АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Ю. И. ШОКИН

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный редактор
акад. Н. Н. Яненко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1981

УДК 518

Шокин Ю. И. Интервальный анализ.— Новосибирск: Наука, 1981.

Впервые в отечественной литературе систематически изложены основы и методы интервального анализа, который получил в последние годы широкое распространение в вычислительной математике. Рассмотрен ряд интервально-аналитических методов решения дифференциальных уравнений.

Книга будет полезна специалистам по вычислительной и прикладной математике, аспирантам и студентам, специализирующимся в указанных областях математики.

Юрий Иванович Шокин

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный редактор
Николай Николаевич Яненко

Утверждено к печати
Институтом теоретической и прикладной механики
СО АН СССР

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы широкое распространение в вычислительной математике получили методы интервального анализа. Интенсивное развитие и проникновение в различные области математики интервальных методов привело к созыву в 1975 г. Первого Международного симпозиума по интервальной математике. Второй симпозиум проведен в 1980 г. Литература по интервальному анализу в настоящее время насчитывает около восьмисот наименований и достаточно полно отражена в библиографических сборниках [1—3] и работе [4]. На русском языке сейчас опубликовано около двух десятков журнальных статей, принадлежащих в основном автору данной монографии и его ученикам [5—17]. Настоящая книга предоставит читателю возможность познакомиться с методами интервальной математики и, возможно, стимулирует использование этих методов при решении ряда прикладных задач, требующих высокой точности алгоритмов.

Первоначально интервальные методы возникли как средство автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ и впоследствии превратились в один из разделов современной прикладной математики. При этом в основе лежала идея двусторонней аппроксимации, которая при учете погрешностей приводит к необходимости обобщения понятия вещественного числа, а именно, к понятию интервального числа. В монографии Мура [18], по существу, впервые были изложены последовательно основы нового направления в вычислительной математике. Последующие исследования показали, что методы интервального анализа могут служить не только для учета ошибок округления на ЭВМ, но и являются новыми аналитическими методами для теоретических исследований.

Непосредственное применение интервальных методов в вычислительных процессах позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в определенных интервалах. При этом в получаемые интервалы включаются и встречающиеся в процессе вычислений ошибки округлений. При точно определенных входных данных задачи получаемые интервалы содержат точное решение исходной задачи, и интервальный метод служит для учета ошибок аппроксимации и округлений.

Проблемы интервального анализа можно разделить на три группы: исследование самого множества интервальных чисел как некоторой математической структуры, применение интервальных методов к различным задачам прикладной математики (в частности, в последнее время наметились пути использования интервальных методов в задачах управления и экономики [19, 20]) и программирование интервальных методов. В предлагаемой работе излагаются вопросы, относящиеся ко всем трем группам проблем.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность Н. Н. Яненко за постоянную поддержку данной работы, а также А. Н. Рогалеву за помощь при подготовке рукописи к печати.

Глава I

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

1. Пусть M и D — два частично упорядоченных множества. Обозначим через $S(M)$ и $S(D)$ соответственно множества всевозможных подмножеств M и D. Если не оговорено особо, элементы множеств M, D и отображения D в M будем обозначать маленькими буквами, а элементы множеств $S(D)$, $S(M)$ и отображения $S(D)$ в $S(M)$ — большими буквами. Каждое из множеств D и M будем считать условно полной структурой и обозначим через $H(D)$ и $H(M)$. Отношение порядка в D, M, $H(D)$ и $H(M)$ условимся обозначать одним и тем же символом $\leqslant$.

Напомним (см., например, [21]), что множество, на котором задано отношение порядка, называется *упорядоченным* или *линейно упорядоченным*, если отношение порядка определено для любых двух его элементов, и *частично упорядоченным* — в противном случае. Частично упорядоченное множество называется *структурой*, если всякое его двухэлементное подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани, и *полной структурой*, если всякое его непустое подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

В дальнейшем будем считать, что $D \subseteq M_1 \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_n$, где $M_i \subseteq M$, а знак $\otimes$ означает декартово произведение.

Если a и $b \in H(M)$ и $a \leqslant b$, то множество $A = [a, b] = \{x | x \in M, a \leqslant x \leqslant b\}$ будем называть *интервалом* на $H(M)$.

Множество всех интервалов на $H(M)$ обозначим через $I(M)$. Если $M = R$ (здесь и всюду ниже R — множество вещественных чисел), то $I(R)$ есть множество замкнутых интервалов на прямой. В этом случае элемент $I(R)$ принято называть *интервальным числом*. Аналогично определяется множество $I(D)$. При $n>1$ элемент множества $I(D)$ будем называть *интервальным вектором* размерности n.

Очевидны следующие соотношения: $M \subseteq I(M) \subseteq S(M)$, $D \subseteq I(D) \subseteq S(D)$.

Если подмножество $\Gamma \subseteq M$ ограничено, то интервал $Q(\Gamma)$, определяемый правилом $Q(\Gamma) = [\inf_{H(M)} \Gamma, \sup_{H(M)} \Gamma]$, назовем *представлением внешним интервалом* множества Γ.

В качестве упражнения читателю предлагается показать, что $Q(\Gamma)$ является наименьшим интервалом, охватывающим Γ, и при $\Gamma \in I(M)$ справедливо равенство $Q(\Gamma) = \Gamma$.

2. Пусть множество M образует поле. Тогда в $I(M)$ можно ввести интервальную арифметику следующим образом:

$$[a, b] * [c, d] = \{x * y \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\}, \quad (1)$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. При этом, если $*$ означает деление, то $0 \overline{\in} [c, d]$. Нетрудно показать, что эти операции в каждом конкретном случае эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} &[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \\ &[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c], \end{aligned} \quad (2)$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)],$$

$$[a, b]/[c, d] = [a, b] \cdot [1/d, 1/c], \quad 0 \overline{\in} [c, d].$$

Поскольку M образует поле, из (1) вытекает замкнутость $I(M)$ относительно интервальной арифметики. Кроме того, из (2) следует, что : 1) вычитание необратно сложению; 2) деление необратно умножению; 3) интервальное сложение и интервальное умножение ассоциативны и коммутативны; 4) закон дистрибутивности, вообще говоря, не выполнен, а выполнено включение $A(B+C) \subseteq AB + AC$, называемое свойством *субдистрибутивности*.

Пусть $M = D = R$. Интервалы вида $[a, a]$ будем отождествлять с вещественными числами и писать $a = [a, a]$. Таким образом, $R \subset I(R)$.

Сложение и умножение обладают обычными свойствами ассоциативности и коммутативности:

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$
$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Нулем сложения является число 0, а единицей умножения — число 1:

$$0 + A = A + 0 = A, \qquad 1 \cdot A = A \cdot 1 = A.$$

Множество $I(R)$ не является полем, поскольку в нем не выполнены следующие свойства поля.

1. Если $\omega(A) = \omega([a, b]) = b - a > 0$, то A не имеет обратного элемента относительно сложения. Действительно, пусть $A - B = [a - d, b - c] = 0$. Отсюда следует, что $a = d$ и $b = c$. Однако $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ и это влечет $a = b = c = d$, т. е. $\omega(A) = 0$. В $I(R)$, вообще говоря, $A - A \neq 0$, но $A - A = [a - b, b - a]$ и всегда содержит нуль.

2. Если $\omega(A) > 0$, то A не имеет обратного элемента относительно умножения. В самом деле, пусть $AB = 1$. Тогда $\min(ac, ad, bc, bd) = 1$ и $\max(ac, ad, bc, bd) = 1$. Эти соотношения справедливы лишь при $ac = ad = bc = bd = 1$. Отсюда должно быть $a = b$, $c = d$ и $ac = 1$. Иными словами, в $I(R)$ вычитание необратно сложению, а деление необратно умножению.

3. Не выполнен закон дистрибутивности:

$$A(B + C) \subseteq AB + AC. \quad (3)$$

Действительно, пусть $C = [e, f]$. Тогда

$$\begin{aligned} A(B + C) &= [a, b]([c, d] + [e, f]) = \\ &= [\min(ac + ae, ad + af, bc + be, bd + bf), \\ &\quad \max(ac + ae, ad + af, bc + be, bd + bf)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} AB + AC &= [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f] = \\ &= [\min(ac, ad, bc, bd] + \min(ae, af, be, bf), \\ &\quad \max(ac, ad, bc, bd) + \max(ae, af, be, bf)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости положим $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (ac, ad, bc, bd)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = ae, af, be, bf)$. Тогда для всех $i = 1, 2, 3, 4$ справедливы неравенства

$$\min_j x_j + \min_j y_j \leqslant x_i + y_i \leqslant \max_j x_j + \max_j y_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

Сопоставляя (4)—(6), убеждаемся в справедливости (3). Далее, из (6) вытекает, что в (3) равенство выполнено лишь тогда, когда существуют числа $k, l \in (1, 2, 3, 4)$ такие, что $\min_j x_j = x_k$, $\min_j y_j = y_k$, $\max_j x_j = x_l$, $\max_j y_j = y_l$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, тем самым $a(B + C) = aB + aC$.

Интервальная арифметика обладает свойством *монотонности по включению.* Это означает, что из $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$ следует $A * B \subseteq C * D$ при $* \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Отсюда, в частности, получаем очень важную теорему [18].

Теорема 1. Пусть $A_i \subseteq B_i (i = 1, \ldots, n)$ и $F(X_1, \ldots, X_n)$ есть рациональное интервальное выражение. Тогда $F(A_1, \ldots, A_n) \subseteq F(B_1, \ldots, B_n)$.

