

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ ВИХРЕВОЙ ТРУБКИ РАНКА-ХИЛША\*

ТАРУНИН Е.Л., АЛИКИНА О.Н.

*Пермский государственный университет, Россия*

e-mail: tarunin@psu.ru

Эффект Ранка выражается в разделении закрученного потока газа на два. Один из потоков имеет температуру ниже, чем у входящего потока, другой – выше. Процессы в вихревых устройствах трудны для изучения, потому что их полное описание основывается на уравнениях движения и переноса тепла сжимаемого газа. Течение предполагается осесимметричным и ламинарным. Решение находится из полных уравнений Навье-Стокса. Вычисления производятся в естественных переменных на переменной сетке до получения стационарного решения.

### Введение

Впервые вихревой эффект был обнаружен в 1931 г. Именно тогда французский инженер получил патент на устройство, которое он называл “вихревая труба”. По данным его опытов закрученный входной поток сжатого газа с температурой  $T=20^{\circ}\text{C}$  разделялся на два потока с соответствующей температурой  $T_{\text{хол}}=(10\pm 20)^{\circ}\text{C}$  и  $T_{\text{гор}}=+100^{\circ}\text{C}$ . Его результаты вызывали сомнения в правильности измерения температуры. Публикация немецкого ученого Хилша в 1946 г. о вихревом эффекте (ВЭ) привлекла внимание к ВА и привела к интенсивному изучению эффекта.

В современных ВА эффект температурного охлаждения увеличен  $\approx 2.5$  раза [1].

В СССР ВЭ изучался в Одесском технологическом институте пищевой и холодильной промышленности с 1952 г. и с 1953 г. в Куйбышевском авиационном институте, где позднее (в 1956 г.) была создана лаборатория промышленного применения ВЭ.

В настоящее время ВЭ широко используется не только для разделения газов на холодный и горячий потоки (термотрансформаторы), но и для вакуумирования (вакуум-насосы), как осушители, сепараторы, элементы контрольно-измерительных приборов и т.д. Но при всей своей простоте и легкости использования, ВА имеют существенный недостаток – низкий КПД, поэтому актуальны исследования, направленные на поиск предельных показателей ВА с целью уменьшения их энергетических затрат.

Целью нашего исследования является поиск более полного описания процессов и оптимальных параметров в ВТ Ранка-Хилша.

### Физическая постановка задачи

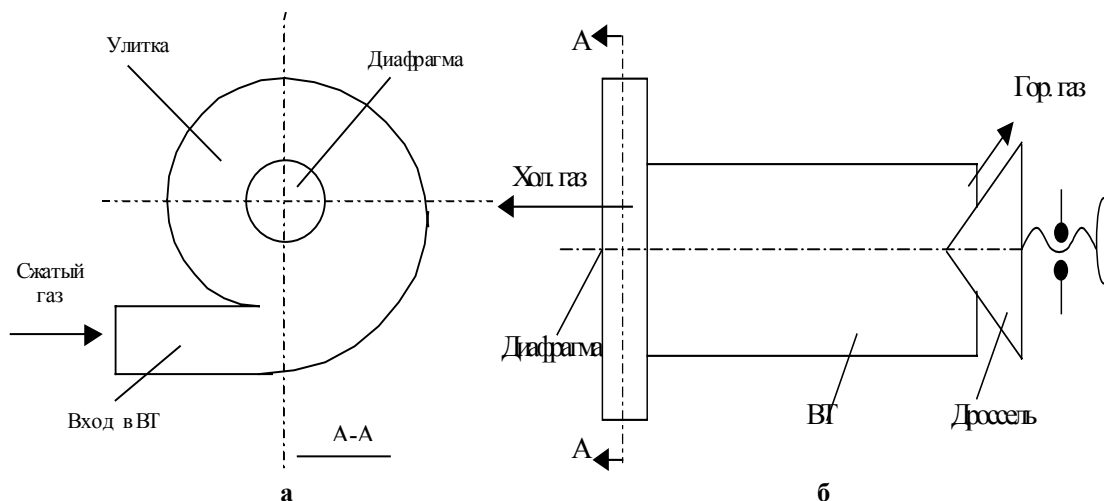


Рис.1. Схема вихревой трубы (а – вид с торца, б – вид сбоку)

