $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. Для горизонтальных прогонок шага (6.69) следует использовать граничные значения

$$\xi_{j,m}^{n+1/2} = (E - \tau\Lambda_{yy}) \frac{\mu_{j,m}^{n+1} - \mu_{j,m}^n}{\tau} \quad (13.32)$$

в узлах (x_j, y_m) ($j = 0, N_x$; $m = 1, \dots, N_y - 1$). Для вертикальных прогонок шага (6.70) — значения

$$\xi_{j,m}^{n+1} = \frac{\mu_{j,m}^{n+1} - \mu_{j,m}^n}{\tau}, \quad j = 1, \dots, N_x - 1; \quad m = 0, N_y. \quad (13.33)$$

В трехмерном случае схема реализуется дробными шагами (6.23)–(6.26), в которых $\tau/2$ заменяется на τ , а $f^{n+1/2}$ — на f^{n+1} .

6.5. У к а з а н и е. Свойства схемы (6.74), (6.75) такие же, как у СПФ (6.67). При выполнении горизонтальных прогонок шага (6.74) следует использовать граничные значения

$$u_{j,m}^{n+1/2} = \mu_{j,m}^{n+1} - \tau\Lambda_{yy} (\mu_{j,m}^{n+1} - \mu_{j,m}^n), \quad j = 0, N_x; \quad m = 1, \dots, N_y - 1.$$

Обобщение для трехмерной задачи выглядит так (ср. с формулами СПН (6.43)–(6.45))

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^n + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1}; \quad (13.34)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^{n+2/3} + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1}; \quad (13.35)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^{n+2/3} + \Lambda_{zz}u^{n+1} + f^{n+1}. \quad (13.36)$$

6.6. У к а з а н и е. Свойства ССП (6.76), (6.77) такие же, как у СПН (6.74), (6.75). Трехмерный аналог схемы (6.76), (6.77) имеет следующий вид:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_{xx}u^{n+1/3} + \Lambda_{yy}u^n + \Lambda_{zz}u^n + f^{n+1}; \quad (13.37)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_{yy} (u^{n+2/3} - u^n); \quad (13.38)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_{zz} (u^{n+1} - u^n). \quad (13.39)$$

Эта схема первого порядка аппроксимации по τ аналогична ССП (6.51)–(6.53), построенной на основе схемы Кранка – Николсон.

6.7. У к а з а н и е. Используя перестановочность операторов Λ_{xx} и Λ_{yy} и исключив дробный шаг, покажите, что схема расщепления (6.78), (6.79) эквивалентна следующей схеме в целых шагах:

$$(E - \tau\Lambda_{xx})(E - \tau\Lambda_{yy})\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + f^{n+1} - \tau\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}u^n. \quad (13.40)$$

Поэтому схема расщепления имеет первый порядок аппроксимации по τ и не обладает свойством полной аппроксимации даже при $f \equiv 0$.

Пусть $\bar{A} = A + \tau A_x A_y$. Тогда $\bar{A}^* = A > 0$. Факторизованный оператор $\tilde{B} = (E + \tau A_x)(E + \tau A_y)$ также обладает этим свойством: $\tilde{B}^* = \tilde{B} > 0$. Кроме того,

$$\tilde{B} = E + \tau A + \tau^2 A_x A_y > \frac{\tau}{2} A + \frac{\tau^2}{2} A_x A_y = \frac{\tau}{2} \bar{A}.$$

Поэтому, согласно теореме 2.7, схема расщепления абсолютно устойчива.

Для выполнения прогонки на первом шаге (6.78) необходимы граничные значения $u_{0,m}^{n+1/2}$ и $u_{N_x,m}^{n+1/2}$. Они определяются из второго уравнения (6.79) по формуле

$$u_{j,m}^{n+1/2} = \mu_{j,m}^{n+1} - \tau\Lambda_{yy}\mu_{j,m}^{n+1}, \quad j = 0, N_x; \quad m = 1, \dots, N_y - 1. \quad (13.41)$$

6.8. У к а з а н и е. Покажите, что после исключения дробных шагов схема предиктор-корректор (6.80)–(6.82) примет вид

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{xx})(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_{yy})u_t = \Lambda u^n + f^{n+1/2} + \frac{\tau^2}{4}\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}f^{n+1/2}. \quad (13.42)$$

Таким образом, она отличается от СПФ (6.15) последним слагаемым, которое сохраняет порядок аппроксимации СПФ, но нарушает свойство полной аппроксимации. Поскольку обе схемы имеют один и тот же факторизованный оператор \tilde{B} , то условия устойчивости схем будут одинаковыми. При $f \equiv 0$ схема обладает свойством полной аппроксимации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
2. Дробышевич В. И. и др. Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышевич, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
3. Коробицына Ж. Л., Хакимзянов Г. С. Практикум на ЭВМ по курсу «Методы вычислений». Новосибирск: НГУ, 1995.
4. Лаевский Ю. М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи). Новосибирск: НГУ, 1999.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
6. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
7. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: НГУ, 2003.
8. Садовничий В. А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.
9. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
10. Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
11. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Науч. мир, 2003.
12. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. Смелов В. В. Основы методов вычислительной математики: В 5 ч. Новосибирск: НГУ, 1986. Вып. 1, 2; 1987. Вып. 3; 1988. Вып. 4; 1996. Вып. 5.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
15. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.
16. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ, 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
17. Черных Г. Г., Чиркашенко Е. П. Решение начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности с применением конечно-разностных методов. Новосибирск: НГУ, 1997.

Список литературы

- [1] Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
- [2] Дробышев В. И. и др. Задачи по вычислительной математике / В. И. Дробышев, В. П. Дымников, Г. С. Ривин. М.: Наука, 1980.
- [3] Коробицына Ж. Л., Хакимзянов Г. С. Практикум на ЭВМ по курсу «Методы вычислений». Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1995.
- [4] Лаевский Ю. М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1999.
- [5] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
- [6] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
- [7] Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003.
- [8] Садовничий В.А. Теория операторов. М.: МГУ, 1986.
- [9] Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
- [10] Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
- [11] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.
- [12] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [13] Смелов В. В. Основы методов вычислительной математики: В 5 ч. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. Вып. 1, 1986. Вып. 2, 1986. Вып. 3, 1987. Вып. 4, 1988. Вып. 5, 1996.
- [14] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
- [15] Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ. 2003. Ч. 1: Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

- [16] Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: В 4 ч. Новосибирск: НГУ. 2005. Ч. 2: Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
- [17] Черных Г.Г., Чиркашенко Е.П. Решение начально-краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности с применением конечно-разностных методов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1997.

Учебное издание

*Хакимзянов Гаяз Салимович
Черный Сергей Григорьевич*

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ.

Часть 3. Численные методы решения
задач для уравнений параболического
и эллиптического типов

Учебное пособие

Редактор *С. Д. Андреева*

Подписано в печать 28.02.2008 г.
Формат 60 x 84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 10. Тираж 200 экз.
Заказ №

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.