Читателю предоставляется доказать самостоятельно на основании рассмотренных выше свойств интервальной арифметики справедливость следующих четырех утверждений:

1) уравнение

$$A + X = B \tag{7}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $\omega(A) \leqslant \omega(B)$;

2) если X_k — решение уравнения (7), то $X_k \subseteq B - A$;

3) пусть X_k есть решение уравнения $AX = B$, где $0 \overline{\in} A$. Тогда $X_k \subseteq B/A$;

4) если $C = (C_{ij})$— квадратная интервальная матрица, причем $\omega(C_{ij}) > 0$ хотя бы для одной пары (i, j), то не существует матрицы C^{-1} такой, что $C^{-1}C = CC^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

3. Пусть G есть множество всех отображений D в M. Множество преобразований P, определенных на G, назовем *алгебраическим*, если P составляет алгебру.

Отображения f и $\varphi \in G$ будем называть *алгебраически эквивалентными* или просто *эквивалентными*, если путем преобразований каждое из них может быть сведено к другому, и писать $f = \varphi$.

Очевидно, что преобразования, позволяющие свести f к φ или φ к f, должны принадлежать P, и это сведение определено неоднозначно.

Алгебраическая эквивалентность является отношением эквивалентности в G, т. е. это отношение рефлексивно: $f = f$, симметрично: если $f = \varphi$, то $\varphi = f$, транзитивно: если $f = \varphi$ и $\varphi = \psi$, то $f = \psi$. Заметим, что если $f = \varphi$, то области значений f и φ совпадают.

Далее, пусть K — множество отображений $I(D)$ в $I(M)$. Эквивалентность в K может быть определена так же, как и в G. И в этом случае справедливы аналогичные свойства отношений, однако классы эквивалентных функций в силу свойств интервальной арифметики и, в частности из-за субдистрибутивности, в K значительно уже.

Для $f \in G$ следующим образом вводится *объединенное расширение*:

$$F(X) = \bigcup_{x \in X} f(x). \tag{8}$$

В частности, каждому непересекающемуся классу эквивалентных отображений, на которые введенное отношение эквивалентности разбивает G на основании (8), соответствует единственное объединенное расширение.

Сужением функции $F(X; B)$ по X, где $X \in I(D)$, B — постоянный интервальный вектор размерности m, состоящий из констант-интервалов, завязанных в F, назовем отображение $\mathcal{F}(x; B)$, получающееся из $F(X; B)$ при $X = [x, x] = x$, и условимся писать

$$\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X; B) = \mathcal{F}(x; B). \tag{9}$$

При $B \in D$ вместо (9) будем писать $\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X) = \mathcal{F}(x)$. В частности, может быть, что $\operatorname*{Rs}_{X \to x} F(X) = f(x)$.

Приведем некоторые примеры. Пусть $M = D = R$, $X = [x_1, x_2]$. Тогда оператор Rs в силу введенного определения должен действовать следующим образом:

1) $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\ (X^3+[1, 3]) = x^3+[1, 3]$,

2) $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\ F(X) = \underset{x_1=x_2=x}{\mathrm{Rs}}\ (1+[\sin x_1, 2+\sin x_2]) =$

$= 1+[\sin x, 2+\sin x]$

3) $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\ ((X^2+2X)/X) = x+2$,

4) $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\ (X-X) = 0$.

Теорема 2. Если F и Ψ эквивалентны, то эквивалентны и их сужения.

Доказательство. Пусть $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ — последовательность алгебраических преобразований, позволяющих свести F к Ψ, $\mathrm{Rs}F=f$, $\mathrm{Rs}\,\Psi=\psi$. (Принятая здесь форма записи сужений, как мы увидим ниже, обоснована независимостью результата от типа сужения.) Не исключая общности, можно считать k четным, поскольку сведение друг к другу эквивалентных отображений заключается в последовательных преобразованиях, среди которых обязательно есть попарно обратные. Полагая $k=2l$ в силу коммутативности Π_j $(1\leqslant j\leqslant k)$, которая следует из того факта, что $\Pi_j\in P$ и P образует алгебру, рассматриваемую последовательность преобразований можно записать в виде $\Pi_{r_l}\Pi_l\Pi_{r_{l-1}}\Pi_{l-1}\ldots\Pi_{r_1}\Pi_1$, где $l\leqslant r_i\leqslant 2l (1\leqslant i\leqslant l)$. Причем $\Pi_{r_j}\Pi_j\varphi=\varphi\,(1\leqslant i\leqslant l)$ для любого $\varphi\in K$. Тогда имеем $\mathrm{Rs}\,F=\mathrm{Rs}(\Pi_{r_1}\Pi_1F)=\ldots=\mathrm{Rs}(\Pi_{r_l}\Pi_l\Pi_{r_{l-1}}\Pi_{l-1}\ldots\Pi_{r_1}\Pi_1F)=\mathrm{Rs}\,\Psi=\psi$. Но $\mathrm{Rs}F=f$, откуда $f=\psi$.

Интервальным расширением функции $f(x)$ назовем такой элемент $F(X)$ множества K, что из $x\in X$ следует $f(x)\in F(X)$, и условимся писать $\underset{x\to X}{\mathrm{Di}}\ f(x) = F(X)$. Аналогично можно определить $\underset{x\to X}{\mathrm{Di}}\ \mathscr{F}(x; B) = F(X; B)$. С точки зрения приложений бывает целесообразным определять интервальное расширение более специально, а именно, задавая способ его получения. Подтверждением сказанного могут служить следующие примеры.

1. Пусть $M=D=R$. Функция $F(X)$, получаемая заменой вещественного аргумента x в рациональной функции $f(x)$ интервальным аргументом X с переходом

в интервальную арифметику, называется *естественным интервальным расширением* [18]. В этом случае справедлива следующая

Теорема 3 [18]. Если $F(X)$ — естественное интервальное расширение $f(x)$ и каждая компонента вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$ в $F(X)$ встречается не более одного раза, то $F(X) = \bigcup_{x\in X} f(x)$.

Как видно, в этом случае для нахождения области значений $f(x)$ при $x\in X$ достаточно вычислять рациональное интервальное выражение $F(X)$, тогда как, оперируя вещественными функциями, мы должны определить бесконечное множество $\{f(x)|x\in X\}$.

2. Пусть $M=D=R_M$ (R_M — множество машинных чисел). Тогда интервальное расширение функции $f(x)$ вида $\mathscr{F}(x)=(f(x))_M+[-\varepsilon(x), \varepsilon(x)]$, где $(f(x))_M$ — результат вычисления $f(x)$ на машине, а $\varepsilon(x)$ — абсолютная погрешность $f(x)$, позволяет учитывать ошибки машинного вычисления. При этом $\varepsilon(x)$ оценивается величиной $\varepsilon_0|(f(x))_M|$, где ε_0 — минимальное машинное число.

Посредством оператора Di семейству отображений $\{f(x, b)|b\in B\}$ можно поставить в соответствие элемент множества K, если вместо b подставить B и перейти к действиям над интервалами. Необходимость в подобном интервальном расширении может возникнуть, например, при учете ошибок представления на ЭВМ констант, входящих в функцию $f(x)$. В дальнейшем мы будем считать, что для элементов G такой способ определения интервального расширения уже задан, т. е. $\mathrm{Di}f$ определено однозначно, либо на $\mathrm{Di}f$ будем накладывать определенные условия.

Заметим, что если f, $\varphi\in G$, то из $f=\varphi$ не следует $\mathrm{Di}\,f=\mathrm{Di}\,\varphi$. Очевидно, в подтверждение этого утверждения достаточно указать хотя бы один пример.

Пусть $M=D=R$, $f(x)=(\sqrt{x})^3-1$, $\varphi(x)=(x/\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$, $X_0=[1, 4]$. Для соответствующих естественных интервальных расширений $F(X)=(\sqrt{X})^3-1$ и $\Phi(X)=(X/\sqrt{X}-1)(X+\sqrt{X}+1)$ имеем $F(X_0)=[0, 7]$, $\Phi(X_0)=[-7/2, 21]$.

Теперь выясним, как соотносятся значения в точках интервальных расширений, объединенных расширений и исходного отображения F.

Рассмотрим сужение функции $F(X; B)$ по X. Вообще говоря, из класса эквивалентности $\underset{X \to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ всегда можно выделить отображения, интервальные расширения которых включают $F(X; B)$. Для этого к $\underset{X \to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ достаточно прибавить некоторое отображение $\psi(x)$, для которого $\bigcup_{x \in X} \psi(x) = 0$, но $\underset{x \to X}{\mathrm{Di}}\, \psi(x) \neq 0$. Например, $\psi(x) = x - x$. С другой стороны $\underset{X \to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X; B)$ может быть таково, что из соответствующего класса эквивалентности можно выделить отображения, интервальные расширения которых могут как включать, так и включаться в $F(X; B)$.

Действительно, пусть, например, $M = D = R$, $F(X) = X^2 - 5X$. Тогда $\underset{X \to x}{\mathrm{Rs}} F(X) = x^2 - 5x$. Рассмотрим два элемента из класса эквивалентности $f(x) = x^2 - 5x$, а именно $f_1(x) = x(x-5)$ и $f_2(x) = x^2 - 6x + x$. Для соответствующих естественных интервальных расширений в точке $X_0 = [2, 4]$ имеем $F_1(X_0) = [-12, -2]$, $F_2(X_0) = [-18, 8]$, в то время как $F(X_0) = [-16, 6]$, т. е. $F_1(X_0) \subset F(X_0) \subset F_2(X_0)$. Кроме того, из определения интервального и объединенного расширений следует справедливость включения

$$\underset{x \to X}{\mathrm{Di}}\, \mathcal{F}(x; B) \supseteq \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}(x; B). \qquad (10)$$

Применение интервальных методов предполагает переход от элементов G к элементам K. Такой переход, как правило, осуществляется построением интервальных расширений, на которые накладывается условие *наибольшей суженности*. (В теореме 3 дается достаточное условие наибольшей суженности для случая рациональных функций.) Очевидно, такому условию удовлетворяло бы объединенное расширение $f \in G$. Однако построение объединенного расширения предполагает вычисление $f(x)$ бесконечное число раз. В связи с этим отметим, что преимущество интервальных методов именно в том и заключается, что бесконечные вычисления в G указанные методы позволяют заменить конечными вычислениями в K, давая в результате интервалы, гарантированно содержащие точные искомые значения. Как мы убедились, не все элементы класса эквивалентности данного f равноценны в смысле наибольшей суженности соответствующих интервальных расширений. Таким образом, из класса эквивалентности f необходимо выделить такой элемент $\tilde{f}$, чтобы $\mathrm{Di}\tilde{f}$ было бы как можно уже. Из всего сказанного можно заключить, что $\tilde{f}$ должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $\tilde{f}$ не должно содержать двух элементов Π_α, $\Pi_\beta \in P$ таких, что $\Pi_\alpha \Pi_\beta = E$;

2) $\tilde{f}$ с учетом субдистрибутивности должно быть приведено к виду, «удобному» для логарифмирования.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Изучение множества интервальных чисел как алгебраической системы в зависимости от определенных на нем операций и отношений помогает обнаруживать связи между различными, на первый взгляд, понятиями и систематизировать результаты. Особый интерес представляют задача сравнения интервалов, введенных над полуупорядоченным и векторным пространствами, а также анализ свойств интервальных операций.