Вихревая труба цилиндрической формы имеет два выхода. Вход газа в ВТ реализуется обычно с помощью одного или двух сопел. На рис.1 изображен вариант с одним соплом прямоугольного сечения. При втекании

газа при повышенном давлении в сопло ВТ образуется интенсивный закрученный поток. Приосевые слои газа (охлажденные) вытекают через диафрагму, а периферийные (подогретые) - через дроссель. Расходы потоков регулируются дросселем, который меняет величину выходного сечения. Эффекты охлаждения и подогрева оцениваются по разности полных температур на входе и выходах ВТ.

### Математическая постановка задачи

Нами были рассмотрены различные модели описания процессов в вихревой трубке – начиная с постановки для несжимаемой жидкости [3]. При этом математическая постановка задачи для безразмерных искомым величин выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \left( \bar{v} \cdot \nabla \right) \bar{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v} \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left( \bar{v} \cdot \nabla \right) T - B T \left[ \left( \bar{v} \cdot \nabla \right) p \right] = \frac{1}{Re Pr} \Delta T + D \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)$$

В этой системе  $V=(V_r, V_\varphi, V_z)$  – вектор скорости,  $p$  – давление,  $T$  – температура. Система содержит четыре безразмерных параметра: число Рейнольдса  $Re$ , число Прандтля  $Pr$  и параметры, учитывающие влияние вязкой диссипации ( $D$ ) сжимаемости ( $B$ ):

$$Re = \frac{RV_0}{\nu}, \quad Pr = \frac{\rho C_p \nu}{\chi}, \quad B = \frac{\beta V_0^2}{C_p}, \quad D = \frac{\eta V_0}{\rho C_p R T_0}. \quad (2)$$

Граничные условия для данной постановки задачи:

На входе (сопло):

$$V_r = -\sin \alpha, \quad V_\varphi = \cos \alpha, \quad V_z = 0, \quad T = 1; \quad (3)$$

На выходе (диафрагма):

$$V_r = 0, \quad \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0, \quad V_z = -\mu C, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \quad (4)$$

На выходе (дроссель):

$$\begin{aligned} V_r = 0, \quad \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0, \quad V_z = (1-\mu)C, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \\ C = \frac{2R(L_3 - L_2)}{R_1^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагалось, что на выходах устанавливается течение Пуазейля. Алгоритм решения задачи был следующим: найти компоненты скорости, решить уравнение Пуассона для давления с постоянным давлением на границах, и рассчитать температуру (адиабатические граничные условия для температуры).

Задача решалась двухполюсным методом (с использованием функции тока и вихря скорости) и в компонентах скорости и давления. Для решения задачи использовалась схема с направленными разностями против потока и “косой” аппроксимацией и неравномерная сетка.

Расчеты показали, что в области входа закрученного потока реализуется вихревая зона (рис. 2б). Заметим, что относительно существования этой зоны в литературе имеются противоречивые утверждения. В основной части реализуется два потока с положительной (вблизи внешнего радиуса) и отрицательной (вблизи центра трубки) скоростью течения. Азимутальная компонента скорости резко затухает вблизи входа, что говорит о сильных вязких эффектах используемой разностной схемы и о необходимости использования сетки с значительно большим числом узлов. Картины течения приведены ниже:

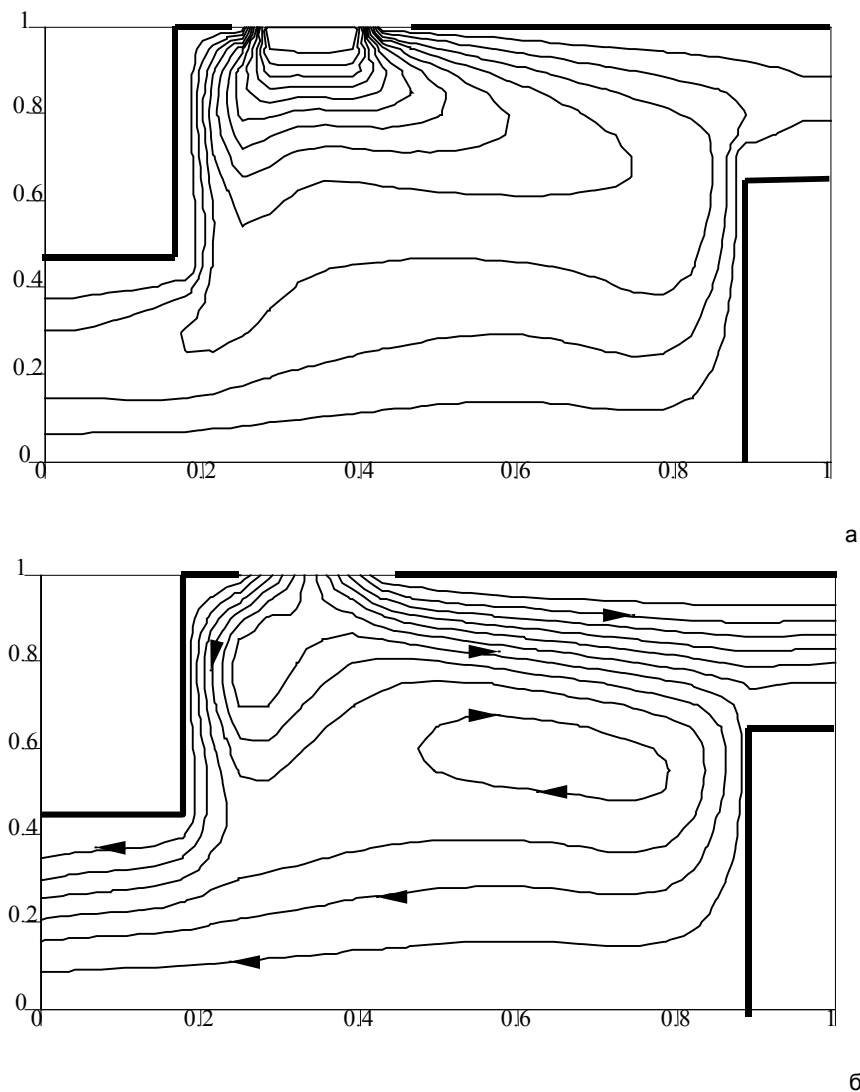


Рис.2. Изолинии азимутальной компоненты скорости (а) и функции тока (б)

На следующем этапе исследуемое течение в ВТ описывалось с помощью уравнений Навье-Стокса для вязкого идеального газа.

$$\begin{aligned}
 \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) \right] &= -\nabla p + \frac{4}{3} \nabla (\mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{V}) + \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \mu) - \mathbf{V} \cdot \Delta \mu + \\
 &(\nabla \mu \times \operatorname{rot} \mathbf{V}) - \operatorname{div} \mathbf{V} \cdot \nabla \mu - \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mu \mathbf{V}) \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\
 \rho C_v \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{V}) \right] &= \operatorname{div} (\lambda \cdot \nabla T) + \mu \Phi \\
 p &= R \rho T
 \end{aligned} \tag{6}$$

В этой системе  $\mathbf{V}=(V_r, V_\phi, V_z)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность среды,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $\mu$  – вязкость,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\Phi$  – диссипативная функция,  $C_v$  – теплоемкость,  $R$  – газовая постоянная.

Течение предполагалось ламинарным и осесимметричным. По сравнению с [3] рассматривается расширенная область расчета на выходах вихревой трубки. Предположение об осесимметричности сокращает

объем вычислений этой сложной задачи, так как сводит трехмерную постановку задачи к двумерной. Заметим, однако, что эксперименты [7] отчетливо показывают, что вихревая структура в канале ВТ не обладает упомянутой симметрией.

Для обезразмеривания системы уравнений использованы:

$R_T$  – радиус вихревой трубы;

$V_0$  – скорость на входе вихревой трубы;

$t=R_T/V_0$  - единица времени;

$T_0$  - температура на входе вихревой трубы;

$\rho_0, \lambda_0, \mu_0$  - параметры входного потока – для измерения  $\rho, \lambda, \mu$ ;

$\rho_0 = \rho_0 C_0^2 / \gamma_0$  - единица давления.

Обезразмеривание дает следующие безразмерные параметры (числа Рейнольдса, Прандтля и Маха):

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 R_T V_0}{\mu}, \quad M = \frac{V_0}{C^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu}{\lambda C}. \quad (7)$$

Система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho \gamma^2 M^2} \frac{\partial(\rho T)}{\partial r} + \frac{1}{\rho \text{Re}} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\mu \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{V_r}{r}, \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_\varphi V_r}{r} &= \frac{1}{\rho \text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu V_\varphi) \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho \gamma^2 M^2} \frac{\partial(\rho T)}{\partial z} + \frac{1}{\rho \text{Re}} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \text{div} \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{z} \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{V_r}{r}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho V_r) + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} &= 0, \\ \rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{\gamma_0}{\text{Re Pr}} \text{div}(\lambda \cdot \nabla T) + \frac{M^2}{\text{Re}} \gamma (\gamma - 1) \mu \Phi, \\ \Phi &= 2 \left[ \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div} \mathbf{V})^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Система не содержит давления. Для его вычисления используется соотношение, полученное из уравнения состояния в безразмерном виде:

$$p = \rho T. \quad (9)$$

Зависимость безразмерной вязкости от температуры аппроксимируется по формуле Саттерленда [5]:

$$\mu = \frac{1.4207}{T + 0.4207}. \quad (10)$$

Решение задачи зависит от граничных условий и геометрических параметров расчетной области. Расчетная область с указанными геометрическими параметрами приведена на рис.3.

Кроме того, решение задачи зависит от параметров, входящих в граничные условия на входе и выходах ВТ:

$$\begin{aligned} \text{EF: } V_r &= -\sin \alpha, \quad V_\varphi = \cos \alpha, \quad V_z = 0, \quad T = 1, \quad \rho = 1; \\ \text{AB, GH: } \rho &= \frac{1}{P_d T} \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\alpha$  - угол наклона входного потока, а  $P_d$  – задаваемый перепад давления (отношение давления на входе ВТ к давлению на выходах). В случае одного входного потока с прямоугольным сечением считается [1], что оптимальный вариант соответствует соплу, у которого высота  $h$  вдвое меньше его ширины и оптимальная площадь сечения связана с площадью сечения ВТ:

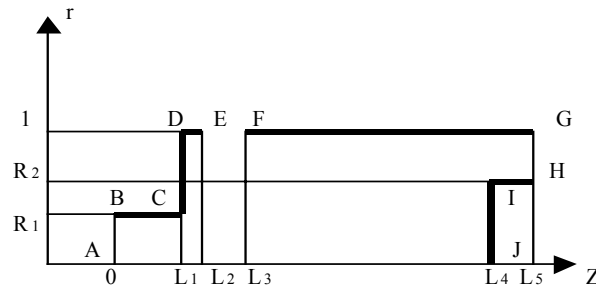


Рис.3. Геометрия расчетной области

$$F_c = 2h^2 = k_c \pi R^2, \quad k_c = 0.092 \pm 0.007. \quad (12)$$

В этом случае угол наклона входного потока в использованной осесимметричной постановке должен быть определен из соотношения:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{k_c}{8\pi}} \approx 0.06 \pm 0.025. \quad (13)$$

На выходах ВТ используются так называемые [8] “мягкие” условия (кроме плотности):

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad \rho = \frac{1}{P_d T} \quad (14)$$

На твердых границах ВТ полагается:

$$V_r = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0; \quad (15)$$

На оси ВТ выполняются условия симметрии и решаются уравнения энергии и движения для z-компоненты скорости.