Как уже отмечалось, если множество M с отношением упорядоченности является структурой, то интервальные арифметические операции можно выразить через операции над граничными значениями исходных интервалов. В дальнейшем мы будем использовать обе возможности представления интервальных операций.

Рассмотрим первоначально основные сведения о системах интервальных чисел с одной арифметической операцией.

Аддитивная система $\langle I(R), + \rangle$ образует коммутативную полугруппу, для которой справедливо правило сокращения $A + C = B + C \Rightarrow A = B$ $\forall A, B \in I(M)$. Ее можно представить в виде прямого произведения

$$\langle I(R), + \rangle \simeq \langle R, + \rangle \otimes \langle R^+ \cup \{0\}, + \rangle,$$

что соответствует записи интервала как пары $(\varphi(A), \lambda(A))$, где R^+ — множество положительных действительных чисел, $\varphi(A)$ — средняя точка интервала A, $\lambda(A)$ — длина интервала A. Легко видеть, что мультипликативная система $\langle I'(R)=I(R)\setminus\{0\},\ \cdot\rangle$ также является коммутативной полугруппой по операции умножения, которую удобно представить в виде $I'(R)=Y\cap Z$, где $Y=\{A|0\equiv A\}$, $Z=\{A|0\in A\neq\varnothing\}$. Система $\langle Y,\ \cdot\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle Z,\ \cdot\rangle$ — полугруппа, причем $Z=\cup G_i$, $i\in[-1,\ 0]$, $G_i=\{r[i,\ 1]|r\in R,\ r\neq 0\}$. Рассмотрим отображения $\sigma:I'(R)\to\{-1,\ 0,\ 1\}$, $\psi:I'(R)\to R^+$, $\chi:I'(R)\to[-1,\ 1]$, определяемые следующим образом:

$$\sigma[a,\ b]=\operatorname{sign}(a+b),\ \psi\ [a,\ b)=\max(|a|,\ |b|),$$

$$\chi\,[a,\ b]=\begin{cases}a/b, & |a|\leqslant|b|,\\ b/a, & |b|\leqslant|a|.\end{cases}$$

Тогда каждый интервал $A\neq 0$ однозначно представим как $(\sigma A,\ \psi A,\ \chi A)$, при этом $A=(\sigma' A)(\psi A)[\chi A,\ 1]$, где $\sigma' A=1$ для $\sigma A\geqslant 0$ и $\sigma' A=-1$ для $\sigma A<0$. Например, интервалу $[-1,\ 1]$ соответствует тройка $(0,\ 1,\ -1)$.

Множество интервальных чисел с двумя арифметическими операциями уже не удается представить как некоторую хорошо изученную алгебраическую систему из-за отсутствия закона дистрибутивности и взаимной необратимости операций сложения и вычитания, умножения и деления. При исследовании интервального исчисления широко используется понятие квазилинейного пространства [22].

Коммутативная полугруппа $\langle Q,\ +\rangle$ с нейтральным элементом θ называется *квазилинейным пространством* над полем R, если введено скалярное произведение $R\times Q\to Q$ и справедливы следующие соотношения $\forall A$, $B,\ C\in Q\alpha,\ \beta\in R$:

$(Q1)$ $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

$(Q2)$ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, если $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$,

$(Q3)$ $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$,

$(Q4)$ $1\cdot A=A$,

$(Q5)$ $0\cdot A=\theta$,

$(Q6)$ $A+B=A+C\Rightarrow B=C$.

Легко видеть, что множество интервальных чисел $\langle I(R),\ +,\ R\rangle$ с операциями сложения и умножения на скалярные величины является квазилинейным пространством.

Назовем отображение π: $Q_1\to Q_2$, где Q_1, Q_2 — квазилинейные пространства, *ограниченным линейным*, если $\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y)$ и $\pi(\alpha x)=\alpha\pi(x)$ для $\alpha\geqslant 0$. Взаимно-однозначное отображение π назовем *изоморфизмом*. Под базисом B квазилинейного пространства Q будем понимать минимальную производящую систему элементов из Q, т. е. систему, удовлетворяющую условиям:

1) каждый элемент $X\in Q$ представим в виде $X=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i B_i+\beta_i B_i)$, $B_i\in B$, α_i, $\beta_i\in R$;

2) ни один элемент B_i из B не выражается таким образом через $B\setminus\{B_i\}$ [23].

Множество всех ограниченных линейных функционалов, определенных на Q, образует линейное пространство Q^+. Будем полагать $\dim Q=\dim Q^+$. Тогда для любого квазилинейного пространства Q, в котором справедливо правило сокращения, $\dim Q=\dim L$, где L — наименьшее линейное пространство, являющееся образом Q при ограниченном линейном отображении.

Назовем *множеством дистрибутивных элементов* Q_D совокупность $\{x\in Q|(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\ \alpha,\ \beta\in R\}$, *множеством симметричных элементов* Q_s — совокупность $\{x\in Q|-x=x\}$.

Сформулируем факты, которые могут быть положены в основу анализа квазилинейных и интервальных пространств.

Теорема 1 [24]. **Пусть Q — квазилинейное пространство, причем $\dim Q=\dim Q_D=n<\infty$, тогда $Q=Q_D$.**

Доказательство. Одним из основных положений, используемых в теории квазилинейных пространств, является существование линейного пространства, в которое можно изометрически отобразить исходное квазилинейное пространство [25, 26], причем выбор линейного пространства делает его наименьшим таким пространством. Итак, Q может быть погружено в пространство R^n, следовательно, это справедливо для Q_D. Здесь Q_D является линейным пространством, поэтому Q_D будет изоморфно R^n. Получаем $Q\leqslant Q_D$, откуда $Q=Q_D$.

Теорема 2. а) пусть $x\in Q_s$ и для него существует обратный по сложению элемент $x^{-1}\in Q$, тогда

$x^{-1} \in Q_s$; б) если для $x \in Q$ выполняется $-x = \alpha x$, $\alpha \geqslant 0$, то $x \in Q_s$.

Доказательство. Имеем $x + x^{-1} = \theta = (-1) \times (x + x^{-1}) = -x - x^{-1} = x - x^{-1}$. Используя соотношение ($Q6$), получаем $-x^{-1} = x^{-1}$, т. е. $x^{-1} \in Q_s$. Далее, из $-x = \alpha x$ вытекает, что $x - x = (\alpha + 1)x \in Q_s$. Здесь величина $(\alpha + 1) > 0$, поэтому из $(\alpha + 1)x = -(\alpha + 1)x$ имеем $x = -x$, т. е. $x \in Q_s$.

Теорема 3. Из равенства $\dim Q_s = \dim Q = 2$ следует $Q = Q_s$.

Доказательство. Пусть π: $Q \to R^2$ — ограниченное погружение, сохраняющее результаты введенных в Q операций. Выберем элементы y_1, $y_2 \in Q_s$ такие, что $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ ($\bar{y} = \pi(y)$) образуют базис в R^2.

Предположим, что существует элемент $x \in Q$ и $x \notin Q_s$. Тогда $\bar{x}$ и $\bar{y}_1$ независимы в R^2, и можно записать $-y_2 = \alpha x + \beta y_1$. Покажем, что в этой линейной комбинации $\alpha > 0$. Случай $\alpha = 0$ невозможен, так как $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ независимы в R^2.

Если $\alpha < 0$ и $\beta \leqslant 0$, то $\bar{y}_2 = -\alpha\bar{x} - \beta\bar{y}_1$, а также $y_2 = -\alpha x + \beta y_1$. Умножая последнее соотношение на -1 и учитывая, что $y \in Q_s$, получим $y_2 = \alpha x + \beta y_1$ и $\alpha x = -\alpha x$, что противоречит условию $x \notin Q_s$.

Если $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, то имеем $-\alpha\bar{x} = \beta\bar{y}_1 + \bar{y}_2$, а также $-\alpha x = \beta y_1 + y_2 \in Q_s$, что противоречит предположению $x \notin Q_s$.

Итак, мы показали, что $\alpha > 0$. Если теперь $\beta < 0$, то $-\beta\bar{y}_1 = \alpha\bar{x} + \bar{y}_2$ и $\beta y_1 = -\beta y_1 = \alpha x + y_2$. Умножая его на -1, имеем $\beta y_1 = -\alpha x + y_2$. Используя правило сокращения ($Q6$), видно, что $x \in Q_s$ вопреки предположению. Тем самым $\beta > 0$.