Решение задачи начинается с задания начальных условий и параметров задачи. Внутри области задаются однородные начальные условия для компонент скорости и температуры:

$$V_r = V_\varphi = V_z = 0, \quad T = 1, \quad (16)$$

а начальное поле плотности определяется из решения смешанной задачи для уравнения Лапласа внутри области:

$$\Delta \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad \rho|_{EF} = 1, \quad \rho|_{AB, GH} = \frac{1}{P_d}. \quad (17)$$

Здесь  $\Gamma$  – объединение твердых границ ВТ.

### Описание схемы счета

Задача решается в естественных переменных (метод “UVP”). При решении задачи используется схема с направленными разностями против потока и “косой” аппроксимацией [4]. Аналогичные аппроксимации (но с пересчетом) использовались в [9]. Нас будут интересовать лишь “установившиеся” решения, для которых отрицательные свойства “косой” аппроксимации не сказываются. Схема является явной, но устойчивой для соответствующих линеаризованных уравнений. При использовании аппроксимации с разностями против потока возникает эффект счетной вязкости. Для того, чтобы иметь возможность непрерывно менять геометрические параметры и для уменьшения счетной вязкости используется неравномерная сетка. Пример шаблона сетки приведен на рис.4.

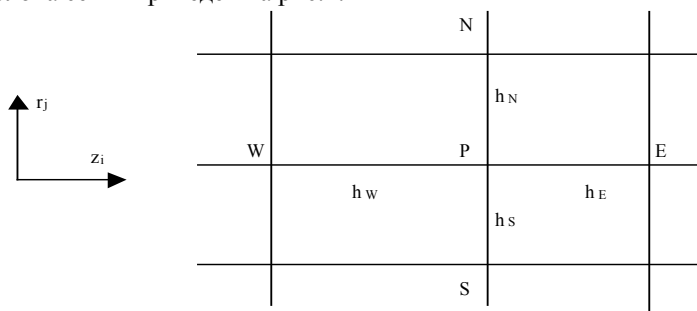


Рис.4. Шаблон неравномерной сетки

Для обозначения узлов сетки используется географическая символика. Центральный узел имеет обозначение P, а соседние с ним узлы обозначены первыми буквами сторон света - N, S, W, E. Шаги по соответствующим направлениям обозначены как  $h_N, h_S, h_W, h_E$ . В качестве примера приведем аппроксимацию типичных слагаемых, использованных при вычислении компонент скорости и температуры:

$$\begin{aligned} V_r \frac{\partial f}{\partial z} &\rightarrow \frac{V_r + |V_r|}{2} \left( \frac{f_P^{n+1} - f_S^n}{h_S} \right) + \frac{V_r - |V_r|}{2} \left( \frac{f_N^n - f_P^{n+1}}{h_N} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial f}{\partial z} \right) &\rightarrow \frac{2}{h_E + h_W} \mu \left( \frac{T_E + T_P}{2} \right) \frac{f_E^n - f_P^{n+1}}{h_E} - \\ &\quad \frac{2}{h_E + h_W} \mu \left( \frac{T_P + T_W}{2} \right) \frac{f_P^{n+1} - f_W^n}{h_W} \end{aligned} \quad (18)$$

Кроме того, на верхний (n+1)-ый слой поднимаются все слагаемые, которые улучшают устойчивость метода путем увеличения вклада в диагональные элементы. При этом шаг по времени можно увеличить до  $\approx 2h^2$  и устойчивость схемы не нарушается.

При решении уравнения плотности использовались два способа. В первом применялась процедура “сдерживания”. Для этого вычислялось максимальное и минимальное значение плотности в четырех соседних узлах. Если вычисленное значение выходило за эти пределы, ему присваивалось соответствующее минимальное или максимальное значение. Процедура счета при этом сходилась, но поле плотности не обладало достаточной гладкостью. Второй способ с использованием процедуры сглаживания оказался более эффективным. В этом случае схема вычисления была дополнена слагаемым аналогичным оператору Лапласа с малым множителем  $\approx 0.001$ . Слагаемое имело следующий вид:

$$s = \frac{2}{r_k (h_N + h_S)} \left( \frac{r_{p+1/2}}{h_N} \rho_N + \frac{r_{p-1/2}}{h_S} \rho_S \right) + \frac{2}{h_W + h_E} \left( \frac{\rho_E}{h_E} + \frac{\rho_W}{h_W} \right) \quad (19)$$