Для обратного к y_2 элемента по сложению y_2^{-1} справедливо равенство $y_2^{-1} = \alpha_x + \beta_y$ и, следовательно, $y_2^{-1} \in Q$. Аналогично $y_1^{-1} \in Q$. Поскольку $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ образуют базис в R^2, то $\bar{x} = l_1\bar{y}_1 + l_2\bar{y}_2$. Кроме того, было показано, что $y_1^{-1} = \alpha_1 x + \beta_1 y_2$, $y_2^{-1} = \alpha_2 x + \beta_2 y_1$, где α_1, α_2, β_1, β_2 положительны. Совокупность равенств $\bar{x} = l_1\bar{y}_1 + l_2\bar{y}_2$, $\alpha_2\bar{x} = \bar{y}_2^{-1} - \beta_2\bar{y}_1 = y_2^{-1} + \beta_2 y_1$, $\alpha_1\bar{x} = y_1^{-1} - \beta_1\bar{y}_2 = \bar{y}_1^{-1} + \beta_1\bar{y}_2$ позволяет записать $(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\bar{x} = y_2^{-1} + y_1^{-1} + (l_1 + \beta_2)\, y_1 + (l_2 + \beta_1)\, y_2$, причем все коэффициенты здесь положительны. Отсюда в силу существования отображения, осуществляющего погружение, получим $x = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \delta_1 y_1^{-1} + \delta_2 y_2^{-1}$, где η_1, η_2, δ_1, $\delta_2 \geqslant 0$. В силу теоремы 2 имеем $y_1^{-1}, y_2^{-1} \in Q_s$ и $x \in Q_s$. Из полученного противоречия следует, что $Q = Q_s$. Теорема 3 доказана.

Будем говорить, что квазилинейное пространство Q имеет групповую структуру, если оно образует группу по сложению.

Теорема 4. Пусть $\dim Q = 2$, $\dim Q_D = 1$, $x \in Q_D$, $x \neq \theta$, $y \in Q_s$, $y \neq \theta$. Если Q_s не имеет групповой структуры, то x, y образуют базис в Q.

Доказательство. Так как $x \in Q_D$, $y \in Q_s$, из $\bar{z} + (-\alpha)\bar{x} = \beta\bar{y}$ в R^2 следует $z = (-\alpha)x = \beta y$, где $\beta \geqslant 0$. Если $\beta < 0$, то $-\beta y^{-1} = z - \alpha x \in Q$, следовательно, $y^{-1} \in Q_s$, что противоречит отсутствию групповой структуры в Q_s. Из $z - \alpha x = \beta y$, $\beta \geqslant 0$, следует $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$. Это справедливо для всех $z \in Q$, x, y независимы в Q, следовательно, они образуют базис.

Теорема 5. Для любого $x \in Q$ представление $z = \alpha x + \beta y$, где $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$, $x \in Q_D$, $y \in Q_s$, единственно.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 x + \beta_1 y = \alpha_2 x + \beta_2 y$, где $\beta_1 \geqslant \beta_2$. Имеем $(\alpha_1 - \alpha_2)x = (\beta_2 - \beta_1)y \in Q_s$, отсюда $\alpha_1 = \alpha_2$. Из $(\beta_2 - \beta_1)y = \theta$ следует $\beta_1 = \beta_2$. Тем самым единственность доказана.

С точностью до изоморфизма однозначную характеристику квазилинейным пространствам размерности два дает следующая теорема.

Теорема 6. Квазилинейное пространство Q, $\dim Q = 2$, изоморфно $\langle I(R),\ +,\ R\rangle$, если $\dim Q_D = 1$.

Доказательство. Как было показано выше, для любого $z \in Q$ справедливо однозначное разложение $z = \alpha x + \beta y$, $\alpha \in R$, $\beta \geqslant 0$, $x \in Q_D$, $y \in Q_s$. Определим следующее отображение:

$$\Phi : Q \to I(R),$$

$$z = \alpha x + \beta y \xrightarrow{\Phi} \alpha \cdot 1 + \beta[-1,\ 1].$$

Очевидно, что это отображение взаимно-однозначно, а система 1, $[-1,\ 1]$ независима в $I(R)$. Кроме того,

$$\Phi(z_1 + z_2) = \Phi((\alpha_1 x + \beta_1 y) + (\alpha_2 x + \beta_2 y)) =$$
$$= \Phi((\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 1 + (\beta_1 + \beta_2) \times$$

$$\times[-1,\ 1] = \alpha_1 \cdot 1 + \beta_1 \cdot [-1,\ 1] + \alpha_2 \cdot 1 + \beta_2 \cdot [-1,\ 1] =$$
$$= \Phi(z_1) + \Phi(z_2),$$
$$\Phi(cz) = \Phi(c\alpha x + |c|\beta y) = (c\alpha) \cdot 1 + |c|\beta \cdot [-1,\ 1] =$$
$$= c(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot [-1,\ 1]) = c\Phi(z).$$

Итак, отображение Φ осуществляет требуемый изоморфизм.

Анализ различных значений размерности Q_D, Q_s позволяет получить следующие результаты [24].

1. Пусть $\dim Q = 2$, $\dim Q_D = 0$, $\dim Q_s = 1$ и задан одноэлементный базис Q, тогда Q изоморфно подпространству $I_1 = \{A \in I(R) \mid A = \alpha[0,\ 1] + \beta[-1,\ 0],\ \alpha,\ \beta \geqslant 0\}$ пространства $I(R)$.

2. Пусть $\dim Q = 2$, $\dim Q_D = 0$, $\dim Q_s = 1$ и в Q не существует базиса, тогда Q изоморфно либо подпространству $I_2 = \{A \in I(R) \mid A = \alpha \cdot 1 + \beta[-1,\ 1],\ \alpha \in R,\ \beta > 0\} \cup \{0\}$, либо подпространству $I_3 = \{A \in I(R) \mid A = \alpha[0,\ 1] + \beta[-1,\ 0],\ \alpha,\ \beta > 0\} \cup \{0\}$ пространства $I(R)$.

3. Пусть $\dim Q = 2$, $\dim Q_D = 2$, тогда Q изоморфно R^2.

Понятие интервальных величин можно распространить на случай произвольных нормированных пространств.

Пусть $\langle E,\ \|\cdot\|\rangle$ — нормированное линейное пространство. Будем называть интервалом множество $[y,\ \varepsilon] = \{x \in E \mid \|x - y\| \leqslant \varepsilon\}$, $y \in E$, $\varepsilon > 0$, и обозначать через $I(E,\ \|\cdot\|)$ совокупность всех таких интервалов.

Сложение и умножение на числа из R определены так:

$$[x,\ \varepsilon] + [y,\ \delta] = [x + y,\ \varepsilon + \delta],$$
$$\alpha[x,\ \varepsilon] = [\alpha x,\ |\alpha|\varepsilon].$$

Соотношение между интервалами, рассматриваемыми над нормированными и упорядоченными пространствами, представляет интерес [23, 27], так как в большинстве случаев интервальное исчисление строится над пространствами, где определены и норма, и упорядоченность.

Лемма 1. Пусть $\langle E,\ \|\cdot\|\rangle$ — действительное нормированное пространство, $(E,\ \leqslant)$ — полуупорядоченное линейное пространство, причем упорядоченность $\leqslant$ не тождественна отношению равенства $=$. Тогда интервальное пространство $I(E,\ \|\cdot\|)$ может быть погружено в интервальное пространство $I(E,\ \leqslant)$.

Доказательство. По предположению, существует элемент $x_0 \in E$ такой, что $0 \leqslant x_0$ и $x_0 \neq 0$. Определим отображение φ: $I(E,\ \|\cdot\|) \to I(E,\ \leqslant)$ следующим образом: $\varphi([a,\ \varepsilon]) = [a - \varepsilon x_0,\ a + \varepsilon x_0]$. Очевидно, что φ задает требуемое погружение. При этом получаем возможность вводить для заданного нормированного пространства отношение полуупорядоченности. Пространство $I(E,\ \|\cdot\|)$ может быть рассмотрено как подпространство $I(E,\ \leqslant)$.

Возможность изоморфизма этих интервальных пространств дает следующая теорема.

Теорема 7. Если $\langle E,\ \leqslant,\ \|\cdot\|\rangle$ — n-мерное упорядоченное пространство, в котором введена норма, то изоморфное отображение $I(E,\ \leqslant) \leftrightarrow I(E,\ \|\cdot\|)$ устанавливается только тогда, когда $\dim I(E,\ \leqslant) = n + 1$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие определения. Подмножество M квазилинейного пространства Q над R, для которого $a + b$, $\alpha a \in M$, $a,\ b \in M$, $\alpha \geqslant 0$, называется *выпуклым конусом* в Q. Множество элементов $\{x \in E \mid x \geqslant 0\}$ образует выпуклый конус в $(E,\ \leqslant)$, называемый *положительным конусом*.

Лемма 2. Возможно установить изоморфизм $I(E,\ \|\cdot\|) \leftrightarrow (R^+ \cup \{0\}) \times E$, при этом $\dim I(E,\ \|\cdot\|) = 1 + \dim E$.

Доказательство. Требуемый изоморфизм устанавливает отображение φ: $[a,\ \varepsilon] \leftrightarrow (\varepsilon,\ a)$.

Лемма 3. Пусть $(E,\ \leqslant)$ — n-мерное полуупорядоченное линейное пространство над R, положительный конус в E содержит m линейно-независимых элементов; тогда $\dim I(E,\ \leqslant) = n + m$.

Доказательство. Каждый элемент из $I(E,\ \leqslant)$ допускает задание $[a,\ b] = [a,\ a] + [0,\ b - a]$, что дает возможность установить изоморфизм $I(E,\ \leqslant) \leftrightarrow E \times P$, где P обозначает положительный конус в E.

Переходя к доказательству теоремы, отметим, что разложение $[a,\ b] = [a,\ a] + \lambda[0,\ c]$, $c \in E$, определяет изоморфное отображение ψ: $I(E, \leqslant) \leftrightarrow I(E, \|\cdot\|)$, где $\psi([a, b]) = [a, \lambda]$ с учетом лемм 2 и 3. Теорема доказана.

Для множества интервальных чисел с операциями сложения и умножения можно сформулировать обобщение понятия алгебры.

Под *нормой* в квазилинейном пространстве Q над R понимается действительно-значная функция $\|\cdot\|$, определенная на Q, с обычными свойствами нормы:

$$\|A\| > 0, \quad A \neq \theta,$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad (A,\ B \in Q,\ \alpha \in R).$$

Нормированное квазилинейное пространство Q над R, в котором определено коммутативное умножение $Q \times Q \to Q$, назовем *коммутативной квазиалгеброй*, если для всех $A, B, C \in Q$, α, $\beta \in R$ выполняются свойства

$(QA1)$ $(AB)C = A(BC)$, если $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$, $\|BC\| = \|B\| \cdot \|C\|$,

$(QA2)$ $(A + B)C = AC + BC$, если $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$,

$(QA3)$ $(\alpha\beta)AB = (\alpha A)(\beta B)$,

$(QA4)$ $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

Если E — нормированная коммутативная алгебра над R с нормой $\|\cdot\|$, $Q = I(E, \|\cdot\|)$ — интервальное пространство, причем в нем индуцирована норма $\|[A, \varepsilon]\| = \|A\| + \varepsilon$, $A \in E$, $\varepsilon \geqslant a$, и умножение $Q \times Q \to Q$ определено следующим образом:

$$[A, \varepsilon] + [B, \delta] = [AB,\ \varepsilon\delta + \|A\|\delta + \|B\|\varepsilon],$$

то Q является коммутативной квазиалгеброй [23].

Для элементов интервального пространства можно ввести отношения упорядоченности, т. е. рефлексивные, антисимметричные, транзитивные бинарные отношения.

Пусть M — упорядоченное линейное пространство, будем обозначать $P(M)$ — множество всех его подмножеств, $I(M)$ — множество всех его интервалов. Определим в $I(M)$ и $P(M)$ отношение $<$:

$$A < B \Leftrightarrow (\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) | a < b;$$

Справедливы включения $\langle M, <\rangle \subseteq \langle I(M), <\rangle \subseteq \langle P(M), <\rangle$, но ни $\langle I(M), <\rangle$, ни $\langle P(M), <\rangle$ не являются структурой. Введем отношение $\leqslant$ для интервалов A, $B \in I(M)$, $A = [\underline{a}, \bar{a}]$, $B = [\underline{b}, \bar{b}]$:

$$A \leqslant B \Leftrightarrow (\forall a \in A \exists b \in B | a \leqslant b) \wedge (\forall b' \in B \exists a' \in A | a' \leqslant b').$$

Так же справедливо соотношение $A \leqslant B \Leftrightarrow \underline{a} \leqslant \underline{b} \wedge \bar{a} \leqslant \bar{b}$.

Теорема 8. Если $\langle M, \leqslant\rangle$ — структура, то структурой будет $\langle I(M), \leqslant\rangle$, причем

$$\sup (A, B) = [\sup(\underline{a}, \underline{b}), \sup(\bar{a}, \bar{b})],$$

$$\inf (A, B) = [\inf (\underline{a}, \underline{b}), \inf (\bar{a}, \bar{b})].$$

Рассмотрим отношение порядка $\subseteq$: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A | a \in B$, причем $A \subseteq B \Leftrightarrow \underline{b} \leqslant \underline{a} \wedge \bar{a} \leqslant \bar{b}$.

Теорема 9. Если $\langle M, \subseteq\rangle$ — структура, то $\langle I(M) \cup \{\varnothing\}, \subseteq\rangle$ также образует структуру, причем

$$\sup(A, B) = [\inf(\underline{a}, \underline{b}), \sup(\bar{a}, \bar{b})],$$

$$\inf (A, B) = \begin{cases} [\sup (\underline{a}, \underline{b}), \inf (\bar{a}, \bar{b})], & \text{если } \inf (\bar{a}, \bar{b}) \geqslant \sup (\underline{a}, \underline{b}), \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пользуясь свойствами интервальной структуры, можно сформулировать понятие сходимости последовательности интервалов [28].

Пусть $\langle M, \leqslant\rangle$ — условно полная структура, каждое ограниченное сверху (снизу) подмножество которой имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Тогда

$$x_\nu \nearrow x \Leftrightarrow x_\nu \leqslant x_{\nu+1} \wedge x = \sup_\nu x_\nu, \quad \nu \in N,$$

$$x_\nu \searrow x \Leftrightarrow x_\nu \geqslant x_{\nu+1} \wedge x = \inf_\nu x_\nu, \quad \nu \in N,$$

$$x_\nu \xrightarrow{(0)} x \Leftrightarrow \exists \{y_\nu\}, \{z_\nu\} | y_\nu \leqslant x_\nu \leqslant z_\nu \wedge x = \sup_\nu y_\nu = \inf_\nu z_\nu, \quad \nu \in N.$$

Поскольку $\langle I(M), \leqslant\rangle$, $\langle I(M) \cup \varnothing, \subseteq\rangle$ — условно полные структуры, определение сходимости переносится на последовательности интервалов:

$$X_\nu \xrightarrow{(0)} X \Leftrightarrow \underline{x}_\nu \xrightarrow{(0)} \underline{x} \wedge \overline{x}_\nu \xrightarrow{(0)} \overline{x},$$

где $X_\nu = [\underline{x}_\nu, \overline{x}_\nu]$, $X = [\underline{x}, \overline{x}]$. Для всех рассматриваемых выше структур для сходящихся последовательностей выполняются соотношения

$$x_\nu = x, \quad \nu \in N \Rightarrow x_\nu \xrightarrow{(0)} x,$$

$$x_\nu \xrightarrow{(0)} x \wedge \{\nu_k\} \in N \Rightarrow x_{\nu_k} \xrightarrow{(0)} x,$$

$$x_\nu \leqslant a, \ \nu \in N \wedge x_\nu \xrightarrow{(0)} x \Rightarrow x \leqslant a.$$

Глава II

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1. Одним из основных вопросов дифференциального исчисления является вопрос об аппроксимации (в окрестности некоторой точки) заданных отображений линейными отображениями. При этом аппроксимирующее линейное отображение должно представлять хорошее приближение в достаточно точном смысле.

В данном параграфе мы дадим определения и исследуем свойства производных интервальных отображений. Для этого нам потребуются некоторые утверждения об интервальных пространствах.

Пусть E — нормированное линейное пространство в котором введено отношение упорядоченности. Для дальнейшего нашего рассмотрения достаточно ограничиться случаем $E = R$. Через $I(R)$, как обычно, обозначим множество интервалов $A = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$, либо $A = \{x \in R \mid \|x - d\| \leqslant \varepsilon\} = [d, \varepsilon]$. Введем в $I(R)$ норму $\|[d, \varepsilon]\| = \|d\| + \varepsilon$ и метрику $\rho([d, \varepsilon], [c, \delta]) = \rho(c, d) + |\varepsilon - \delta|$, где $\rho(c, d)$ — метрика в R. Возможны и другие определения нормы и метрики,

согласующиеся с отношением упорядоченности $\leqslant$:

$$\|[a, b]\| = \max(|a|, |b|),$$

$$\rho([a, b], [c, d]) = \max(|a - c|, |b - d|).$$

Будем рассматривать интервально-значные функции с действительным аргументом F: $R \to I(R)$. Один из первых способов определения производной интервальных функций связан с методами погружения [29].

Если D — рефлексивное нормированное пространство, то существует действительное нормированное линейное пространство $\mathscr{B}(D)$ и изометрическое отображение π: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'(D)$, где $\mathscr{B}$ — множество всех замкнутых выпуклых подмножеств D, метризованное с помощью хаусдорфовой метрики. Для интервальных пространств над R показано, что такое погружение осуществляет функция π: $[a, b] \to (a, b) \in R^2$ [12]. При этом любую интервальную функцию F: $R \to I(R)$ можно сопоставить с отображением $\widehat{F}$: $R \to R^2$, определенным следующим образом: $\widehat{F} = \pi F$.

Интервальная функция F: $R \to I(R)$ называется *π-дифференцируемой по Фреше* в точке x, если функция $\widehat{F} = \pi F$ дифференцируема по Фреше в этой точке, т. е. существуют линейное отображение $dF_x(h)$: $R \to R^2$ и отображение $r: R \to R^2$, удовлетворяющие свойствам $r(0) = (0, 0)$, $\lim\limits_{h \to 0}(r(h)/h) = (0, 0)$, причем для всех h из некоторой окрестности нуля выполняется равенство

$$\widehat{F}(x + h) - \widehat{F}(x) = dF_x(h) + r(h).$$

Тогда производная Фреше функции F равняется $\pi^{-1}F'(x)$, а F' определяется, как обычно, из соотношения $dF_x(h) = F'(x)h$ для всех x из области определения функции.

Отсюда видно ограничение, возникающее при использовании введенного определения. Рассмотрим функцию $G(x) = [0, 1]x$, для нее

$$\widehat{G}'(x) = \begin{cases} (0, 1), & x > 0, \\ (1, 0), & x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что $G(x)$ будет π-дифференцируемой по Фреше только при $x > 0$, $G'(x) = [0, 1]$. Имеет место

Теорема 1. Если функция $F: R \to I(R)$ π-Фреше-дифференцируема в точке x, то $dF_x(h) \in I(R) = \{(a, b) \in R^2 | a \leqslant b\}$ тогда и только тогда, когда λF не убывает в направлении h (это означает, что для t из достаточно малой окрестности нуля функция $\lambda F(x+th)$ не убывает по t, λ — длина интервала).

Доказательство теоремы следует из хорошо известных свойств производной действительной функции, так как для фиксированного h Фреше-дифференцируемость совпадает с дифференцируемостью по действительному параметру t. Кроме того, предполагается, что $F(x) = [f(x), g(x)]$ в области определения.