Геометрия расчетной области включает большое число элементов, аппроксимация которых требует дополнительного рассмотрения. Такими “особенными” участками границы являются углы, помеченные на рис.3 точками C и I. Для их аппроксимации были использованы три соседние точки с весами, пропорциональными шагам по сетке, при этом требовалось, чтобы сумма всех коэффициентов была равна 1. Реализация этой идеи дает для функции f формулу:

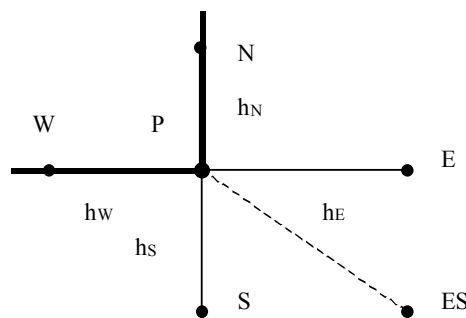


Рис. 5. Пример аппроксимации угловой точки

$$f_P = \frac{h_S f_E + h_E f_S + \sqrt{h_S^2 + h_E^2} f_{SE}}{h_S + h_E + \sqrt{h_S^2 + h_E^2}} \quad (20)$$

### Полученные результаты

Основные результаты получены для параметров задачи:

$$\begin{aligned} Re=150, \gamma=1.4, \alpha=0.1, \beta=0, \\ R1=0.25, R2=0.75, \\ L1=0.5, L2=0.7, L3=1.2, L4=2.5, L5=2.8. \end{aligned} \quad (21)$$

Процесс установления приведен на рис.6. для невязки, которая определяется по формуле:

$$nev = \max_{z, r} \left\{ \left| V_r^{n+1} - V_r^n \right|, \left| V_\phi^{n+1} - V_\phi^n \right|, \left| V_z^{n+1} - V_z^n \right|, \left| T^{n+1} - T^n \right| \right\} \quad (22)$$

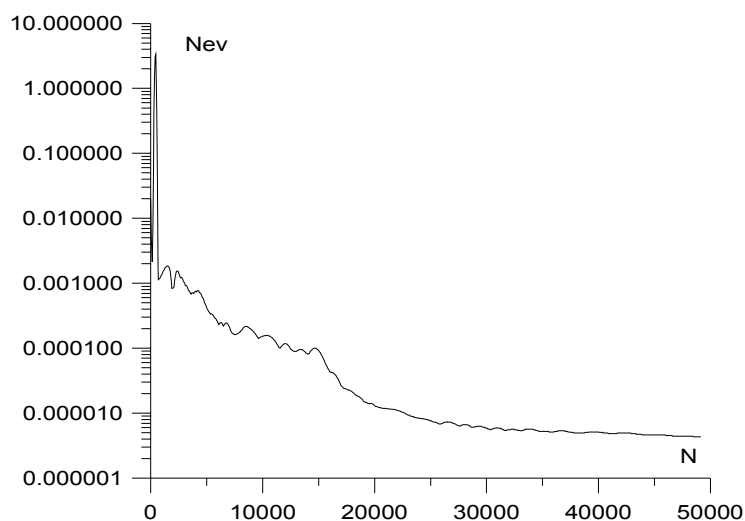


Рис.6. Логарифмическая зависимость невязки  $nev$  (22) от номера шага по времени  $N$  для параметров (21)

Расчет на более подробных сетках дает картины течения топологически аналогичные тем, которые получены для несжимаемой жидкости. Азимутальная компонента скорости также резко затухает вблизи входа, что связано со счетной вязкостью метода (подробная сетка в данном случае это  $\approx 100 \times 400$  узлов).