2. Для интервального пространства $I(R)$ возможны различные способы записи интервалов, о чем уже упоминалось выше. Например, интервал $X = [x, \bar{x}]$ можно представить так: $X = 1 \cdot \varphi(X) + [-1, 1]\lambda(\bar{X})/2$. Здесь $\varphi(X) = (\underline{x} + \bar{x})/2$. Поскольку при этом изменится способ погружения $I(R)$ в R^2, необходимо установить, меняется ли введенное определение дифференцируемости. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема [25].

Теорема 2. Пусть γ — гомоморфное ограниченное вложение $\langle I(R), +, \cdot\rho\rangle$ в $\langle R^2, +, \cdot\rho\rangle$, функция $F: R \to (R^2)$ будет π-Фреше-дифференцируемой в x тогда и только тогда, когда существует отображение $F^*: R \to R^2$, $F^* = \gamma F$, дифференцируемое в x. При этом $d_xF(h) = (\pi\gamma^{-1})d_xF^*(h)$, где $(\pi\gamma^{-1})$ — автоморфизм, индуцированный в R^2 отображением $\pi\gamma^{-1}$.

Доказательство. Отметим, что для интервальных пространств под вложением понимается линейное отображение. Имеем $\pi F = \pi\gamma^{-1}(\gamma F) = \pi\gamma^{-1}F^*$. Без ограничения общности мы можем распространить $\pi\gamma^{-1}$ до линейного отображения, заданного на всем R^2. Для этого используем тот факт, что если $\bar{X} \overline{\in} \gamma(I(R))$, то $-\bar{X} \in \gamma(I(R))$, где $\bar{X} = (a, b)$, $-\bar{X} = (-a, -b)$.

Определим

$$(\pi\gamma^{-1})(\bar{X}) = \begin{cases} \pi\gamma^{-1}(\bar{X}), & \text{если } \bar{X} \in \gamma(I(R)), \\ -\pi\gamma^{-1}(-\bar{X}), & \text{если } \bar{X} \overline{\in} \gamma(I(R)). \end{cases}$$

Это отображение линейно, так как для отрицательных α $(\pi\gamma^{-1})(\alpha\bar{X}) = -\pi\gamma^{-1}(-\alpha\bar{X}) = \alpha\pi\gamma^{-1}(\bar{X}) = \alpha(\pi\gamma^{-1})(\bar{X})$, если $\bar{X} \in \gamma(I(R))$, $(\pi\gamma^{-1})(\alpha\bar{X}) = \pi\gamma^{-1}(\alpha\bar{X}) = -\alpha\pi\gamma^{-1}(-\bar{X}) = \alpha(\pi\gamma^{-1})(\bar{X})$, если $\bar{X} \overline{\in} \gamma(I(R))$. Поскольку любое линейное отображение дифференцируемо по Фреше, то $d_xF(h) = (\pi\gamma^{-1})dF^*_x(h)$. Теорема доказана.

Предположив представимость интервально-значных функций граничными вещественными, получаем утверждения о свойствах производных.

Теорема 3. Пусть $F_1, F_2: R \to I(R)$ π-Фреше-дифференцируемы в точке x_0, $F_1(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, $F_2(x) = [f_3(x), f_4(x)]$. Предположим, что существуют пары (i, j) и (m, n), $i, m = 1 \vee 2$, $j, n = 3, 4$, такие, что $f_i(x) \cdot f_j(x) < f_k(x) f_l(x) < f_m(x) f_n(x)$, $(k, l) \neq (i, j)$, $(k, l) \neq (m, n)$. Тогда произведение $F_1(x) \cdot F_2(x)$ будет π-Фреше-дифференцируемо в точке x_0, причем

$$d_{x_0}(F_1F_2)(h) = \big(f_i(x)\, d_{x_0}f_j(h) + f_j(x)\, d_{x_0}f_i(h),\quad f_m(x) \times d_{x_0}f_n(h) + f_n(x)\, d_{x_0}f_m(h)\big).$$

Доказательство. Поскольку функции F_1, F_2 π-Фреше-дифференцируемы, они непрерывны. Следовательно, в некоторой окрестности точки x_0 функция F_1F_2 может быть представлена в виде $F_1(x)F_2(x) = [f_i(x)f_j(x), f_m(x)f_n(x)]$ для любого x из этой окрестности. Кроме того,

$$d_{x_0}(f_i(x)\, f_j(x)) = f_i(x)\, d_{x_0}f_j(h) + f_j(x)\, d_{x_0}f_i(h),$$

$$dx_0(f_m(x)\, f_n(x)) = f_m(x)\, d_{x_0}f_n(h) + f_n(x)\, d_{x_0}f_m(h).$$

Теорема 4. Пусть $F: R \to I(R)$, $F = [f(x), g(x)]$ π-Фреше-дифференцируема в точке x_0 и существует окрестность V_{x_0} точки x_0 такая, что для всех $y \in V_{x_0}$ выполняется включение $F(x_0) \subset F(y)$, либо $F(y) \subset F(x_0)$, тогда $d_{x_0}F(h) = (0, 0)$.

Доказательство. Пользуясь определением π-Фреше-дифференцируемости легко видеть, что $d_{x_0}(F(h)) = [f'(x_0), g'(x_0)]$, причем из $F(x) \subset F(y)$, либо $F(y) \subset F(x)$, для всех $y \in V_{x_0}$ получаем $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$.

3. Приведем также определения производной интервально-значных функций, не использующие методов погружения. Будем отождествлять значения интервальных функций с точками пространства R^2.

Пусть $G: M \to I(R)$, $M \subset R$, и является открытым множеством. Назовем функцию G *$\mathcal{F}$-дифференцируемой* в точке $x \in M$, если существуют элемент $(a, b) \in R^2$ и отображение $r: R \to R^2$, $r(0) = (0, 0)$, $\lim\limits_{h \to 0} (r(h)/h) = (0, 0)$ такие, что для всех h из достаточно малой окрестности нуля выполняется равенство $G(x+h) - G(x) = (a, b)h + r(h)$. Под операцией вычитания здесь понимается вычитание в R^2. Функция $G'(x) = (a, b)$ называется *$\mathcal{F}$-производной* от G в точке x.

Из этого определения видно, что, расширяя класс дифференцируемых функций, мы утрачиваем такое важное свойство производной, как линейность.

4. Следуя идее Мура [19], можно дать определение производной, использующее операцию интегрирования интервально-значных функций. Интегрирование интервальных функций рассмотрено в § 2. Нам потребуются следующие сведения.

Пусть $M \subset R$ — связное множество, $F: M \to I(R)$ определяется через граничные вещественные функции: $F(x) = [f(x), g(x)]$ для $x \in M$. Если F интегрируема, то выполняется соотношение [30]:

$$\int_a^b F(\xi)\, d\xi = \begin{cases} \left[\int_a^b f(\xi)\, d\xi, \int_a^b g(\xi)\, d\xi\right], & \text{если } a \leqslant b, \\ \left[-\int_a^b g(\xi)\, d\xi, -\int_a^b f(\xi)\, d\xi\right], & \text{если } a \geqslant b. \end{cases}$$

Интервальная функция $F: M \to I(R)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в M, если задана непрерывная функция $G: M \to I(R)$ и покрытие множества M семейством $(\mathcal{I}_n)_{n \in N}$, где $\mathcal{I}_n \in I(R)$, $n \in N$ — некоторое счетное множество индексов такое, что для любого $n \in N$ существуют $a_n \in R$ и $F_n \in I(R)$, удовлетворяющие равенству

$$F(x) = \int_{a_n}^x G(\xi)\, d\xi + F_n \quad \forall x \in \mathcal{I}_n.$$

Если функция G находится единственным образом и не зависит от выбора покрытия и точек a_n, то назовем G производной функции F, $F' = G$.

Приведем примеры, показывающие, что непрерывно дифференцируемые функции в смысле приведенного определения могут не быть непрерывными, а из непрерывной дифференцируемости не следует дифференцируемости граничных функций.

Рассмотрим функцию $F(x) = [0, 1] \operatorname{sign} x$. Очевидна ее дифференцируемость $F'(x) = 0$, однако в нуле она не является непрерывной.

Функция $F(x) = [-1, 1] + [-1, 1]x$ также дифференцируема, $F'(x) = [-1, 1]$, граничные же функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{для } x \leqslant -1, \\ -1 - x & \text{для } x > -1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{для } x \leqslant -1, \\ 1 + x & \text{для } x > -1 \end{cases}$$

не будут дифференцируемы при $x = -1$. Приведем соотношения, связывающие интервальную функцию $F = [f, g]$ с граничными функциями. Пусть F непрерывно дифференцируема в M, производная $G = [u, v]$, $(\mathcal{I}_n)_{n \in N}$ — требуемое разложение M, $(a_n)_{n \in N}$ — семейство точек, $(F_n)_{n \in N}$, где $F_n = [c_n, d_n]$,— множество констант интегрирования.

Справедливы равенства

$$f(x) = c_n + \int_{a_n}^x v(\xi)\, d\xi, \quad g(x) = d_n + \int_{a_n}^x u(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathcal{I}_n, \quad x \leqslant a_n,$$

$$f(x) = d_n + \int_{a_n}^x u(\xi)\, d\xi, \quad g(x) = c_n + \int_{a_n}^x v(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathcal{I}_n \quad x \geqslant a_n.$$

При этом

$$\begin{aligned} u(x) &= g'(x),\ v(x) = f'(x) \text{ для } x \in \mathcal{I}_n,\ x < a_n, \\ u(x) &= f'(x),\ v(x) = g'(x) \text{ для } x \in \mathcal{I}_n,\ x > a_n, \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. для всех $n \in N$ функции f на множестве $(\mathcal{I}_n \setminus \{a_n\})$

и g на множестве $(\mathscr{I}_n \setminus \{a_n\})$ непрерывно дифференцируемы.

5. Сформулируем утверждения о свойствах производных интервальных функций [30].

Лемма 1. Пусть $F=[f(x),\ g(x)]$ непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве $M \subset R$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на M, за исключением, быть может, счетного множества точек, причем интервальная функция $f' \vee g'$ может быть продолжена до непрерывной на M интервальной функции $f' \vee g'$, и справедливо $F'=f' \vee g'$.

Доказательство. Из (1) следует, что в каждом интервале существует не более трех точек, в которых f и g не являются непрерывно дифференцируемыми. В тех точках x, где f и g дифференцируемы, выполняется $F'(x)=f'(x) \vee g'(x)$. Очевидно, что $f' \vee \vee g'$ может быть продолжена до непрерывной функции F' на M. Лемма доказана.

Лемма 2. (Интервальный аналог теоремы о среднем.) Пусть функция $F=[f,\ g]$ непрерывна и непрерывно дифференцируема на интервале $X \in I(R)$, $x \in \in X$. Обозначим $F'(X)=\bigcup_{x \in X} F'(x) \in I(R)$, тогда выполняется включение $F(x) \subset F(x_0)+(x-x_0)F'(X)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Обозначим $h=x-x_0$. Запишем следствия теоремы о среднем для вещественных функций:

$$f(x) \in f(x_0)+h[D^R f(\xi),\ D_L f(\xi)],$$

либо $$f(x) \in f(x_0)+h[D^L f(\xi),\ D_R f(\xi)],$$

где $\xi \in x \vee x_0$, D^R, D_R, D^L, D_L обозначают правую (верхнюю и нижнюю), левую (верхнюю и нижнюю) производные соответственно.

Из леммы 1 следует $f(x) \in f(x_0)+hF'(\xi)$, аналогично $g(x) \in g(x_0)+hF'(\eta)$, $\eta \in x \vee x_0$, откуда

$$F(x)=[f(x),\ g(x)] \subset F(x_0)+h(F'(\xi) \vee F'(\eta)) \subset$$
$$\subset F(x_0)+hF'(X).$$

Из $X \in I(R)$ и непрерывности F' видно, что $F'(X) \in \in I(R)$.

6. Мы проанализировали некоторые определения производной интервально-значных функций и их

свойства, быть может, не полностью тождественные аналогичным свойствам для вещественных функций. Общим для всех этих способов является использование метрики пространства $I(R)$ при нахождении пределов сходящихся последовательностей функций.

В последние годы болгарскими математиками [31—33] был развит несколько иной подход к определению сходящихся последовательностей, нахождению их пределов, и на этой основе сформулированы основные понятия дифференциального исчисления для интервальных функций.

Пусть задана последовательность интервалов $\{A_n\}$, $A_n \in I(R)$. Назовем интервал A, который является пересечением всех интервалов, содержащих члены последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа, *s-пределом последовательности* $\{A_n\}_1^\infty$: $: s\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Если $\{a_n\}_1^\infty$ — последовательность действительных чисел, то $a = s\lim_{n\to\infty} a_n$ — это минимальный интервал, содержащий все предельные точки последовательности, например $s\lim_n (-1)^n = [-1,\ 1]$. Аналогично вводится понятие предела интервальной функции.

Пусть $F: \Lambda \to I(R)$, $\Lambda \subset R$, $x_0 \in \Lambda$, $f \in F$. Назовем интервал A *s-пределом* функции в точке x_0, если A является пересечением всех интервалов, содержащих интервалы вида $s\lim_n F(f,\ x_n)$, где $x_n \in \Lambda$, $x_n \to x_0$.

Введем определение предела интервальной функции G, заданной через вещественные граничные функции: $G(x)=[\underline{g}(x),\ \bar{g}(x)]$. Пусть G — интервальная функция, определенная в выколотой окрестности точки $x_0: \{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$. Назовем s-пределом функции G при $x \to x_0$ интервал

$$s\lim_{x\to x_0} G(x) = [\underline{\lim}_{x\to x_0} \underline{g}(x),\ \overline{\lim}_{x\to x_0} \bar{g}(x)].$$

Тогда можно ввести определение производной интервальной функции:

$$G'(x)=s\lim_{h\to 0}((G(x+h)-G(x))/h).$$

В работах [32, 33] проведено сравнение введенного определения с ранее существующими и дан анализ свойств производной.

§ 2. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть f — непрерывная функция, для которой существует интервальное расширение F. Предположим, что F есть интервально-значная функция, определенная для $X \subset A$, где $A=[a, b]$, $a<b$ и сужение F есть непрерывная вещественная функция по A, $F(x)=f(x)$ при $x \in A$ и $f(x) \subset F(X)$ при $X \subset A$. Функция

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \quad t \in [a, b]$$

имеет непрерывную производную $g'(x)=f(x)$ и по теореме о среднем

$$g(x)=g(a)+f(a+\theta(x-a))(x-a)$$

для некоторого $\theta \in [0, 1]$. Так как $g(a)=0$, следовательно,

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\int f(a+\theta(x-a))(x-a), \quad \theta \in [0, 1].$$

Тогда

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt \in F(a+[0, 1](x-a))(x-a)$$

и так как $x \in [a, b]$ и $x \geqslant a$, то

$$\int_a^x f(t)\,dt \in F([a, x])(x-a).$$

Отсюда для любого $X=[x_1, x_2] \subset A$, обозначая $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$ через $\int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt$ или $\int_X f(t)\,dt$, имеем

$$\int_X f(t)\,dt \in F(X)\,\omega(X). \qquad (1)$$

Используя свойство аддитивности интеграла:

$$\int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt+\int_{[x_2,x_3]} f(t)\,dt=\int_{[x_1,x_3]} f(t)\,dt,$$

получим

$$\int_{[x_1,x_3]} f(t)\,dt \in F([x_1, x_2])(x_2-x_1)+F(x_2, x_3)(x_3-x_2). \qquad (2)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Если F — рациональная интервальная функция, определенная для $X \subset A$, f — ее сужение на A и $X_i^{(n)}=[a+(i-1)(x-a)/n,\ a+i(x-a)/n]$ $(i=1, \ldots, n)$, то существует положительная постоянная l такая, что для каждого целого $n>0$

$$\int_{[a,x]} f(t)\,dt \in \sum_{i=1}^n F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n) \qquad (3)$$

и

$$\omega\left(\sum_{i=1}^n F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n)\right) \leqslant l(x-a)^2/n. \qquad (4)$$

Доказательство. Включение (3) следует из соотношений (1) и (2).

Далее, существует постоянная $l>0$ такая, что для всех $X \subset A$, $\omega(F(X)) \leqslant l\omega(X)$, и поэтому

$$\omega\left(\sum_{i=1}^n F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n)\right) \leqslant ((x-a)/n)\sum_{i=1}^n l\omega\left(X_i^{(n)}\right). \qquad (5)$$

Так как $\omega\left(X_j^{(n)}\right)=(x-a)/n$, из (5) следует (4). Теорема доказана.

Формула (1) дает основание для введения понятия интервального интеграла, т. е. интервально-значного интеграла от интервально-значной функции.

Пусть f — непрерывная интервально-значная функция вещественного переменного (это возможно, например, за счет наличия интервальных коэффициентов). Если F — непрерывное интервальное расширение f такое, что $F(x)=f(x)$, то мы определим интеграл так:

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} F\left(X_i^{(n)}\right)((x-a)/n). \qquad (6)$$

Для каждого множества вещественных коэффициентов из данного интервального вектора C, коэффициентов рациональной функции f мы получим непрерывную функцию f_c такую, что $f_c(x)\in f(x)$, и с учетом (3) интеграл $\int\limits_{[a,x]} f_c(t)\,dt$ будет содержаться в правой части равенства (6) и, следовательно,

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt=\left\{\int f_c(t)\,dt \mid c\in C\right\}. \qquad (7)$$

Если f — непрерывная интервально-значная функция вещественного переменного $x\in[a,\ b]$, то существует пара непрерывных вещественных функций f_1 и f_2 таких, что $f(x)=[f_1(x),\ f_2(x)]$, и введенное выше определение интеграла равносильно следующему:

$$\int\limits_{[a,x]} f(t)\,dt=\left[\int\limits_{[a,x]} f_1(t)\,dt,\ \int\limits_{[a,x]} f_2(t)\,dt\right]. \qquad (8)$$

Преимущество (7) над (8) состоит в том, что обычно интервальное расширение получается не непосредственно, а некоторым расширением вещественных операций до интервальных.

Теорема 2. Если f и g — непрерывные интервально-значные функции вещественного переменного $x\in[a,\ b]$ и $f(x)\subset g(x)$, то

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx\subset\int\limits_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

Действительно, если $f(x)=[f_1(x),\ f_2(x)]$, $g(x)=[g_1(x),\ g_2(x)]$ и $f(x)\subset g(x)$, то из (8) следует

$$\int\limits_{[a,b]} g_1(x)\,dx\leqslant\int\limits_{[a,b]} f_1(x)\,dx\leqslant\int\limits_{[a,b]} f_2(x)\,dx\leqslant\int\limits_{[a,b]} g_2(x)\,dx,$$

что и доказывает справедливость теоремы 2.

§ 3. ПРЕДСТАВИМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГРАНИЧНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Пусть $M=R$. Рассмотрим вопрос о представимости интервально-значной функции двумя граничными вещественными функциями. Наличие такого представления помогает свести изучение интервально-значной функции к изучению вещественных функций. Например, как показано в [29], дифференцируемость граничных функций является необходимым и достаточным условием F-дифференцируемости данной интервально-значной функции.

Задача о представлении интервально-значной функции двумя граничными вещественными функциями состоит в нахождении представления

$$F(X;\ B)=[f_1(t),\ f_2(t)], \qquad (1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — некоторые вещественные функции, подлежащие определению, причем $t\in Q^{R_k}\subset R_k$, $k\leqslant 2n$, а область Q^{R_k} также подлежит определению.