Было выяснено влияние величины диафрагменного выхода на долю потока через дроссельный выход:

$$\mu = \frac{Q_{\text{дроссель}}}{Q_{\text{диафрагма}} + Q_{\text{дроссель}}} \quad (23)$$

На рис. 7а приведена зависимость величины доли потока через выходы ВТ от радиуса диафрагмы при фиксированном значении дроссельного выхода ( $R2=0.75$ ). Аналогичная зависимость построена для дроссельного выхода – рис.7.б при зафиксированном значении радиуса диафрагмы.

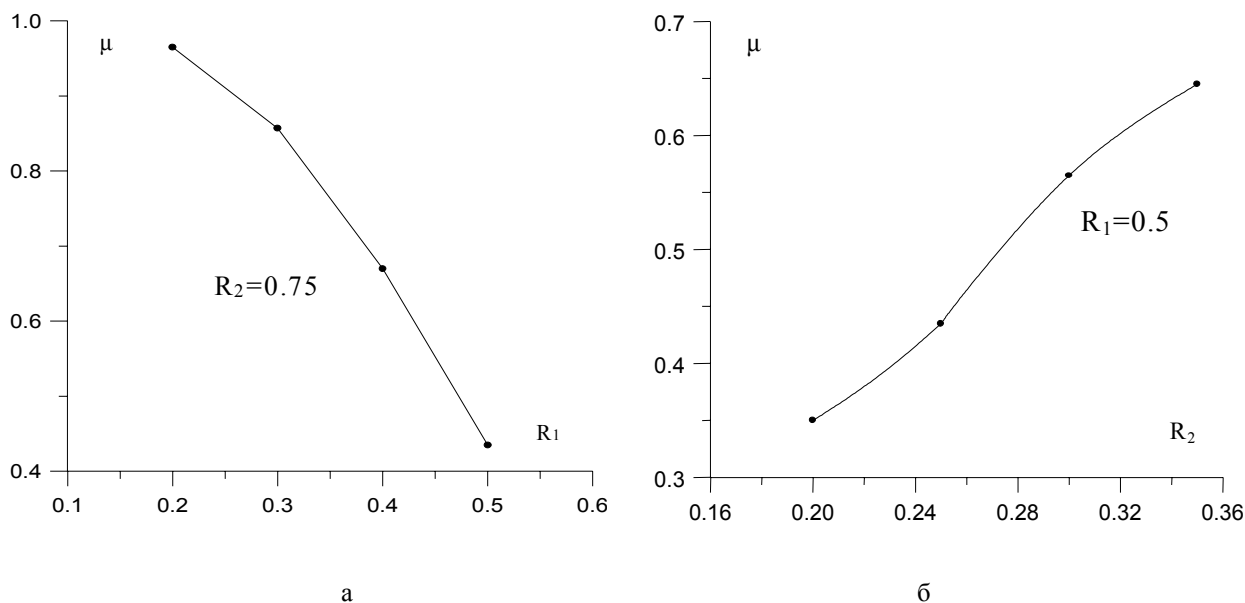


Рис.7. Зависимость доли потока через дроссельный выход от радиуса диафрагмы ВТ(а) и от радиуса дроссельного выхода ВТ (б) для параметров (21).

Также была выяснена зависимость влияния участка границы L2-L3 на характеристики ВТ. При этом получается, что смещение входа в сторону уменьшения этого участка ведет к понижению доли потока  $\mu$ , температурные эффекты при этом фактически не меняются.

На следующем этапе было проверено влияние присутствия z-компоненты скорости во входном потоке. Появление z-компоненты скорости было осуществлено при помощи введения дополнительного угла  $\beta$ . При этом компоненты скорости на входе в ВТ рассчитывались следующим образом:

$$\begin{aligned} V_r &= -\sin\alpha\cos\beta \\ V_\varphi &= \cos\alpha\cos\beta \\ V_z &= \sin\beta \end{aligned} \quad (24)$$

Было выяснено, что при увеличении угла  $\beta$  ( $\beta$  изменялся в пределах  $20^\circ$ ) растет поток через диафрагменный выход ВТ, а поток через дроссель незначительно уменьшается. Значение угла  $\beta$  слабо влияет на вычисляемые характеристики (1-2%, что можно списать на погрешность вычисления).