Например, если на отрезке $0\leqslant x\leqslant 3$ рассмотрим функцию

$$F(x;\ B)=x^2-[2,\ 4]x+[3,\ 5], \qquad (2)$$

то

$$f_1(t)=x^2-4x+3,\quad f_2(x)=x^2-2x+5.$$

Действительно, каждому фиксированному значению $x\in[0,\ 3]$ функция (2) ставит в соответствие некоторый интервал $[a,\ b]$ (так, если $x=1$, то $[a,\ b]=[0,\ 4]$). Тогда, как нетрудно видеть, множество значений функции (2) на плоскости $(x,\ y)$ представляет собой область, ограниченную кривыми $y=x^2-4x+3$, $y=x^2-2x+5$ и отрезками прямых $x=0$, $x=3$.

2. Пусть $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)=([u_1,\ v_1],\ \ldots,\ [u_n,\ v_n])=[u,\ v]$, где $u_i\leqslant x_i\leqslant y_i\leqslant v_i$, $a_j\leqslant b_j\leqslant c_j$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ m)$.

Тогда для функции $F(X;\ B)$ существуют функции $\Omega(x,\ y;\ B)$, $\varphi(x,\ y;\ b)$ и $\psi(z;\ b)$ такие, что

$$F(X;\ B)=\bigcup_{x,y\in X}\Omega(x,y;\ B)=\bigcup_{x,y\in X}\bigcup_{b\in B}\varphi(x,\ y;\ b)=$$
$$=\bigcup_{x,y\in X,b\in B}\varphi(x,\ y;\ b)=\bigcup_{x,y\in X,b\in B}\psi(z;\ b),$$

где $z=(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Далее

$$\bigcup_{x,y\in X, b\in B} \varphi(x, y; b) = [\min_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b), \max_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b)]$$

и, следовательно,

$$F(X; B) = [f_1(u, v), f_2(u, v)] = \\ = [\min_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(s, y; b), \max_{\substack{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v\\ b\in B}} \varphi(x, y; b)]. \quad (3)$$

Откуда, в частности,

$$f_1(u, v) = \min_{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v} \varphi(x, y; b_{\min}), \quad (4)$$

$$f_2(u, v) = \max_{u\leqslant x\leqslant y\leqslant v} \varphi(x, y; b_{\max}). \quad (5)$$

Здесь векторы $b_{\min}$ и $b_{\max}$ такие, что

$$\min_{\substack{x,y\\ b\in B}} \varphi(x, y; b) = \min_{x,y} \varphi(x, y; b_{\min}),$$

$$\max_{\substack{x,y\\ b\in B}} \varphi(x, y; b) = \max \varphi(x, y; b_{\max}).$$

Если рассмотреть функцию $\lambda(z, b_1, b_2) = \omega[(\psi(z, b_1), \psi(z, b_2)])$, $b_1, b_2 \in B$, то легко видеть, что для функций f_1 и f_2 выполняется условие $\max \omega([\psi(z, b_1), \psi(z, b_2)]) = \omega([f_1(u, v), f_2(u, v)])$.

Таким образом, мы показали, что всякую однозначную интервальную функцию $F(X; B)$ можно единственным образом представить через граничные вещественные функции посредством формул (3)—(5).

3. Наши дальнейшие рассмотрения в этом параграфе будут заключаться в уточнении формул (3)—(5) при определенных условиях на $F(X; B)$. Будем предполагать, что все константы входят в функцию как простые, т. е. в F над константами произведены все операции. Такое представление назовем *каноническим*.

Например, функция (2) записана в каноническом виде, а функция $F(x; B_1) = [1, 2]^2x^2 + ([2, 4] + [1, 3])x + [4, 7]/[0{,}1; 0{,}8]$ — не в каноническом виде. Для ее записи в каноническом виде произведем все операции над интервалами-константами и получим $F(x; B_2) = [1, 4]x^2 + [3, 7]x + [5, 70]$.

Кроме того, будем считать, что функция F может быть интервально-значной по следующим причинам: 1) функция F есть функция вещественного аргумента x, но константы, входящие в F,— интервалы: $F = F(x; B)$; 2) функция F есть функция интервального аргумента X, константы, входящие в F,— вещественные числа (B — вырожденный вектор): $F = F(X)$; 3) аргумент функции F и константы, входящие в нее, есть интервальные векторы (сюда же, в частности, включается случай, когда F есть интервально-арифметическая суперпозиция выражений вида

$$B_i * [f_{i1}(t), \quad f_{i2}(t)],$$

где

$$* \in \{+, -, \cdot, /\}, \ t = (u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n) \ (i = 1, \ldots \\ \ldots, m); \ F = F(X, B).$$

Учитывая, что в интервальной арифметике справедливо равенство $(-1)[a, b] = [-b, -a]$ и что деление интервалов определяется через умножение, мы можем функцию $F(X, B)$ записать как суперпозицию выражений вида $B_i * F_i(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $*$ означает сложение или умножение интервалов. Это преобразование функции F и приведение ее к каноническому виду упрощает определение компонент $b_{\min}$ и $b_{\max}$, для нахождения которых достаточно проследить монотонность функции F по b_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Процесс определения функций f_1 и f_2 зависит от причин, по которым функция F может быть интервально-значной. В случае функции $F(x; B)$ знание аналитического выражения достаточно для нахождения f_1 и f_2. Действительно, рассмотрим F как суперпозицию в указанном выше смысле функций вида $[a_i, c_i] * \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Здесь возможны два случая.

1) $\varphi_i(x) > 0$. Если F по b_i возрастает, то a_i будет i-й компонентой вектора $b_{\min}$, а c_i — i-й компонентой вектора $b_{\max}$; если же убывает, то a_i будет i-й компонентой $b_{\max}$, а c_i — i-й компонентой $b_{\min}$.

2) $\varphi_i(x) < 0$. В этом случае критерий выбора компонент $b_{\min}$ и $b_{\max}$ противоположен предыдущему.

После нахождения векторов $b_{\min}$ и $b_{\max}$, подставляя в F вместо B $b_{\min}$, а затем $b_{\max}$, получим соответственно f_1 и f_2. Таким образом, формула (1) для $F(x;\ B)$ примет вид

$$F(x;\ B) = [F(x;\ b_{\min}),\ F(x;\ b_{\max}].$$

Если $n=1$ и $F(x;\ B)$ есть полином $F(x;\ B) = \sum_{i=0}^{m} [a_i,\ c_i]\, x^i$, то для него справедливо представление

$$F(x;\ B) = [f_1(x),\ f_2(x)]. \tag{6}$$

Здесь

$$f_1(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} a_i x^i & \text{при } x \geqslant 0, \\ \sum_{i=0}^{m} (a_i\theta(i) + c_i\gamma(i))\, x^i & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m} c_i x^i & \text{при } x \geqslant 0, \\ \sum_{i=0}^{m} (a_i\gamma(i) + c_i\theta(i))\, x^i & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\gamma(i) = i - 2[i/2] = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 2k, \\ 1 & \text{при } i = 2k+1, \end{cases}$$

$$\theta(i) = 1 - \gamma(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 2k, \\ 0 & \text{при } i = 2k+1, \end{cases}$$

$[l]$ — целая часть числа l. Аналогичную формулу можно получить при $n > 1$, когда $F(x;\ B)$ есть полином.

Теперь, возвращаясь к функции, заданной формулой (2), из формулы (6) получим для нее

$$f_1(x) = \begin{cases} \tilde{f}_1(x) = x^2 - 4x + 3 & \text{при } x \geqslant 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_1(x) = x^2 - 2x + 3 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \tilde{f}_2(x) = x^2 - 2x + 5 & \text{при } x \geqslant 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_2(x) = x^2 - 4x + 5 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Из определения функции $F(X)$ ясно, что существует единственная вещественная функция $f(x)$ такая, что $\underset{X\to x}{\mathrm{Rs}}\, F(X) = f(x)$ и $\underset{x\to X}{\mathrm{Di}}\, f(x) = F(X)$. Если в

формуле (10) из § 1 гл. 1 выполнено равенство, т. е.

$$F(X) = \bigcup_{x\in X} f(x) \tag{7}$$

и f монотонно возрастает, то

$$F(X) = [f(u),\ f(v)], \tag{8}$$

если же при выполнении равенства (7) функция f монотонно убывает, то

$$F(X) = [f(v),\ f(u)]. \tag{9}$$

Формулы (8), (9) можно комбинировать, выделяя участки монотонности, когда функция f не является однотипно монотонной всюду в области. Последнее для конкретных функций может оказаться трудновыполнимым.

В общем случае можно поступить следующим образом. Пусть X_i встречается в F k_i раз и $\sum_{i=1}^{n} k_i = g$. Если каждой переменной X_i в F поставим в соответствие k_i вещественных переменных $s^j_{j_i} \in X_i\ (i = 1, \ldots, k_j)$, то получим вещественную функцию $\hat{f}\left(s^1_1, \ldots, s_{k1}\right.$, $\left.s^2_1, \ldots, s^2_{k_n}\right) = \hat{f}(s)$ от q аргументов, в которой кратность каждого аргумента равна единице. Очевидно, что интервальное расширение $\hat{f}$ совпадает с $F(X)$, и поэтому для F справедливо представление

$$F(X) = [\min_{s^j_i\in X_i} \hat{f}(s),\ \max_{s^j_i\in X_i} \hat{f}(s)]. \tag{10}$$

Например, для функции $F(X_1, X_2) = (X_1^2 + X_1)/X_1 - X_2^3$ при $X_1 = [x,\ y] > 0$ и $X_2 = [z,\ t]$ имеем $n = 2$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $q = 4$, $\hat{f}(s) = \hat{f}(s_1, \ldots, s_4) = (s_1^2 + s_2)/s_3 - s_4^3$. Тогда

$$F(X_1,\ X_2) = [(x^2 + x)/y - t^3,\ (y^2 + y)/x + z^3].$$

Пользуясь формулой (10), укажем представление через граничные вещественные функции интервального полинома вида

$$F(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \quad (n = 1).$$