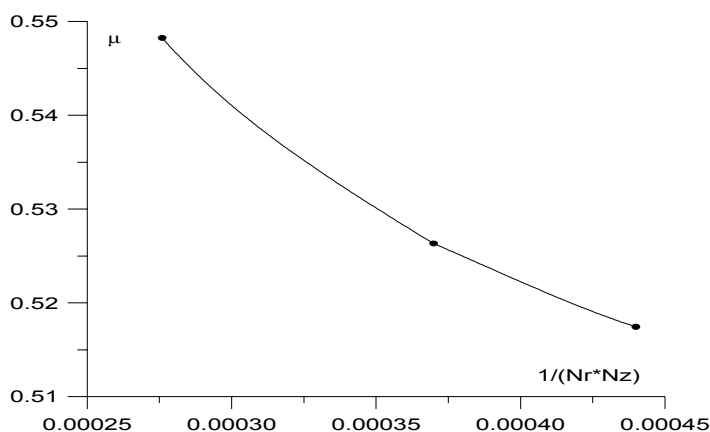


Рис.8. Зависимость потоков через выходы ВТ от параметров сетки для параметров (21)



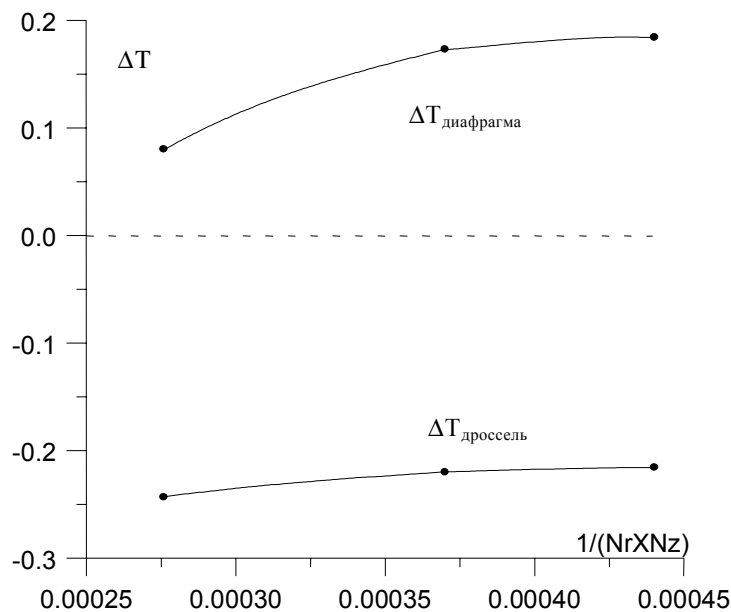


Рис.9. Зависимость разностей температур торможения на выходах и входе ВТ от параметров сетки для параметров (21)

## Литература

- [1] Меркулов А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. - М., Машиностроение, 1969.-183с.
- [2] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка. – Успехи физических наук, 1997, т. 167, № 6, с. 665-687.
- [3] Любимов Д.В., Тарунин Е.Л., Ямшина Ю.А. Теоретическая модель эффекта Ранка-Хилша.- Пермь: Пермский университет// Научный журнал “Математика”. Вып. 1, 1994, с. 162-177.
- [4] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. - Иркутск: Иркутский университет, 1990.-226с.
- [5] Рахматулин Х.А. и др. Газовая динамика. – М.: Высшая школа, 1965, 723с.
- [6] Мальцева Е.Н., Тарунин Е.Л. Расчет гидродинамики в трубке Ранка-Хилша. Сб. н. тр. Перм. Воен. инст-та ракетных войск, 1999, с.20-25.
- [7] Арбузов В.А., Дубнищев Ю.Н., Лебедев А.В. и др. Наблюдение крупномасштабных гидродинамических структур в вихревой трубке и эффект Ранка. Письма в ЖТФ, 1997, т.23, №23, с. 84-90.
- [8] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.
- [9] Браиловская И.Ю. Явные разностные методы расчета отрывных течений вязкого сжимаемого газа. В кн. Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. IV (Вязкие течения сжимаемого газа). М.: МГУ, 1971, с.6-85.